

01;03

©1993 г.

О ФОРМЕ КАПЕЛЬ И САТЕЛЛИТОВ, ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ КАПИЛЛЯРНОМ РАСПАДЕ СТРУЙ ЖИДКОСТИ

Н.А.Разумовский

Проведено теоретическое исследование вынужденного капиллярного распада свободной струи жидкости, выпускаемой из сопла кругового сечения. Течение характеризуется числами Рейнольдса и Вебера $Re \approx We \gg 1$. Численно строится периодическое по времени приближенное решение уравнений течения на протяжении связанной части струи от истока до мгновенного положения конца струи. Решение учитывает поверхностное натяжение и вязкость жидкости, а также радиальную зависимость скорости течения, индуцированную в сопловом канале и релаксирующую на струе за счет вязкости жидкости. Цель работы состоит в том, чтобы показать существование и основные закономерности влияния радиальной зависимости скорости на форму капель и тип сателлитов, образующихся при распаде струи. В результате расчетов получены профили струй, наблюдавшиеся в экспериментах [1-3].

Введение

При вынужденном капиллярном распаде струя распадается на капли, причем в ряде случаев относительно крупные основные капли чередуются с более мелкими — сателлитами. При некоторых обстоятельствах сателлиты имеют большую, чем у основных капель, скорость (быстрые сателлиты). Встречаются также медленные и нейтральные сателлиты, движущиеся со скоростью основных капель. В работах [1,2] обсуждались эксперименты, показывающие, что быстрые сателлиты типичны для коротких струй. Длинные струи образуют при распаде нейтральные или медленные сателлиты. В этих работах были предложены также попытки теоретического объяснения этого явления, основанные на решении одномерных уравнений течения, не учитывающих радиальной зависимости скорости течения. Решения строились по методу многих масштабов [4-7]. Этот метод использует разложения по степеням малого параметра, характеризующего малость возмущений течения струи. Вблизи точки распада этот параметр перестает быть малым и решение теряет точность. Поскольку тип сателлитов определяется течением вблизи точки распада струи, то выводы теорий, основанных на методе многих масштабов, должны восприниматься с большой осторожностью. Более позднее решение тех же уравнений течения, полученное численно в работе [8],

не показало зависимости типа сателлитов от длины струи. Расчетные профили струй имели сферические утолщения, соединяемые тонкими перетяжками. Такие профили наблюдаются в экспериментах при слабой модуляции скорости истечения, отвечающей большой длине струи, и соответствуют нейтральным сателлитам.

Эксперименты [3] показали, что для случая достаточно сильной модуляции скорости истечения типичны утолщения в форме "морковки" хвостом назад, превращающиеся в капли с хвостами после распада и образующие быстрые сателлиты или не образующие сателлитов вовсе. В работе [3] показано, что такой профиль струи может образоваться в результате присутствия второй и третьей гармоник в модулирующем сигнале. В работе [9] измерялся радиус струи в зависимости от координаты и времени. Обнаружено, что вторая гармоника присутствует на струе начиная с самого истока также и в случае гармонической модуляции.

Прямые эксперименты не позволили объяснить причину появления высших гармоник в возмущениях струи. Это объяснение может быть получено в результате более детального теоретического рассмотрения, учитывающего дополнительные эффекты по сравнению с работами [1-9]. Такое рассмотрение должно описывать профиль струи в непосредственной близости точки распада, что делает неприменимым метод многих масштабов и заставляет использовать численные методы для решения уравнений течения.

Известно несколько работ, посвященных численному решению уравнений капиллярного распада струй. Естественная постановка задачи требует искать периодическое по времени решение, удовлетворяющее условиям истечения в истоке. Одна из трудностей такого описания состоит в том, что условия истечения не дают полного набора краевых условий, однозначно определяющих периодическое по времени решение. Простейший способ преодоления этой трудности, впервые использованный Рэлеем, состоит в замене условия периодичности по времени на условие пространственной периодичности искомым функций. Условия истечения заменяются примерно соответствующими им начальными данными, однозначно определяющими решение полученной задачи эволюционного типа. Решение исходной задачи в момент времени t на расстоянии x от истока полагается равным пространственно-периодическому решению в точке $x - vt$ в момент времени x/v (v — средняя скорость течения). Это приближение хорошо описывает течение при больших значениях числа Вебера, пока профиль струи достаточно плавный. В работах [10-11] и др. показано, что этот подход показывает наличие сателлита при всех значениях параметров. Рассчитанные массы сателлитов согласуются с экспериментами, однако объяснения природы образования того или иного типа сателлитов на этом пути получено не было.

Другой подход предложен в работе [8]. В этой работе рассматривается установление колебаний течения на полубесконечной струе от первого появления возмущений вплоть до момента распада струи. Считается, что радиус струи в истоке постоянен, а скорость истечения постоянна при $t < 0$ и промодулирована при $t > 0$. Начальные условия при $t = 0$ и условие на бесконечности отвечают невозмущенному течению. При положительных значениях t возмущение распространяется от истока, постепенно нарастая и заполняя струю. Вычисления должны быть прекращены до того, как струя распадется. Вблизи истока образуется расширяющаяся зона, в которой колебания можно считать установившимися. К моменту

распада струи граница этой зоны отстоит от точки распада на одну-две длины волн. Это и есть естественное ограничение области применимости модели [8].

Непосредственное построение периодического по времени численного решения уравнений течения упирается в две трудности. Первая состоит в необходимости поставить краевое условие в точке распада струи. В известных на эту тему работах без четкого обоснования применялось условие излучения. Решение представлялось суперпозицией волн, бегущих по струе от истока. Другая трудность — численная неустойчивость вычислительных схем, связанная с наличием больших параметров — чисел Рейнольдса и Вебера. В работах [4,9] эта трудность преодолевалась благодаря учету только двух волн, соответствующих первой и второй гармоникам частоты возбуждения. Их решения, разумеется, неприменимы вблизи точки распада. В работе [12] эти трудности не встретились, поскольку в ней рассмотрен распад струй, характеризуемых очень большими значениями числа Вебера ($We = 10\,000$), для которых поверхностное натяжение пренебрежимо. Этим же объясняется вывод о неприменимости одномерных уравнений течения, принятых в теории капиллярного распада струй.

Настоящая работа содержит теорию сателлиитообразования при вынужденном капиллярном распаде струй, основанную на простейших одномерных уравнениях. Отличие состоит в том, что предложенный алгоритм решения уравнений точнее предшествующих вблизи точки распада. Другое важное обстоятельство, позволившее объяснить природу сателлиитообразования, состоит в учете радиальной зависимости скорости течения. С этой целью выводятся одномерные уравнения течения, учитывающие профиль скорости при помощи модельной аппроксимации. Периодическое по времени решение уравнений течения строится численно на участке от истока до точки распада. Вычисления показывают хорошее совпадение расчетных профилей с известными из экспериментов и позволяют объяснить наблюдавшиеся в экспериментах закономерности сателлиитообразования.

Вывод одномерных уравнений течения, учитывающих радиальную зависимость скорости

Использование трехмерных уравнений Навье–Стокса в теории вынужденного капиллярного распада затруднено тем, что течение характеризуется малыми параметрами. Это обратные числа Вебера и Рейнольдса

$$We^{-1} \approx 0.01, \quad Re^{-1} \ll 0.01 \quad (1), (2)$$

и

$$H = r_0/\lambda \approx 0.1, \quad (3)$$

где r_0 — радиус струи вблизи сопла, λ — длина волны возмущений. С другой стороны, своевременный учет малости этих параметров позволяет сильно сократить объем необходимых вычислений. При этом приходится привлекать дополнительные гипотезы, основанные, в частности, на экспериментах. Так, известно, что почти на всей своей длине распадающиеся струи имеют плавный профиль, т.е. $H = r_0/\lambda$ может быть принято в качестве отношения радиального и осевого масштабов изменения течения. Это позволяет использовать так называемое приближение мелкой воды, описывающее течение функциями времени и одной

осевой пространственной переменной. Эти функции удовлетворяют одномерным уравнениям течения. Для вывода одномерных уравнений используется техника формальных асимптотических разложений по степеням малых параметров. Для простоты удерживаются только старшие члены. Уравнения, получаемые в результате, имеют ту же точность, что и уравнения, использованные в работе [10].

Для учета радиальной зависимости скорости течения на качественном уровне имеет смысл использовать модельный профиль скорости. На этом пути будет показано, что радиальная зависимость скорости существенно влияет на процесс сателлитаобразования и будут получены качественные зависимости, характеризующие это влияние.

Профиль скорости на начальном участке струи определяется радиальной зависимостью скорости истечения, о которой мало что известно. Поэтому имеет смысл ограничить настоящее рассмотрение случаем модельного трапецеидального профиля скорости истечения. Скорость течения считается постоянной вблизи оси сопла. Течение вблизи стенок соплового канала считается представленным тонким ламинарным пограничным слоем. Это ограничение позволяет использовать простые аппроксимации профиля скорости, не применимые в общем случае. Профиль скорости изменяется по струе вследствие вязкости жидкости, если эта вязкость не слишком мала. Простые оценки длины релаксации могут быть получены при рассмотрении временной релаксации тонкого пространственно однородного пограничного слоя на бесконечной невозмущенной струе. Как известно, в простейшем приближении плоского слоя временная релаксация описывается формулой

$$v(r, t) = v_0 + v_1(\pi vt)^{-1/2} \exp(-(\bar{r} - r)^2/(4vt)), \quad (4)$$

где r, \bar{r} — радиальная координата и радиус струи; t — время; ν — кинематическая вязкость; v_0 и v_1 постоянные.

Уравнение (4) показывает, что пограничный слой, бывший тонким при $t = 0$, становится толстым при $t \approx \bar{r}^2/\nu$. На практике это время релаксации составляет около периода или больше. По этой причине необходимы 2 типа одномерных уравнений течения: для тонкого слоя уравнений, применимые вблизи истока, и для плавного, релаксированного профиля скорости, имеющего место на удалении от истока порядка длины волны и более.

Случай тонкого пограничного слоя. Вывод одномерных уравнений течения в этом случае использует гауссову аппроксимацию профиля скорости. Соответствующий профиль скорости поддерживается вязкостью. Условия применимости гауссовой аппроксимации — медленность всех процессов по сравнению с вязкостной релаксацией. Требование достаточной медленности развития возмущений, связанного с рэлеевской неустойчивостью, выражается неравенством

$$d/\bar{r} \ll We^{1/4}(Re \bar{r}/\lambda)^{-1/2},$$

где λ — пространственный период.

Медленность перестройки течения, связанной с модуляцией скорости истечения, требует

$$d/\bar{r} \ll (Re(\bar{r}/\lambda)(\Delta v/v))^{-1/2},$$

где $\Delta v/v$ — относительная глубина модуляции скорости истечения.

В практических случаях $We \approx 140$, $Re \approx 800$, $\bar{r}/\lambda \approx 0.07$, $\Delta v/v \approx 0.01$, единственным ограничением остается $d/\bar{r} \ll 1$.

Исходные уравнения течения в безразмерных цилиндрических координатах $R = r/r_0$, $X = xH/r_0$, $T = tv_\infty H/r_0$ (H — отношение масштабов радиального и осевого), соосных со струей, имеют вид

$$V_T + VV_X + WV_R = Re^{-1} [HV_{XX} + H^{-1}R^{-1}(RV_R)_R] - P_X, \quad (5)$$

$$W_T + VW_X + WW_R = Re^{-1} [HW_{XX} + H^{-1}R^{-1}(RW_R)_R] - H^{-2}P_R, \quad (6)$$

$$V_X + W/R + W_R = 0, \quad (7)$$

где $V = v/v_\infty$ и $W = w/(Hv_0)$ — безразмерные осевая и радиальные компоненты скорости; $Re = v_\infty r_0/\nu$ — число Рейнольдса; $P = p(\rho v_\infty^2)$, p — давление; индексы T , X и R обозначают частные производные по времени, осевой и радиальной координатам.

Граничные условия при $R = \bar{R} = \bar{r}/r_0$ имеют вид

$$\bar{R}_T = W - V\bar{R}_X, \quad (8)$$

$$P = We^{-1} \left\{ \bar{R}^{-1} [1 + (\bar{R}_X)^2]^{-1/2} - \bar{R}_{XX} [1 + (\bar{R}_X)^2]^{-3/2} \right\} + \\ + 2H Re^{-1} [W_R + \bar{R}_X (V_R + H^2 W_X) + H^2 (\bar{R}_X)^2 V_X] / [1 + H^2 (\bar{R}_X)^2], \quad (9)$$

$$V_R + H^2 W_X + 2H^2 \bar{R}_X (W_R - V_X) - H^2 (\bar{R}_X)^2 (V_R + H^2 W_X) = 0, \quad (10)$$

где $We = \rho v_\infty^2 r_0/\sigma$ — число Вебера, σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Редукция к одномерным уравнениям течения возможна, если $H \ll 1$. Используется гауссова аппроксимация профиля скорости

$$V = V_0(X, T) + V_1(X, T) \exp \left[-((R - \bar{R})/D(X, T))^2 \right] + \dots, \quad (11)$$

где V_0 , V_1 , D — неизвестные функции, $D \ll 1$, точками обозначены много меньшие члены.

Уравнение неразрывности (7) дает

$$W = -R^{-1} \int_0^R V_X R' dR'.$$

Легко видеть, что уравнение (6) и граничные условия (8)–(10) не накладывают ограничений на V_0 , V_1 , D и могут быть удовлетворены за счет надлежащего выбора опущенных членов в равенствах (11). Радиальное уравнение (5) дает представление V_T , использующее V и ее пространственные производные. Подстановка формулы (11) в это представление показывает, что профиль скорости не остается в точности гауссовым.

Чтобы минимизировать среднеквадратичное отклонение истинного профиля от его гауссовой аппроксимации (11) с подходящими значениями V_0, V_1, D , следует положить

$$V_{0,T} = V_T|_{R=0},$$

$$V_{1,T} = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} V_T (3 - 4\zeta^2) e^{-\zeta^2} d\zeta,$$

$$D_T = 2\sqrt{2/\pi} \frac{D}{V_1} \int_0^{\infty} (4\zeta^2 - 1) e^{-\zeta^2} d\zeta,$$

где переменная интегрирования имеет смысл $\zeta = (\bar{R} - R)/D$, а верхний предел интегрирования \bar{R}/D заменен бесконечностью.

Для простоты пренебрегаем всеми членами, кроме главных, учитывающих инерцию, вязкость и поверхностное натяжение. В результате получаем уравнения

$$P = \bar{R}^{-1} [1 + (H\bar{R}_H)^2]^{-1/2} - H^2 \bar{R}_{XX} [1 + (H\bar{R}_X)^2]^{-3/2}, \quad (12)$$

и

$$\begin{aligned} V_{0,T} + V_0 V_{0,X} &= We^{-1} P_X, \\ V_{1,T} + V_0 V_{1,X} + V_1 V_{0,X} + 1.02 V_1 V_{1,X} + \\ + 0.38 V_1^2 (\bar{R}_X/\bar{R} + D_X/D) &= -2H^{-1} Re^{-1} V_1/D^2, \\ D_T + V_0 D_X + 0.5 V_{0,X} D + 0.41 D V_{1,X} + \\ + 0.59 D V_1 (\bar{R}_X/\bar{R} + D_X/D) &= 2/(Re H D), \\ \bar{R}_T + V \bar{R}_X + 0.5 \bar{R} V_{0,X} + 0.89 (\bar{R} D V_1)_X / \bar{R} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения (12), (13) в случае отсутствия пограничного слоя, т.е. при $V_1 = 0$, превращаются в известные уравнения, использовавшиеся в работе [10].

Граничные значения V_0, V_1, \bar{R}, D в истоке могут быть получены из аппроксимации трапецеидального профиля скорости истечения формулой (11).

С л у ч а й п л а в н о г о п р о ф и л я с к о р о с т и. В случае, если $H \ll 1$ и профиль скорости достаточно плавный, трехмерные уравнения течения могут быть редуцированы к одномерным следующим образом. Радиальная зависимость скорости может быть представлена рядом Дини. Старшие члены этого ряда существенны только для быстропеременных профилей и могут быть отброшены. Компромисс между точностью и простотой достигается, если удержать 3 члена

$$V = V_0(X, T) + V_1(X, T) J_0(\lambda_1 R/R) + V_2(X, T) J_0(\lambda_2 R/R) + \dots, \quad (14)$$

где V_0, V_1, V_2 — неизвестные функции; λ_1, λ_2 — первые корни функции Бесселя J_1 ; опущенные члены имеют порядок H^2 .

Уравнение неразрывности дает

$$W = R [0.5V_X + \lambda_1^{-1} J_1(\lambda_1 R) V_{1,X} + \lambda_2^{-1} J_1(\lambda_2 R) V_{2,X} + \dots]. \quad (15)$$

Подстановка равенств (14), (15) в уравнения (5)–(10) и усечение всех членов, кроме главных, соответствующих инерции, вязкости и поверхностному натяжению, показывают, что формула (12) для давления P достаточно точна. Проекция осевого уравнения на цилиндрические гармоники $J_0(\lambda_1 R)$, $J_0(\lambda_2 R)$ дает уравнения

$$\begin{aligned} V_{0,T} + V_0 V_{0,X} + 0.32 V_1 (\bar{R} V_1)_X / \bar{R} + 0.18 V_2 (\bar{R} V_2)_X / \bar{R} &= -We^{-1} P_X, \\ V_{1,T} + V_0 V_{1,X} + 0.35 V_1^2 \bar{R}_X / \bar{R} + 0.53 V_1 V_{1,X} + 1.16 V_1 V_2 \bar{R}_X / \bar{R} + 0.4 V_1 V_{2,X} &+ \\ + 0.71 V_2 V_{1,X} + 0.31 V_2 V_{2,X} + 0.28 V_2^2 \bar{R}_X / \bar{R} &= -14.7 H^{-1} Re^{-1} V_1 \bar{R}^{-2}, \\ V_{2,T} + V_0 V_{2,X} - 0.65 V_1^2 \bar{R}_X / \bar{R} + 0.16 V_1 V_{1,X} + 0.39 V_1 V_2 \bar{R}_X / \bar{R} + 0.35 V_1 V_{2,X} &+ \\ + 0.45 V_2 V_{1,X} + 0.23 V_2 V_{2,X} + 0.16 V_2^2 \bar{R}_X / \bar{R} &= -49.2 H^{-1} Re^{-1} V_2 \bar{R}^{-2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Добавляя к формулам (12), (16) полученное из (10) равенство

$$\bar{R}_T + V_0 \bar{R}_X + 0.5 \bar{R} V_{0,X} = 0, \quad (17)$$

оказавшееся таким же, как и в случае однородного профиля скорости, получим искомые уравнения.

Уравнения (12), (16), (17) применимы на той части струи, где пограничный слой уже отрелаксировал и профиль скорости стал плавным. В случае, если профиль скорости истечения имеет тонкий пограничный слой, область применимости уравнений (12), (17), (18) начинается в некоторой внутренней точке $X = \tilde{X}$. Граничные условия в этой точке получаются из аппроксимации (14) профиля скорости в точке \tilde{X} и имеют вид

$$\begin{aligned} R &= R(\tilde{X}), \quad V_0 = 2 \int_0^1 V(\tilde{X}, \bar{R}\zeta, T) \zeta d\zeta, \\ V_1 &= \frac{2}{J_0^2(\lambda_1)} \int_0^1 V(\tilde{X}, \bar{R}\zeta, T) J_0(\lambda_1 \zeta) \zeta d\zeta, \\ V_2 &= \frac{2}{J_0^2(\lambda_2)} \int_0^1 V(\tilde{X}, \bar{R}\zeta, T) J_0(\lambda_2 \zeta) \zeta d\zeta, \end{aligned} \quad (18)$$

где $V(\tilde{X}, \bar{R}\zeta, T)$ — профиль скорости в точке \tilde{X} .

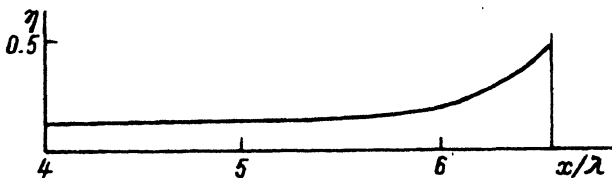


Рис. 1. Отношение η амплитуд радиальной и осевой компонент скорости течения в зависимости от осевой координаты. Точка распада помечена вертикальной чертой.

Одномерные уравнения (12), (13) и (12), (16), (17) выведены из трехмерных уравнений Навье–Стокса на основании допущения, что радиальные компоненты скорости течения пренебрежимы по сравнению с осевыми. Это так называемое приближение мелкой воды. Отношение амплитуд радиальной и осевой компонент скорости течения на поверхности струи в зависимости от осевой координаты контролировалось в процессе вычислений и представлено на рис. 1. Видно, что при интересующих нас значениях параметров условия применимости приближения мелкой воды выполнены на всей струе, кроме окрестности точки распада размером порядка трети длины волны.

Уравнения течения, выведенные и решаемые в настоящей работе, являются простейшими из уравнений, полученных в приближении мелкой воды. Они являются обобщением уравнений [10] на случай радиально зависящей скорости. Распространенные в теории капиллярного распада струй с однородным профилем скорости уравнения Cosserat, выведенные в работе [13], содержат дополнительные, поправочные члены по сравнению с уравнениями [10]. Эти члены существенны при большой вязкости и при сравнимых осевом и радиальном масштабах возмущения течения. В рассматриваемом случае ($We \approx 100$, $Re > \approx 100$, $H \approx 0.1$) эти члены на 2 порядка меньше главных. Это позволило ограничиться старшими членами при выводе уравнений (12), (13) и (12), (16), (17).

Решение уравнений течения

Решение задачи о вынужденном капиллярном распаде струи с учетом радиальной зависимости скорости собирается из решений уравнений (12), (13) на отрезке от истока до точки, где пограничный слой перестает быть тонким, и уравнений (12), (16), (17) от этой точки и точки распада струи. Решения периодичны по времени. В истоке струи решение удовлетворяет условиям истечения, задающим радиус струи, скорость истечения и параметры пограничного слоя скорости истечения. Условие типа условий истечения для уравнений (12), (16), (17) получается из аппроксимации (18) решения уравнений (12), (13). Эти краевые условия не определяют однозначно решения уравнений течения. В этом легко убедиться, сравнив общий порядок системы дифференциальных уравнений с числом краевых условий. Для однозначности нужны условия типа условий излучения [14], отражающие однонаправленность причинных связей на струе. Однонаправленность связана с малостью скорости распространения плавных возмущений относительно струи. Эта скорость имеет порядок величины $v_0 We^{-1/2}$, что существенно меньше скорости v_0 сноса возмущений течением. Естественно, однонаправленность имеет место не на всей струе, а только там, где решение сохраняет плавность. Это значит, что в пространственном спектре решения не представлены быстроизменяющиеся компоненты, распространяющиеся вдоль струи с большей скоростью. На практике решение может считаться плавным на всей струе, кроме относительно малой (порядка нескольких радиусов) окрестности точки распада.

Плавное решение вне окрестности точки распада может быть построено методом последовательных приближений. Каждое из одномерных уравнений течения, будь то уравнения (12), (13) или (12), (16), (17), может

быть приведено к стандартному виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} \right) = \dots \quad (19)$$

Точка в левой части уравнения обозначает соответствующую неизвестную функцию. Первые части, содержащие неизвестные функции и их производные в том числе высоких порядков, малы, как $0(We^{-1/2})$. Производные, входящие в правые части, не увеличивают их асимптотический порядок величины благодаря условию плавности. Операторы в левых частях обращаются интегрированием по прямым $X = T + \text{const}$, которое превращает (19) в интегродифференциальные уравнения с малыми ядрами. Полученные уравнения в главном совпадают с уравнениями течения струи жидкости без вязкости и поверхностного натяжения. Решения этих уравнений, рассматриваемые на ограниченном отрезке оси X , также близки при одинаковых условиях истечения. На ограниченном отрезке оси X итерации интегральных уравнений дают асимптотическое решение. В качестве начального приближения используется решение уравнений течения жидкости без поверхностного натяжения и вязкости.

Значение полученного асимптотического решения на дальнем от источника отрезка может быть использовано в качестве краевых условий типа условий истечения для асимптотического решения на следующем отрезке. Так могут быть построены асимптотические решения на всех отрезках конечной длины, покрывающих требуемый участок оси X . Нижней по течению границей этого участка может быть точка, где течение потеряет плавность, либо в случае уравнений (12), (13), где пограничный слой перестает быть тонким. При сделанных допущениях потеря плавности может произойти только вблизи точки распада. Асимптотическое решение уравнений Cosserat или (12), (16), (17) должно быть построено на достаточно длинном участке струи, длина которого имеет порядок величины $We^{1/2} \ln(We)$. Это значит, что для получения асимптотического решения с точностью до $We^{-n/2}$ необходимо на каждом из отрезков строить решение с точностью до $We^{-(n+2)/2}$.

Необходимо заметить, что итерации, приводящие к асимптотическому решению, не являются сходящимися и не позволяют найти точное решение уравнений течения. Это связано с наличием производных в правых частях уравнений (19) и отражает недостаточность условий истечения для однозначного определения точного решения. Применимость асимптотик для вычислений при конкретных значениях малых параметров может быть проверена сравнением результатов с известными экспериментами. Косвенным подтверждением применимости является независимость решения от вспомогательных параметров: от длины отрезков, числа итераций и т.д.

Число итераций при вычислениях составляло примерно 1 на первой половине струи, 2 на третьей четверти, и т.д. При значениях $We \sim 100$, $Re \sim 500$ максимальное число итераций составляло 5, а погрешность, оцениваемая по относительной величине вклада последней итерации, составляла $10^{-4} - 10^{-3}$.

Решение в окрестности точки распада не удовлетворяет условию односторонности причинных связей. Поэтому к нему неприменим итерационный метод построения асимптотического решения и для его нахо-

ждения применяется эволюционный алгоритм. Аналогичный метод применялся в работе [14] для математического моделирования процесса каплеобразования в генераторах "капли по требованию". Эволюционный алгоритм численно моделирует развитие течения на конечном участке струи. С одной стороны, этот участок ограничен свободным концом струи, на котором ставятся условия сохранения вещества и импульса. С другой стороны, концевой участок ограничен искусственно фиксированной границей, на которой радиус струи и скорость течения задаются на основании асимптотического решения, построенного ранее. В качестве начальных условий также берется асимптотическое решение. Развитие течения прослеживается в течение нескольких периодов до установления стационарных периодических изменений течения. За это время несколько раз происходит отрыв капли с переносом условий на свободном конце струи в точку отрыва. При этом некоторая погрешность в начальных условиях не влияет на результат.

Результаты вычислений

Предлагаемая теория содержит допущения, применимость которых должна быть проверена сравнением с результатами других теорий и экспериментов. В частности, нуждается в проверке применимость одномерных уравнений течения с однородным профилем скорости. С этой целью результаты расчетов сравниваются с периодическим по осевой координате решением трехмерных уравнений гидродинамики в струе [11]. В этой работе решалась задача о распаде бесконечного жидкого цилиндра, подвергнутого периодическому по осевой координате малому возмущению. Профиль скорости в начальный момент времени считался однородным. Эта задача лишь приближенно совпадает с задачей о вынужденном капиллярном распаде струи. Наиболее близким к ее решению является профиль струи, подвергнутый преобразованию Галилея, т.е. радиус струи в зависимости от времени t , отнесенный к точке с осевой координатой $v_{\infty}t$.

Различия между предлагаемыми профилями и графиками [11] представлены на рис. 2. Эти различия обусловлены всей совокупностью погрешностей предлагаемой теории плюс погрешности перехода от периодической по времени к периодической по пространственной координате задаче. Из рис. 2 видно, что все эти погрешности достаточно малы. Можно выделить три вида различий: асимметрия перетяжек графиков на рис. 2, полученных в предлагаемой работе, некоторая "грубоватость" этих графиков и различие в пропорциях утолщений и перетяжек. "Грубоватость" может объясняться погрешностью построения решения, в частности ограничением частотного спектра неизвестных функций, необходимым для численной устойчивости. Различия в пропорциях, скорее всего, связаны с погрешностью одномерных уравнений течения. Асимметрия перетяжек графиков представляет собой содержательный эффект и связана с неэквивалентностью пространственной и временной периодичности в задачах распада струи. Рис. 2 показывает, что эта асимметрия исчезает при увеличении числа Вебера. Этот результат естественен, поскольку при $We = \infty$ профиль струи с периодическим по времени возбуждением также периодичен по пространственной координате.

Рис. 3 позволяет сравнить предлагаемое решение с точным численным решением одномерных уравнений Cosserat в квазистационарной постановке [8]. Радиальная зависимость скорости не учитывалась. Видно

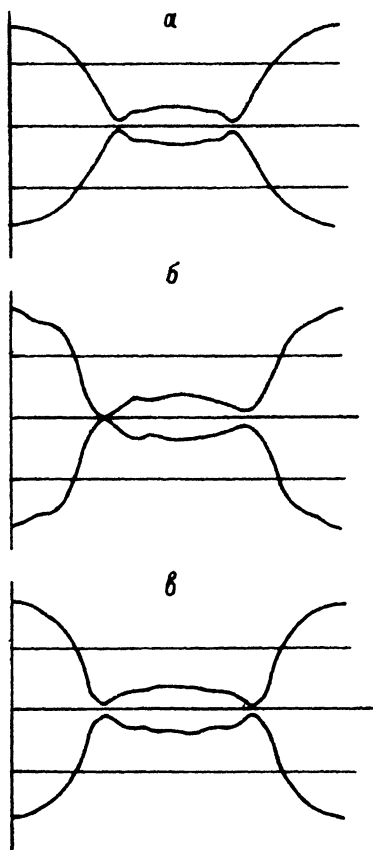


Рис. 2. Пространственно-периодическое решение, полученное в результате численного решения трехмерных уравнений гидродинамики [11], и предлагаемое решение, подвергнутое преобразованию Галилея. Параметры течения: $H = 0.11$, $Re = 1000$, безмерная амплитуда модуляций скорости равна 0.01; а — решение [11] для $We = 140$, б — предлагаемое решение для $We = 140$, в — предлагаемое решение для $We = 300$.

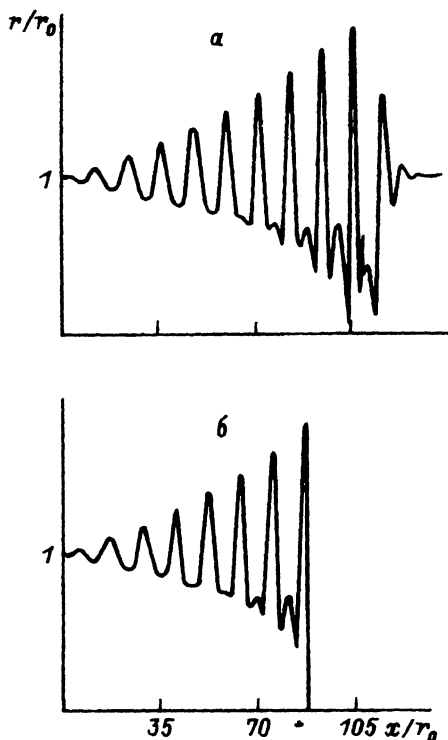


Рис. 3. Теоретические профили струи, рассчитанные без учета радиальной зависимости скорости. $We = 250$, $Re = 500$, $H = 0.084$, безразмерная амплитуда модуляций скорости равна 0.02; а — вычисления [8], б — предлагаемые расчеты.

хорошее совпадение результатов в области, где квазистационарное решение [8] близко к стационарному, т.е. не доходя 1-2 длины волны до точки распада.

Рис. 4,5 позволяют сравнить предлагаемые расчеты с теориями, основанными на методе двухмасштабных разложений. Легко видеть, что эти теории имеют значительную погрешность вблизи точки распада. Это естественно, поскольку частотный спектр функций, задающих эти профили, состоит всего из трех первых гармоник. В предлагаемых расчетах необходимое число гармоник контролировалось и оказалось порядка 10.

Рис. 4,5 показывают зависимость или независимость профиля струи вблизи точки распада от амплитуды модуляции скорости истечения. Согласно теориям [1,2], профиль струи и тип образующихся сателлитов из-

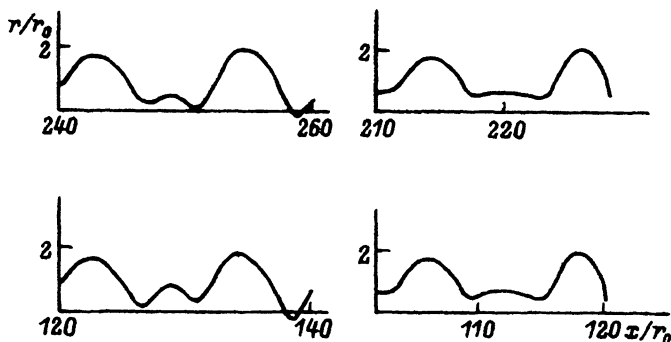


Рис. 4. Сравнение предлагаемых расчетов и теоретических профилей, полученных с помощью метода многих масштабов в работе [2].

Левая колонка — профили [2], правая — предлагаемая модель; $We = 250$, $Re = 2400$, $H = 0.084$, радиальная зависимость скорости не учитывалась.

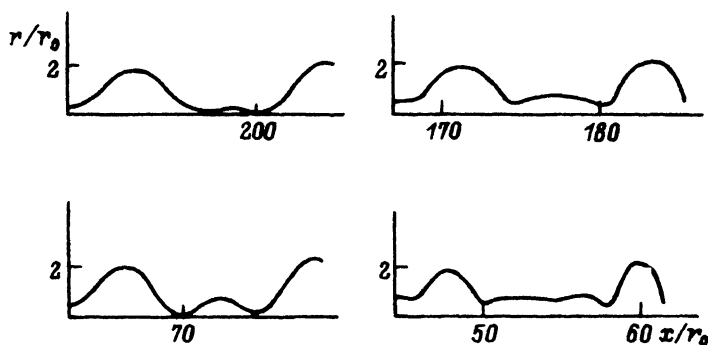


Рис. 5. Сравнение предлагаемых расчетов и теоретических профилей, полученных с помощью метода многих масштабов в работе [1].

Левая колонка — профили [1], правая — предлагаемая модель; $We = 500$, $Re = 5000$, $H = 0.083$, радиальная зависимость скорости не учитывалась.

меняются в зависимости от амплитуды модуляции скорости истечения. Короткие струи, отвечающие большой амплитуде, дают при распаде быстрые сателлиты, а длинные наоборот — медленные. Радиальная зависимость скорости истечения не учитывается. Предлагаемые расчеты не показывают этой зависимости для струй с однородным профилем скорости. Форма струи вблизи точки распада практически не зависит от амплитуды модуляции скорости истечения, пока эта амплитуда мала по сравнению с $1/\sqrt{We}$. Этот результат объясняется тем, что при малой амплитуде возбуждения на струе имеется участок, где возмущение течения можно считать малым. В этом случае, согласно [15], возмущение течения может быть представлено суперпозицией двух волн: экспоненциально растущей и убывающей с удалением от истока. Вблизи истока их амплитуды равны и имеют порядок величины амплитуды модуляции скорости истечения, умноженной на \sqrt{We} . При приближении к точке распада амплитуда растущей волны приближается к 1, в то время как амплитуда убывающей волны по порядку величины сравнима с квадратом амплитуды модуляции скорости истечения, умноженным на число Вебе-

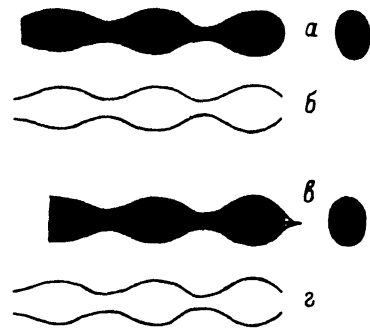


Рис. 6. Сравнение предлагаемых расчетов (белые) с экспериментами [3] (черные).

Использовалось сильное возбуждение на высокой, предельной для рэлеевского распада частоте. $We = 100$, $Re = 1000$, безразмерная амплитуда модуляций скорости равна 0.03; $a, б - H = 0.157$; $e_{1,2} - 0.162$.

ра. Если амплитуда модуляции достаточно мала, убывающая волна не влияет на распад струи. Форма струи и тип образующихся сателлитов в этом случае определяются нелинейной эволюцией профиля, характеризуемого одной единственной растущей волной. В этом случае изменение амплитуды возбуждения только смещает точку распада, не изменяя форму струи и, следовательно, типа сателлитов. Нижняя строка рис. 5 отвечает более сильному возбуждению, так что в этом случае профиль струи отличается от остальных, представленных на рис. 4,5.

Для комплексной проверки предлагаемой теории на рис. 6–8 представлены теоретические профили в сравнении с экспериментальными, полученными в работах [3,16]. Рис. 6 относится к случаю высокой частоты возбуждения, предельной для рэлеевского распада, когда дробление осуществляется в основном за счет относительно большой амплитуды модуляции скорости истечения. Рис. 7 отвечает относительно низкой частоте, характерной для струйных печатающих устройств. Профили струй в последовательные моменты времени позволяют сравнить теорию с экспериментом в динамике. Расчеты профилей рис. 6, 7 проведены без учета, а профили рис. 8 с учетом радиальной зависимости скорости. Толщина пограничного слоя, характеризующая радиальную зависимость скорости истечения, $d = 0.1r_0$ была угадана. Из рис. 7 и 8 видно, что расхождение теоретических и экспериментальных графиков существенно только на расстоянии от точки распада порядка долей длины волны. Эта погрешность связана, видимо, с неточностью одномерных уравнений, проявляющейся в непосредственной близости от точки распада.

Зависимость профиля струи от частоты возбуждения в случае однородного профиля скорости проиллюстрирована на рис. 9. Частота характеризуется отношением радиуса струи в истоке к длине волны $H = r_0/\lambda$. На профилях, отвечающих низким частотам с $H < 0.1$, можно видеть зарождение медленных сателлитов.

Исследование зависимости профиля струй с однородным профилем скорости истечения от чисел Рейнольдса и Вебера показало следующее. Пока эти числа велики, их значения существенны в основном для длины струи и слабо влияют на форму капель и сателлитов, образующихся при распаде. Чем больше число Рейнольдса и чем меньше число Вебера, тем быстрее развивается профиль струи.

Исследование влияния радиальной зависимости скорости на профиль струи проводилось для следующих значений параметров: $We = 140$; $Re = 530, 800$; $H = r_0/\lambda = 0.07$. Толщина пограничного слоя d , характеризующего профиль скорости истечения, менялась в пределах от 0 до $0.3r_0$,

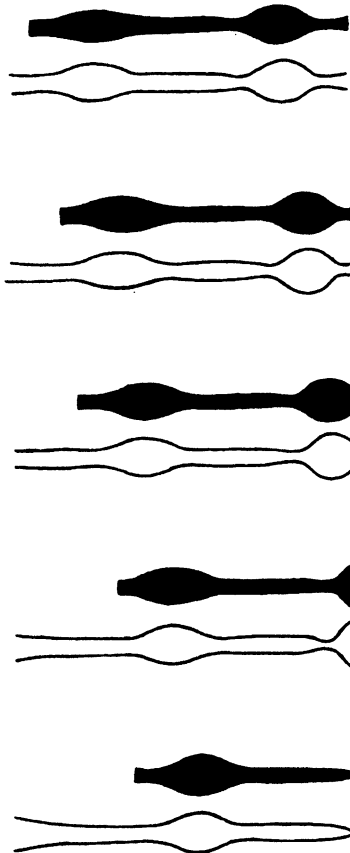


Рис. 7. Профили струи с параметрами $We = 98$, $Re = 2400$, $H = 0.08$ в последовательные моменты времени.

Черные профили получены экспериментально в работе [16], белые — на основании предлагаемых вычислений. Радиальная зависимость скорости не учитывалась.

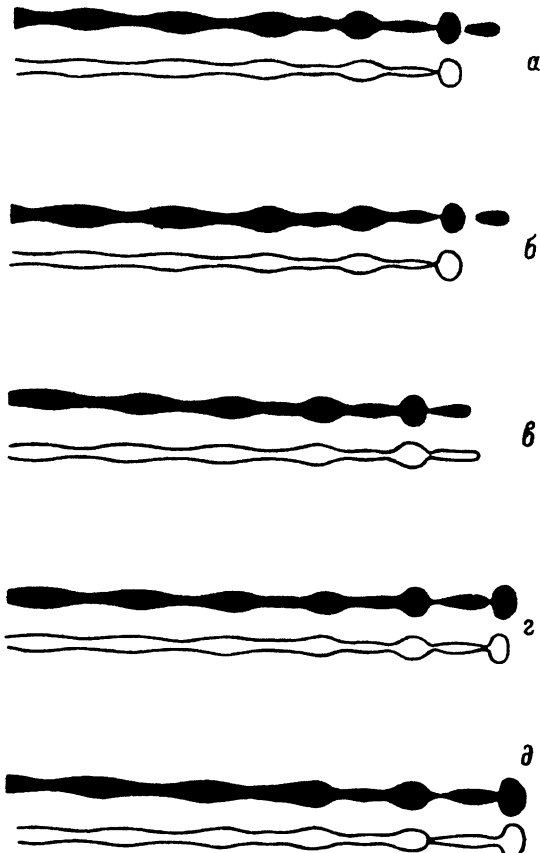


Рис. 8. Сравнение расчетных профилей (белые) с экспериментальными из работы [3] (черные).

$H = 0.069$, $We = 100$, $Re = 800$. Толщина пограничного слоя, характеризующего профиль скорости истечения, была подобрана и оказалась равной $0.1r_0$: $a - l/\lambda \cong 18$ (l — длина струи), $б - \cong 16$, $в - \cong 13$, $г - \cong 11$, $д - \cong 9$.

безразмерная амплитуда модуляции скорости истечения — от $2 \cdot 10^{-4}$ до $3 \cdot 10^{-2}$.

Рис. 10, 11 показывают зависимость профиля струи от толщины пограничного слоя и от амплитуды модуляции скорости истечения. Столбцы таблицы, представленной на рис. 10, отвечают значениям безразмерной амплитуды модуляции скорости соответственно 0.01, 0.003, 0.001 слева направо. Первая строка таблицы на рис. 10 соответствует струям с однородным распределением скорости истечения. Профили этих струй практически одинаковы, поскольку струи достаточно длинные (см. обсуждение рис. 4,5). Вторая и третья строки таблицы на рис. 10 отвечают струям с радиальной зависимостью скорости истечения, характеризующейся толщинами пограничного слоя, составляющими 0.1 и 0.2 радиуса. Для этих струй характерно появление утолщений “морковной” формы в

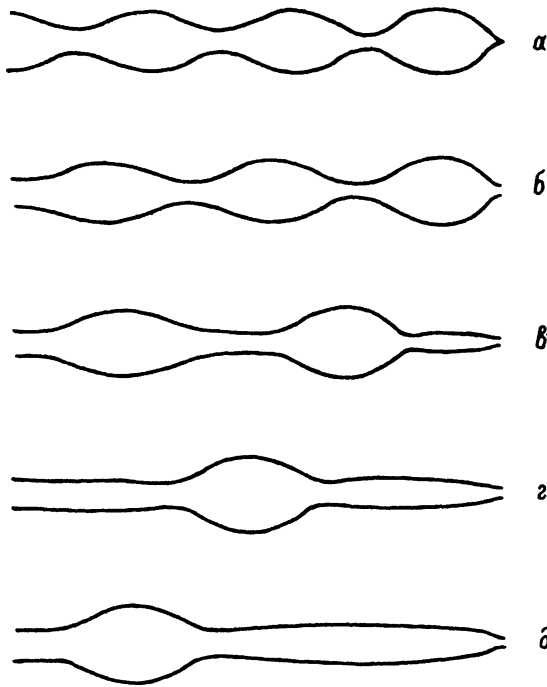


Рис. 9. Профили струй с параметрами $We = 140$, $Re = 1000$ и различными значениями частоты возбуждения, характеризуемой отношением H радиуса струи у истока к длине волны.
 H : а — 0.15, б — 0.13, в — 0.1, г — 0.07, д — 0.05;
 l/r_0 : а — 80, б — 162, в — 175, г — 215, д — 275;
 v_1/v_0 : а — 0.01; в-д — 0.001.

случае достаточно сильной модуляции скорости истечения. Последняя строка таблицы рис. 10 соответствует струям с радиальной зависимостью скорости истечения, имеющей пограничный слой толщиной 0.3 радиуса. В этом случае при большой амплитуде модуляции скорости исте-

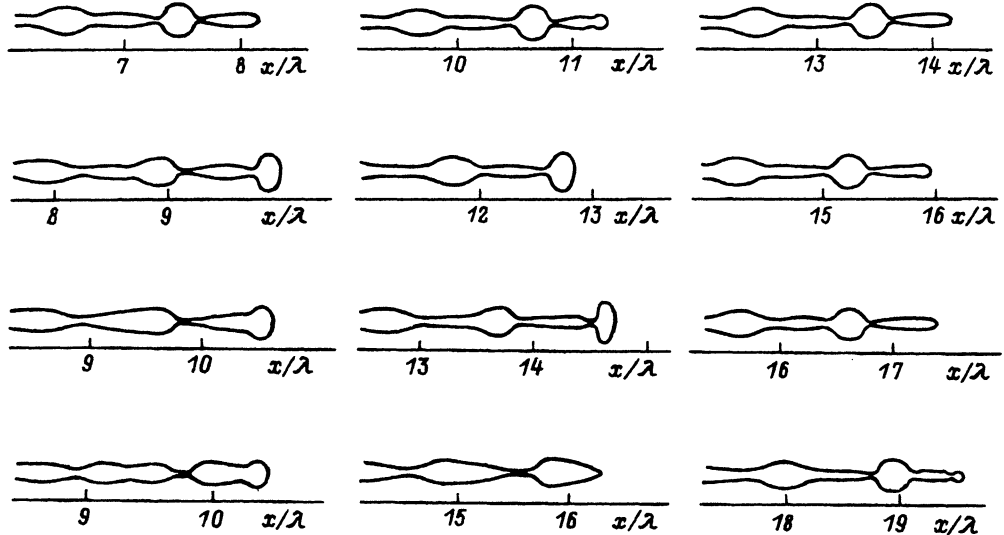


Рис. 10. Таблица профилей струй, отвечающих $We = 140$, $Re = 800$, $H = r_0/\lambda = 0.07$. Строки характеризуются значениями толщины пограничного слоя $d/r_0 = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ сверху вниз. Для каждого профиля указано расстояние от истока до точки распада, выраженное в длинах волн.

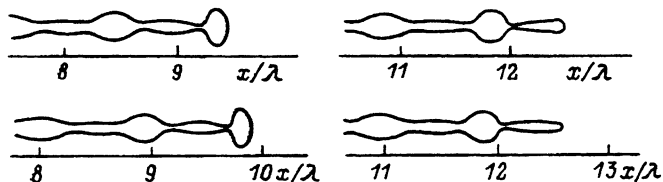


Рис. 11. Таблица профилей струй, отвечающих $We = 140$, $Re = 530$, $H = r_0/\lambda = 0.07$.

Строки характеризуются значениями толщины пограничного слоя $d/r_0 = 0.2, 0.3$ сверху вниз. Столбцы характеризуются значениями амплитуды модуляции скорости истечения. Безразмерная амплитуда модуляций скорости равна 0.01, 0.003 слева направо.

чения профиль струи приобретает совсем новую форму с преобладанием гармоники, кратной частоте возбуждения. В случае малой амплитуды возбуждения наблюдается “морковная” форма утолщений, направленных в этом случае “хвостом” вперед. В случае еще меньшей амплитуды возбуждения профиль струи также приобретает форму, характерную для струй без радиальной зависимости скорости (на рисунке не показано). На рис. 11 показана таблица профилей струй более вязкой жидкости, в остальном соответствующая таблице рис. 10. Первые две строки и последний столбец опущены, поскольку при большой вязкости они состоят из практически одинаковых профилей. Видно, что увеличение вязкости ослабляет влияние радиальной зависимости скорости на распад струи.

Для объяснения эффектов, связанных с радиальной зависимостью скорости, полезно проследить релаксацию профиля скорости. Зависимость, имеющая характер пограничного слоя вблизи истока, релаксирует за счет вязкости на участке струи длиной порядка $0.02 Re r_0$. В результате формируется плавный профиль скорости, мало отличающийся от однородного. Характерная длина релаксации этого профиля составляет $0.07 Re r_0$ для первой цилиндрической гармоники и $0.02 Re r_0$ для второй. При рассмотренных значениях параметров пограничный слой и вторая цилиндрическая гармоника существенны только на отрезке порядка $16 r_0$ у истока. Участок влияния первой цилиндрической гармоники порядка $56 r_0$.

Влияние радиальной зависимости скорости на распад струи осуществляется следующим образом. В результате релаксации профиля скорости происходит искажение модуляции скорости и радиуса струи. Радиальная зависимость скорости отражает относительное движение центральной части струи вперед и периферийной назад. Модуляция в периферийной части струи, повторяющая модуляцию в центральной части, смещается назад относительно нее по мере удаления от истока. В результате релаксации радиальной зависимости скорости происходит формирование нового закона модуляции; при этом модуляции центральной и периферийной частей струи складываются с весами, пропорциональными массам соответствующих частей. Такое сложение управляется законом сохранения импульса, выполняющимся приближенно в каждом сечении струи. Аналогично складываются и модуляции радиуса согласно уравнению неразрывности.

В случае плавного профиля, представленного первой цилиндрической гармоникой, в относительных движениях центральной части струи вперед и периферийной назад участвуют равные массы жидкости. При этом происходит сложение сдвинутых модуляций с равными весами. В слу-

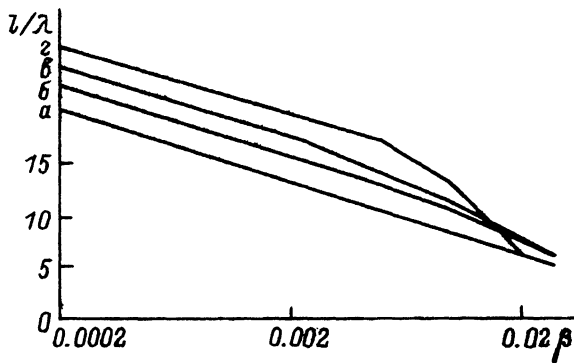


Рис. 12. Зависимость длины струи от логарифма амплитуды модуляции скорости истечения. $Re = 800$, $We = 140$, $H = 0.07$; a — однородный профиль скорости, $б$ — $d/r_0 = 0.1$, $в$ — 0.2 , $г$ — 0.3 .

чае не слишком большой амплитуды возбуждения складываются синусоидальные модуляции. Суммарная модуляция также синусоидальна, но ее амплитуда оказывается меньше, чем была бы при однородном профиле скорости. Уменьшение амплитуды происходит из-за сдвига фаз между отдельными слагаемыми, связанного с отставанием периферийного слоя. Это эффект “размешивания” модуляции, который увеличивает длину струи, практически не влияя на форму зародышей каплей. Из рис. 10, 11 видно, что этот эффект выражен тем сильнее, чем более развита радиальная зависимость скорости истечения и чем длиннее зона релаксации.

На рис. 12 показана зависимость длины струи от логарифма безразмерной амплитуды модуляции скорости истечения. Влияние радиальной зависимости скорости приводит к удлинению струи. Аналогичный эффект наблюдался в работе [17] на примере струи с паузейлевским профилем скорости. Линейность зависимости длины струи от логарифма амплитуды возбуждения характерна для рэлеевского распада. Параллельность графиков при малых амплитудах возбуждения отвечает тому, что при релаксации заданного профиля скорости происходит ослабление модуляции, эквивалентное умножению на множитель, меньший единицы и не зависящий от амплитуды модуляции. Это свойство вытекает из линейности уравнений для малых возмущений (модуляций) течения. Величина множителя определяется в основном вязкостью жидкости и профилем скорости истечения: чем толще пограничный слой, тем существеннее ослабление и длиннее струя. Эта закономерность нарушается в случае большой амплитуды возбуждения для струй с сильно развитым пограничным слоем. В этом случае наблюдается преобладание краткой частоты над основной и другие эффекты, сильно искажающие форму зародышей каплей (см. левый нижний график рис. 10).

Эти эффекты допускают следующее качественное объяснение. Толстый пограничный слой, представленный первой цилиндрической гармоникой, имеет протяженную зону релаксации. Величина отставания периферийной части струи относительно центральной может быть вычислена при помощи интегрирования экспоненциального закона релаксации. Эта величина составляет $0.07 Re \tau_0 \tilde{V}_1$, где \tilde{V}_1 — это скорость смещения периферии струи относительно центральной ее части в истоке, деленная на среднюю скорость. Отставание периферийной части струи может дости-

гать половины длины волны и более при

$$\operatorname{Re} H \tilde{V}_1 \gtrsim 7. \quad (20)$$

Развитие модуляций скорости течения и радиуса струи описывается нелинейными уравнениями даже в случае, если радиальная зависимость скорости не учитывается. Нелинейность становится существенной при достаточно большой амплитуде модуляции радиуса, т.е. на некотором расстоянии от истока. Вычисления показывают, что типичным проявлением этой нелинейности является трансформация синусоидальной модуляции в периодически следующие локализованные возмущения (рис. 3–5, 7). В случае, если учитывается радиальная зависимость скорости, аналогичные нелинейные искажения модуляции происходят как в центральном, так и в периферийном цилиндрических слоях жидкости. В некотором приближении их можно рассматривать независимо, поскольку вязкость жидкости мала ($\operatorname{Re} \gg 1$). Если модуляция скорости истечения достаточно сильна, то нелинейные искажения модуляции течения проявляются в зоне релаксации радиальной зависимости скорости. При релаксации происходит сложение таких модуляций, сдвинутых относительно друг друга за счет относительных смещений периферийного и центрального слоев жидкости. Если величина этого сдвига составляет половину периода, то в результате сложения получается модуляция с удвоенной частотой. В этом случае эффект “размешивания” не уменьшает амплитуду модуляции и, следовательно, не увеличивает длину струи, как это видно по правым концам графиков рис. 12.

Для уточнения условий такого нелинейного “размешивания” можно провести следующие оценки. Вычисления показывают (например, рис. 3), что модуляция становится не синусоидальной, когда безразмерная амплитуда модуляции радиуса достигает значения ≈ 0.1 . Из решения линеаризованных уравнений (см., например, Vogu (1978)) легко получить, что это значение достигается на удалении от истока порядка $0.03\lambda/\beta$, где β — безразмерная амплитуда модуляции скорости истечения. Эта формула применима, пока $0.2 < \approx \beta\sqrt{\operatorname{We}}$, что выполняется в области нелинейности графиков рис. 12. В этом случае условием несинусоидальности модуляций в области релаксации радиальной зависимости скорости является неравенство

$$\beta \operatorname{Re} H \gtrsim 0.4. \quad (21)$$

Таким образом, условиями нелинейного “размешивания”, влияющего на форму зародышей капель, являются неравенства (20), (21), хорошо описывающие область нелинейности графиков, представленных на рис. 12.

Радиальная зависимость скорости, имеющая вид тонкого пограничного слоя или представленная второй и высшими цилиндрическими гармониками, влияет преимущественно на форму зародышей капель. В зоне релаксации пограничного слоя модуляции центральной части струи и пограничного слоя складываются с весами, пропорциональными массам соответствующих частей. Вес модуляции пограничного слоя существенно меньше, поскольку слой тонкий. Модуляция пограничного слоя сдвинута в сторону истока вследствие отставания пограничного слоя от основной струи. Если в пределах зоны релаксации модуляции синусоидальны, то результирующая модуляция также синусоидальна. В этом случае изменения формы зародышей капель на струе не происходит.

При более сильном возбуждении струи модуляции оказываются не синусоидальными в пределах зоны релаксации. Характерной формой модуляций являются локализованные периодические возмущения, как это описано ранее. В этом случае сложение модуляций с неравными весами приводит к появлению "хвостов" за каждым возмущением течения основной струи, поскольку отстающая модуляция имеет меньший вес. Появление "хвостов" за возмущениями течения в конечном счете передается зародышам капель, придавая им характерную "морковную" форму. Условием появления "хвостов" является пересечение области несинусоидальности модуляции и области релаксации радиальной зависимости скорости. Как уже отмечалось, нелинейность модуляции проявляется на удалении от истока порядка $0.03\lambda/\beta$ (принято допущение $0.2 < \approx \beta\sqrt{We}$). Размер области релаксации тонкого пограничного слоя имеет порядок величины $0.02 Re \tau_0$. В этом случае условием появления "хвостов" у зародышей капель является неравенство

$$\beta Re H > \approx 1. \quad (22)$$

Условие (22) совпадает с условием появления зародышей капель "морковной" формы на рис. 10, 11. Это подтверждает приведенное объяснение влияния радиальной зависимости скорости на форму зародышей капель.

Выводы

Рассмотрен вынужденный капиллярный распад струи, характеризуемой значениями параметров $We \approx 100$, $Re \approx > 100$, $H = \tau_0/\lambda \approx 0.1$ и безразмерной амплитудой модуляции скорости, не превышающей $3 \cdot 10^{-2}$. Течение описано численным решением одномерных уравнений. Учитывалась радиальная зависимость скорости. В истоке эта зависимость имела характер пограничного слоя с толщиной $d < 0.3\tau_0$. Вычисления позволяют сделать следующие выводы.

В зоне применимости теорий [7,8], не доходящей примерно на длину волны до точки распада, предлагаемые расчеты согласуются с этими теориями. Получаемые профили струй, подвергнутые преобразованию Галилея, близки к профилям, полученным в работе [11] в случае пространственно-периодического возмущения струи.

Достигнуто удовлетворительное согласие предлагаемой теории с экспериментами [3,16] вплоть до точки распада.

Установлено, что если скорость истечения не зависит от радиальной координаты, а струя достаточно длинная (в нашем случае ≈ 5 длин волн и более), то форма зародышей капель на струе практически не зависит от амплитуды возбуждения. Также слабо зависит форма капель от числа Вебера при $We > 100$ и числа Рейнольдса при $Re > 50$. На низких частотах при $H = \tau_0/\lambda < 0.1$ в результате капиллярного распада таких струй образуются медленные сателлиты.

Радиальная зависимость скорости истечения существенно влияет на распад струи. Степень этого влияния определяется соотношением между длиной струи и длиной релаксации радиальной зависимости скорости: чем короче струя и меньше вязкость жидкости, тем сильнее влияние. Это соотношение определяется амплитудой возбуждения, а также числами

Рейнольдса и Вебера, которые в этом случае существенно влияют на профиль струи вблизи точки распада.

Неоднородность профиля скорости влияет на распад струи посредством двух основных эффектов. Первый из них — это “перемешивание”, уменьшающее эффективность возбуждения и, следовательно, удлиняющее струю. Эффект “перемешивания” выражен тем сильнее, чем сильнее развит пограничный слой. Другой эффект — “оттягивание хвостов” у зародышей капель проявляется только на достаточно коротких струях. Тип сателлитов в ряде случаев определяется в результате конкуренции между эффектом “оттягивания хвостов” и собственной тенденцией струи образовывать медленные сателлиты. Для коротких струй жидкостей с малой вязкостью пересиливает “оттягивание хвостов”, в остальных случаях — собственная тенденция струи.

Список литературы

- [1] *Pimbley W.T., Lee H.C.* // IBM J. Res. Develop. 1977. Vol. 21. N 1. P. 21–30.
- [2] *Bogy D.B.* // Phys. Fluids. 1979. Vol. 22. N 2. P. 224–230.
- [3] *Chaudhary K.C., Maxworthy T.* // J. Fluid Mech. 1980. Vol. 96. N 1. P. 275–286.
- [4] *McCormack P.D., Crane L., Birch S.* // Brit. J. Appl. Phys. 1965. Vol. 16. N 2. P. 395–408.
- [5] *Yuen M.C.* // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 33. N 1. P. 151–163.
- [6] *Nayfeh A.H.* // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. N 4. P. 841–847.
- [7] *Chaudhary K.C., Redekopp L.G.* // J. Fluid Mech. 1980. Vol. 96. N 1. P. 257–274.
- [8] *Bogy D.B., Shine S.J., Talke F.E.* // J. Comput. Phys. 1980. Vol. 38. N 3. P. 294–326.
- [9] *Torpey P.A.* // Phys. Fluids. 1989. Vol. A1. N 4. P. 661–671.
- [10] *Lee H.C.* // IBM J. Res. Develop. 1974. Vol. 18. N 4. P. 363–396.
- [11] *Shokoohi F., Elrod H.C.* // J. Comput. Phys. 1987. Vol. 71. N 3. P. 324–342.
- [12] *Sami S., Collier G., Eddingfield D.L.* // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1987. Vol. 60. N 2. P. 303–315.
- [13] *Green A.E.* // Int. J. Eng. Sci. 1976. Vol. 16. N 1. P. 49–63.
- [14] *Shield T.W., Bogy D.B., Talke F.E.* // J. Comput. Phys. 1986. Vol. 67. N 2. P. 322–347.
- [15] *Bogy D.B.* // J. Appl. Mech. 1978. Vol. 45. N 3. P. 469–474.
- [16] *Goedde E.F., Yuen M.C.* // J. Fluid Mech. 1970. Vol. 40. N 3. P. 495–511.
- [17] *Leib S.E., Goldstein M.E.* // Phys. Fluids. 1986. Vol. 29. N 4. P. 952–954.

С.-Петербургский институт
точной механики и оптики

Поступило в Редакцию
30 апреля 1992 г.
В окончательной редакции
28 сентября 1992 г.