

01;12

©1993 г.

К РАСЧЕТУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКА ПО ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКИХ ИДЕАЛЬНОПРОВОДЯЩИХ ЛИСТОВ С ОТВЕРСТИЯМИ И РАЗРЕЗАМИ

Г.А.Шнеерсон

Разрезы в плоских проводящих листах, необходимые для подвода тока к толстостенным соленоидам, могут существенно повлиять на распределение тока и на величину поля. Для тонких листов задача аналогична электростатической и может быть сведена к решению интегрального уравнения первого рода для индукции на оси щели.

Выполнены оценки влияния длинной эллиптической щели и щели постоянной ширины, используемых для подвода тока к соленоиду, на поле в нем. Для листов конечной толщины получено интегральное уравнение более общего вида, позволяющее учесть протекание тока как по границам разреза, так и по поверхности листа. Получены его приближенные решения для прямолинейной щели постоянной ширины и для концентратора магнитного потока, представляющего собой комбинацию круглого отверстия с прямолинейным и кольцевым разрезами.

Введение

Плоские листы с разрезами и отверстиями являются элементами многих устройств, используемых в импульсной и высокочастотной технике. В частности, при получении сильных импульсных магнитных полей находят широкое применение одновитковые соленоиды, толщина стенки которых много больше радиуса [1,2]. В простейшем случае такой соленоид представляет собой круглое отверстие в плоском листе, в котором имеется также радиальная щель (разрез) для подвода тока (рис. 1,а). Более сложной является конфигурация концентратора потока, в котором ток подводится к отверстию путем трансформаторной связи (рис. 1,б).

Если щель замкнута или является идеальной (имеет сколь угодно малую ширину h), а толщина бесконечного листа Δ равна нулю, то индукция магнитного поля в центре отверстия радиуса R , обтекаемого током i , есть

$$B_c = \frac{\mu_0 i}{\pi R}. \quad (1)$$

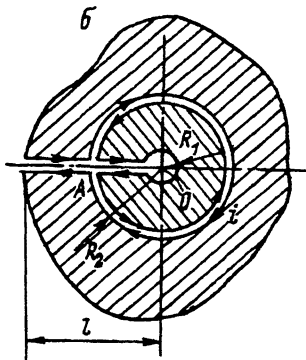
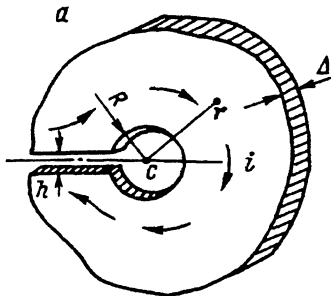


Рис. 1. Толстостенный соленоид (а) и поперечный разрез концентратора потока (б).

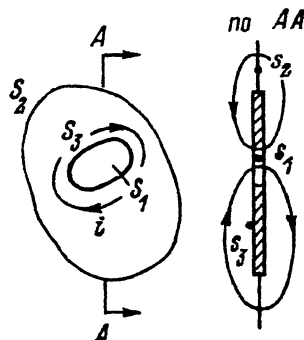


Рис. 2. Отверстие в листе исчезающе малой толщины.

В этом случае линии тока являются коаксиальными окружностями, а зависимость поверхностной плотности тока от радиуса имеет вид

$$j_{\varphi} = \frac{iR}{\pi r \sqrt{r^2 - R^2}}. \quad (2)$$

Радиальная щель конечной ширины существенно влияет на распределение тока по поверхности листа вследствие того, что линии тока не могут пересекать разрез. Его влияние проявляется в конечном счете в том, что поле в центре отверстия будет меньше, чем рассчитанное по формуле (1), соответствующая поправка будет зависеть от длины и ширины разреза, а также от толщины листа, если последняя отлична от нуля. Аналогичным является влияние щели на поле в концентраторе потока: индукция в центре снижается, если щель имеет конечную ширину. В некоторых работах дополнительные короткозамкнутые разрезы создаются целенаправленно для коррекции распределения тока [4].

Расчет растекания тока по листу с разрезом делает задачу трехмерной. В данной работе вначале рассмотрен предельный случай тонкого листа, когда задача аналогична электростатической: индукция в щели соответствует плотности заряда на тонком плоском проводнике. В случае эллиптической щели использованы готовые решения, а для длинной узкой щели задача сведена к решению приближенного интегрального уравнения, позволяющего найти индукцию на оси разреза. В случае листа конечной толщины также получено интегральное уравнение для индукции и дано его приближенное решение. Все расчеты выполнены для квазистационарного поля, т.е. принято, что размеры области много меньше длины электромагнитной волны.

Бесконечно тонкие листы (электростатическая аналогия)

Рассмотрим плоский идеально проводящий лист исчезающе малой толщины с отверстием произвольной формы, в котором задан магнитный поток (рис. 2). Поле создается лишь токами, обтекающими отверстие. Другие источники, возбуждающие поле, отсутствуют. Вследствие симметрии касательная составляющая индукции равна нулю в плоскости отверстия, а также за пределами листа ($B_{\tau}(s_{1,2}) = 0$), тогда как на

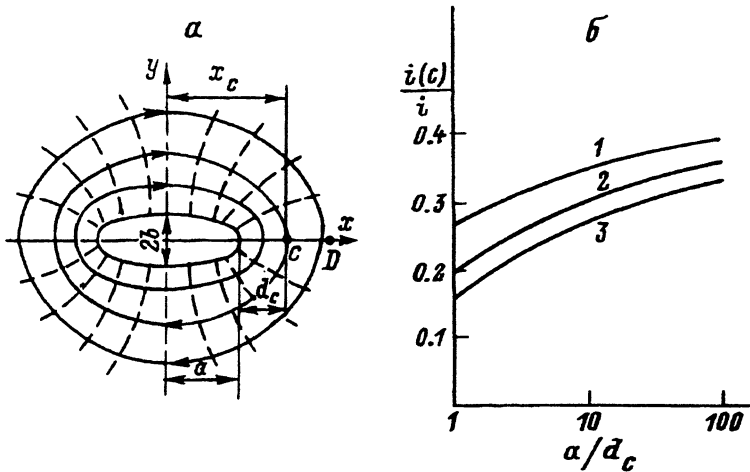


Рис. 3. Эллиптическое отверстие в тонком листе (а — линии тока вблизи отверстия; б — зависимости для тока на участке CD); 1 — $d_c/b = 2$, 2 — 4, 3 — 8.

поверхности листа отсутствует нормальная компонента $B_n(s_3) = 0$. Случай, когда отверстие является кругом, рассмотрен выше. Скалярный потенциал магнитного поля удовлетворяет уравнению Лапласа с граничными условиями $u(s_1) = U_1 = \text{const}$; $u(s_2) = U_2 = \text{const}$; $(\partial u / \partial n)_{s_3} = 0$ и дополнительному условию $U_1 - U_2 = i / (2\mu_0)$, где i — ток. Аналогичным граничным условиям удовлетворяет потенциал электростатического поля разноименно заряженных пластин, расположенных в одной плоскости и совпадающих с областями S_1 и S_2 . Индукция магнитного и напряженность электрического полей в рассматриваемых задачах пропорциональны, поэтому имеет место равенство

$$\frac{\int_1^2 \mathbf{B} dl}{\int_{S_1} B_n ds_1} = \frac{\int_1^2 \mathbf{E} dl}{\int_{S_1} E_n ds_1}. \quad (3)$$

Первое из этих отношений есть $i / (2\Phi) = 1 / (2L)$; второе $\epsilon_0(U_1 - U_2) / \int \sigma ds_1 = 2\epsilon_0 / c$, где L — индуктивность контура, образованного плос-

ким проводником S_3 с отверстием S_1 ; σ — плотность заряда на одной стороне пластины S_1 в электростатической задаче; C — емкость между пластинами S_1 и S_2 . Отсюда находим формулу, связывающую L и C ,

$$L = \frac{\mu_0 C}{4\epsilon_0}. \quad (4)$$

Используя справочные данные о емкостях плоских фигур, можно рассчитать индуктивности соответствующих контуров. Например, емкость тонкой эллиптической пластины, согласно [5], есть $C = 4\pi\epsilon_0 a / K(k)$, следовательно, индуктивность эллиптического отверстия в плоском бесконечном листе (рис. 3,а) есть

$$L = \frac{\mu_0 \pi a}{K(k)}, \quad (5)$$

где a — большая полуось, b — малая полуось эллипса, модуль эллиптического интеграла $k = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$.

В пределе узкой эллиптической щели, когда $a \gg b$, имеем

$$L \approx \frac{\mu_0 \pi a}{\ln \frac{4a}{b}}. \quad (6)$$

Последняя формула дает завышенное значение индуктивности, а относительная погрешность менее 3.8% при $a/b \geq 2$ [5].

Индукция изменяется в плоскости эллиптического отверстия так же, как плотность заряда на поверхности тонкой эллиптической пластины

$$B(x, y) = \frac{\Phi}{2\pi ab \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}}. \quad (7)$$

Характерно, что при фиксированном значении x индукция в поперечном направлении меняется так же, как плотность заряда на поверхности пластины неограниченной длины шириной $2\delta = 2b(1 - x^2/a^2)^{1/2}$,

$$B(x, y) = \frac{B(x, 0)}{\sqrt{1 - \left[\frac{y}{\delta(x)}\right]^2}}. \quad (8)$$

Линейная плотность потока в эллиптическом отверстии постоянна $d\Phi/dx = \Phi/(2a)$.

Линии постоянного скалярного потенциала (линии тока) на поверхности листа с эллиптическим отверстием представляют собой софокусные эллипсы с полуосями x_c и $y_c = (b^2 + x_c^2 - a^2)^{1/2}$. Линия тока определяется параметром x_c , т.е. координатой точки c , в которой эта линия пересекает ось абсцисс. Ток вне эллипса с полуосями x_c и y_c есть

$$i_c = \frac{iF\left(\arcsin \frac{a}{x_c}, \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)}{K\left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)}, \quad (9)$$

где F — эллиптический интеграл второго рода с аргументом $\arcsin(a/x_c)$ и модулем $(1 - b^2/a^2)^{1/2}$.

При фиксированном значении параметра a/x_c отношение i_c/i убывает при сужении эллипса. Чтобы это показать, воспользуемся асимптотическими выражениями для неполного и полного эллиптических интегралов в формуле (9) при $b \ll a$, в результате чего получаем

$$\frac{i(c)}{i} \approx \frac{1}{2} \frac{\ln \frac{x_c + a}{x_c - a}}{\ln \frac{4a}{b}}. \quad (10)$$

Это выражение справедливо, если a и x_c соизмеримы. В пределе, когда ширина щели (при фиксированной длине) становится исчезающе малой ($b \rightarrow 0$), ток i_c стремится к нулю: в этом предельном случае поток

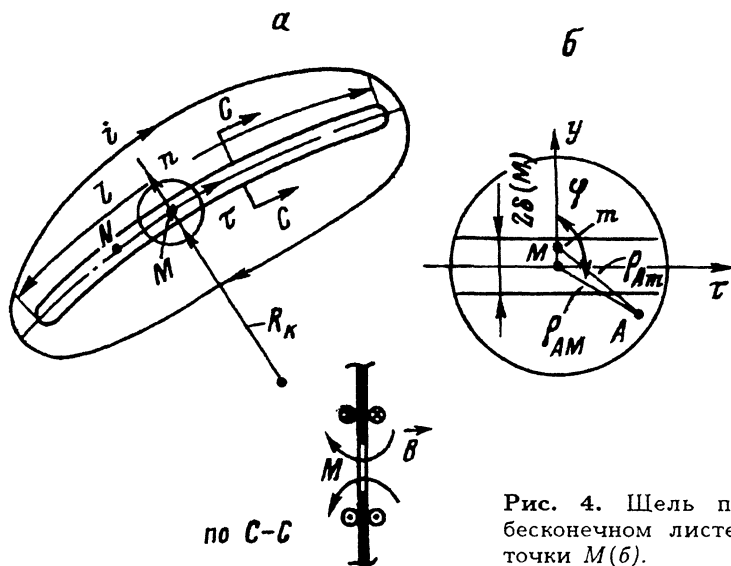


Рис. 4. Щель произвольной формы в бесконечном листе (а) и область вблизи точки М(б).

из щели исчезает, на поверхности листа отсутствует индуктированный ток. Следует заметить, что, как видно из формулы (10), снижение тока i_c при убывании b/a идет весьма медленно.

Рассмотрим далее, как меняется отношение i_c/i_0 при заданном расстоянии от края щели до линии тока ($x_c - a = d_c = \text{const}$) и при фиксированном значении малой полуоси эллипса, если длина щели растет. В этом случае вместо исследования асимптотического поведения функции F при $a/x_c \rightarrow \infty$ можно непосредственно рассчитать скалярный потенциал в точке c , считая, что по оси щели распределены линейные источники потока со свойственной эллиптической щели равномерной плотностью $\Phi/(2a)$

$$i(c) = \frac{2u(c)}{\mu_0} = \frac{2}{\mu_0} \int_{-a}^a \frac{\Phi}{2a} \frac{dx}{2\pi(a + d_c - x)} = \frac{\Phi}{2\pi\mu_0 a} \ln \frac{2a + d_c}{d_c}. \quad (11)$$

Выражая поток через индуктивность узкой щели (6) и ток, получаем

$$i(c) = i \frac{\ln \frac{2a + d_c}{d_c}}{2 \ln \frac{4a}{b}} = \frac{i}{2} \frac{\ln(\frac{2a}{d_c} + 1)}{\ln \frac{a}{d_c} + \ln \frac{4d_c}{b}}. \quad (12)$$

При заданном d_c/b отношение $i(c)/i$ стремится к $1/2$, если $a/d_c \rightarrow \infty$. Примеры зависимостей $i(c)/i = f(a/d_c, d_c/b)$ приведены на рис. 3, б.

Токораспределение в бесконечном тонком листе с длиной узкой щелью, отличной от эллиптической

Рассмотрим случай, когда длина щели и ее радиус кривизны много больше, чем ширина $h = 2\delta$, которая меняется плавно l , R_κ , $\delta/(d\delta/d\tau) \gg \delta$, где $d\tau$ — элемент длины осевой линии, проходящей а равном расстоянии

от краев щели (рис. 4). При указанных условиях распределение индукции поперек щели можно приближенно считать таким же, как в прямой щели бесконечной длины, когда поле является плоским¹

$$B(m) = B(M, y(m)) \approx \frac{B(M)}{\sqrt{1 - \left[\frac{y(m)}{\delta(M)}\right]^2}}. \quad (13)$$

В этой формуле M — точка на осевой линии; $B(M)$ — индукция в этой точке; $B(m)$ — индукция в точке m , смещенной от осевой линии по нормали на расстояние $y(m)$; $\delta(m)$ — полуширина щели в окрестности точки M . Скалярный потенциал в произвольной точке (рис. 4) можно выразить как сумму потенциалов, создаваемых источниками с интенсивностью $d\Phi(m) = B(m)dy(m)d\tau(M)$, распределенными по плоскости щели. Каждый из этих источников создает магнитное поле со скалярным потенциалом $du = d\Phi/(2\pi\rho_{Am})$, где ρ_{Am} — расстояние от источника до точки A . Потенциал в точке A есть

$$u(A) \approx \frac{1}{2\pi} \int_l \int_{-\delta(M)}^{\delta(M)} \frac{B(M)}{\sqrt{1 - \left(\frac{y(m)}{\delta(M)}\right)^2}} \frac{dy(m)d\tau(M)}{\rho_{Am}}, \quad (14)$$

где

$$\rho_{Am} = [\rho_{AM}^2 + y^2(m) - 2\rho_{AM}y(m)\cos\varphi]^{1/2}.$$

После интегрирования по переменной $y(m)$ получаем

$$u(A) = \frac{1}{\pi} \int_l B(M)T(M, A)d\tau(M), \quad (15)$$

где

$$T(M, A) = \frac{\delta(M)}{\sqrt{pq}} \mathbf{K} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\delta^2(M) - (p-q)^2}{pq}} \right),$$

$$p, q = [\rho_{AM}^2 \mp 2\delta(M)\rho_{AM}\cos\varphi + \delta^2(M)].$$

В точках A , находящихся на оси щели ($A = N$), потенциал принимает значение $u(N) = \mu_0 i/2$, а равенство (15) становится интегральным уравнением с ядром T

$$\frac{\pi\mu_0 i}{2} = \int_l B(M)T(M, N)d\tau(M). \quad (16)$$

¹ В эллиптическом отверстии, согласно (8), такое распределение индукции имеет место при любом отношении полуосей.

В частном случае прямолинейной щели длиной $l = 2a$ и шириной $2\delta \ll l$ имеем² $\cos \varphi = 0$, $p = q = (\rho^2 + \delta^2)^{1/2}$, $\rho = (x - x_1)$. Уравнение (16) в этом случае принимает вид

$$\frac{\pi \mu_0 i}{2} = \int_{-a}^a \frac{B(x_1, 0) \delta(x_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + \delta^2(x_1)}} \mathbf{K} \left(\frac{\delta(x_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + \delta^2(x_1)}} \right). \quad (17)$$

Полный эллиптический интеграл, фигурирующий в выражении для ядра интегральных уравнений (16), (17), имеет слабую (логарифмическую) особенность при $\rho = 0$ и становится равным $\pi/2$, когда $\rho \gg \delta$. Можно предположить, что в пределе $a \gg \delta$ допустима замена \mathbf{K} на $\pi/2$, в результате чего вместо (17) приходим к приближенному уравнению для прямолинейной щели

$$\mu_0 i = \int_a^a \frac{B(x_1, 0) \delta(x_1) dx_1}{\sqrt{\delta^2(x_1) + (x - x_1)^2}}. \quad (18)$$

Правильность этого предположения можно проверить в частном случае эллиптической щели, когда $B(x_1, 0) \delta(x_1) = \mu_0 i / [2\mathbf{K}(\sqrt{1 - b^2/a^2})]$. При этом правая часть уравнения (18) равна

$$\frac{\mu_0 i}{2\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \mathbf{K} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \approx \mu_0 i \frac{\ln \frac{2a}{b}}{\ln \frac{4a}{b}},$$

где сохранены главные члены разложения по параметру b/a .

В пределе $b/a \rightarrow 0$ равенство (18) выполняется с погрешностью порядка $\ln 2 / \ln(a/b)$. На основе сказанного будем далее использовать приближенное уравнение (18) для длинной прямолинейной щели ($l \gg h$).

Аналогичное упрощение (замена \mathbf{K} на $\pi/2$ в ядре уравнения (16)) можно использовать и для криволинейной щели, длина и радиус кривизны которой много больше ширины. Кроме того, множитель $(pq)^{-1/2}$ в ядре можно заменить на $(\rho^2 + \delta^2)^{-1/2}$. Действительно, произведение pq можно представить в виде $pq = (1 - \gamma)^{1/2} (\rho^2 + \delta^2)$, где число $\gamma = 4\rho^2 \delta^2 (\rho^2 + \delta^2)^{1/2} \cos^2 \varphi$. В частном случае, когда щель есть дуга окружности радиуса R_k , γ не превосходит $(\delta/R_k)^2$. Эта же оценка относится и к щели произвольной формы, если R_k — радиус кривизны осевой линии. Таким образом, при условии $\delta/R_k \ll 1$ приходим вместо (16) к следующему приближенному интегральному уравнению для одиночной щели произвольной формы:

$$\mu_0 i = \int_l \frac{B(M) \delta(M) d\tau(M)}{\sqrt{\rho_{MN}^2 + \delta^2(M)}}. \quad (19)$$

² Далее обозначено $\rho_{MN} = \rho$, $x = x(N)$, $x_1 = x(M)$.

Введем вместо произведения $B\delta$ поток на единицу длины $\Phi' = \pi B(M)\delta(M)$. Тогда (19) переходит в уравнение для Φ'

$$\mu_0 i = \frac{1}{\pi} \int_l \frac{\Phi'(M) d\tau(M)}{\sqrt{\rho_{MN}^2 + \delta^2(M)}}. \quad (20)$$

Аналогичные преобразования приводят к следующему выражению для потенциала в произвольной точке Q на плоскости листа:

$$u(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_l \frac{\Phi'(M) d\tau(M)}{\sqrt{\rho_{MQ}^2 + \delta^2(M)}}. \quad (21)$$

Для приближенных расчетов можно пользоваться методом средних потенциалов, широко применимым как в электростатике [5], так и при расчетах индуктивности.

При таком расчете следует в случае щели постоянной шириной $h = 2\delta$ принять $B(M) = \Phi' / (\pi\delta l)$ и в выражение для индуктивности $L = \Phi / i$ вместо тока подставить величину $2\langle u \rangle / \mu_0$, где усредненное значение потенциала

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2\pi l} \int_l \int_l \frac{\Phi'(M) d\tau(M) d\tau(Q)}{\sqrt{\rho_{MQ}^2 + \delta^2}} = \frac{\Phi'}{2\pi l} \int_l \int_l \frac{d\tau(M) d\tau(Q)}{\sqrt{\rho_{MQ}^2 + \delta^2}}.$$

В итоге имеем

$$L \approx \frac{\mu_0 l \Phi'}{2\langle u \rangle} = \frac{\mu_0 \pi l^2}{\int_l \int_l \frac{d\tau(M) d\tau(Q)}{\sqrt{\rho_{MQ}^2 + \delta^2}}}. \quad (22)$$

Можно показать, что полученное выражение связано простым соотношением с взаимной индуктивностью двух параллельных токовых нитей длиной l , расстояние между которыми равно δ [6]

$$L = \frac{\mu_0^2 l^2}{4M}, \quad (23)$$

где M — упомянутая взаимная индуктивность.

В частности, для прямолинейной щели длиной a и шириной 2δ , используя значение M из справочника [6], получаем

$$L = \frac{\mu_0 \pi a}{\ln \frac{4a}{\delta} - 1} = \frac{\mu_0 \pi a}{\ln \frac{1.46a}{\delta}}. \quad (24)$$

Численные расчеты [5] дают результат

$$L = \frac{\mu_0 \pi a}{\ln \frac{2.4a}{\delta}}, \quad (25)$$

который мало отличается от (24), если $a \gg \delta$.

Влияние длинной изоляционной щели в тонком листе на поле в соленоиде

При получении сильного импульсного магнитного поля в соленоидах с большим отношением внешнего радиуса к внутреннему длина изоляционной щели, по которой проводится ток, может намного превышать диаметр соленоида. Влияние щели на поле в таком соленоиде может быть существенным вследствие перераспределения тока по поверхности торца. Этот эффект наиболее заметен у соленоидов малой длины (отверстие в тонком листе). В качестве модельной задачи, позволяющей показать влияние длинной щели на поле в отверстии и допускающей аналитическое решение, рассматриваем поле в системе (рис. 5, а), в которой ток подводится к соленоиду радиуса R с помощью разреза, имеющего три участка: на участке np разрез имеет форму эллипса длиной $2a$ с малой полуосью $b \ll a$, а на участках tn и pq щель является идеальной (ее ширина равна нулю).³ Примем дополнительное условие $R \ll d_c$, позволяющее принять значение скалярного потенциала в плоскости отверстия таким же, как в точке c (центре отверстия) при свободном растекании тока по листу вне эллипса. Пусть индукция в центре отверстия есть B_c . Ей соответствует ток вблизи отверстия определяемый по формуле (1), $i_0 = \pi R B_c / \mu_0$. Ток, пересекающий прямую CD , равен полному току i и при условии $d_c \gg R$ может быть приближенно представлен как сумма i_0 и i_c , наведенного полем щели. Последний определяется формулой (10), где $x_c + a = 2a + d_c$, $x_c - a = d_c$. Таким образом,

$$i = i_0 + i_c = \pi R B_c / \mu_0 + i \frac{\ln \frac{2a+d_c}{d_c}}{2 \ln \frac{4a}{b}}. \quad (26)$$

Отсюда

$$B_c = \frac{\mu_0 i}{\pi R} \left(1 - \frac{\ln \frac{2a+d_c}{d_c}}{2 \ln \frac{4a}{b}} \right). \quad (27)$$

Второе слагаемое учитывает влияние эллиптической щели на индукцию. В пределе $a \gg d_c$ и при фиксированном отношении d_c/b индукция

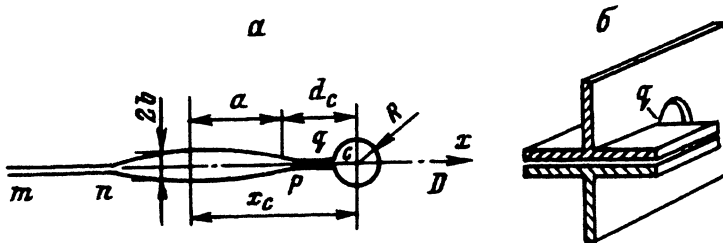


Рис. 5. Влияние щели на поле в соленоиде.

a — геометрия проводников на участке, где щель близка к идеальной.

³ Практически щель является идеальной, т.е. не оказывает влияния на токораспределение по поверхности листа не только при нулевой ширине, но и при использовании в качестве токоведущих частей плоских шин, как это показано на рис.5,б

уменьшается вдвое по сравнению со случаем, когда для подвода тока к нагрузке используется идеальная щель.

Оценку влияния прямолинейной щели длиной $2a$ постоянной ширины 2δ на поле в центре отверстия, соединенного со щелью, можно получать, используя аналогичный подход и считая поток на единицу длины щели постоянным. Расчет будет отличаться лишь тем, что в формуле (11) для i_c надо использовать для потока выражение $\Phi = Li$, где L определяется формулой (25). В результате получаем выражение, близкое к (27),

$$B_c \approx \frac{\mu_0 i}{\pi R} \left[1 - \frac{\ln \frac{2a+d_c}{d_c}}{2 \ln \left(\frac{2.4a}{\delta} \right)} \right]. \quad (28)$$

Лист конечной толщины

Влияние изоляционной щели на поле в соленоиде уменьшается, если толщина листа Δ , равная длине соленоида, отлична от нуля (рис. 6). Ток, подводимый к соленоиду, проходит как по плоскостям торцов, так и по границам щели. В предельном случае, когда ширина разреза 2δ исчезающе мала, поле за его пределами быстро убывает, тогда можно считать, что ток на плоскости пренебрежимо мал. Рассмотрим влияние конечной ширины разреза при условии, что она много меньше его длины. Скалярный потенциал в точке M на плоскости симметрии F , параллельной поверхности листа, принимает постоянное значение $u(M) = \mu_0 i/2$, где i — полный ток. На границах щели (участки mn и $m'n'$ на рис. 6) и на плоскости листа $\partial u/\partial n = 0$.

Хотя распределение индукции вдоль оси y , лежащей в плоскости листа на краю щели (рис. 6, б), отлично от (13), можно и в рассматриваемом

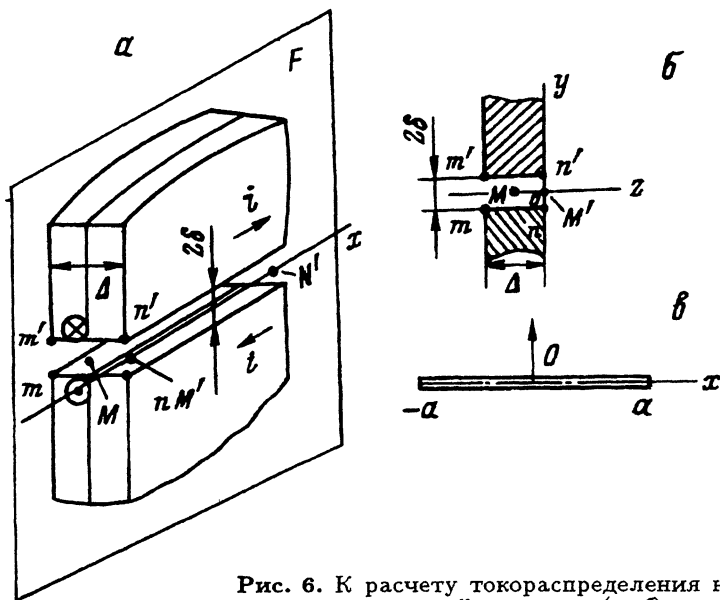


Рис. 6. К расчету токораспределения на поверхности листа конечной толщины (а, б) и влияние щели длиной l на поле соленоида (в).

случае использовать приближенное выражение (21) для потенциала. Надо лишь заменить в нем точку M на M' , лежащую на пересечении двух поверхностей, первая из которых совпадает с поверхностью листа, а вторая проходит на равных расстояниях от границ щели. Покажем, что в случае $\Delta \neq 0$ применима формула (21) и выражение для магнитного скалярного потенциала в точке N' (рис. 6) имеет вид

$$u(N') \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta(M')}^{\delta(M')} \int \frac{B(x_1, y) dy dx_1}{\sqrt{y^2 + (x - x_1)^2}}, \quad (29)$$

где $x = x(N')$, $x_1 = x(M')$.

Это можно сделать, не конкретизируя вид зависимости $B(x_1, y)$, которая для щели в листе конечной толщины остается четной функцией аргумента y и не меняет свой знак. Ограничимся случаем прямой узкой щели с $\delta = \text{const}$. Представим $u(N')$ в виде $u(N') = u_0(N') + \Delta u(N')$, где

$$u_0(N') = u_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\Phi'(x_1) dx_1}{\sqrt{\delta^2 + (x - x_1)^2}}, \quad (30)$$

$$\Delta u(N') = \Delta u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{B(x_1, y)}{\sqrt{y^2 + (x - x_1)^2}} - \frac{\Phi'(x_1)}{2\delta \sqrt{\delta^2 + (x - x_1)^2}} \right) dy dx_1. \quad (31)$$

Далее преобразуем подынтегральное выражение в формуле (31)

$$\begin{aligned} & \int_{\delta}^{\delta} \left(\frac{B(x_1, y)}{\sqrt{y^2 + (x - x_1)^2}} - \frac{\Phi'(x_1)}{2\delta \sqrt{\delta^2 + (x - x_1)^2}} \right) dy = \\ & = \int_{-\delta}^{\delta} B(x_1, y) \times \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + (x - x_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + (x - x_1)^2}} \right) dy - \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + (x - x_1)^2}} \times \\ & \quad \times \int_{-\delta}^{\delta} \left[B(x_1, y) - \frac{\Phi'(x_1)}{2\delta} \right] dy. \quad (32) \end{aligned}$$

Последний интеграл (32) равен нулю, а для оценки оставшегося интеграла воспользуемся теоремой о среднем

$$\begin{aligned} & \int_{-\delta}^{\delta} B(x_1, y) \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + (x - x_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + (x - x_1)^2}} \right) dy = \\ & = 2B(x_1, c\delta) \times \int_0^{\delta} \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + (x - x_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + (x - x_1)^2}} \right) dy = \end{aligned}$$

$$= \frac{\theta\Phi'(x_1)}{\delta} \left[\ln \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 + (x - x_1)^2}}{\delta} - \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + (x - x_1)^2}} \right], \quad (33)$$

где $0 < c < 1$, а число $\theta = 2\delta B(x_1, c\delta)/\Phi'(x_1)$ порядка единицы.

Магнитное поле относительно мало меняется по длине щели в листе конечной толщины. Поэтому для оценки можно принять $\Phi'(x_1) \approx \approx \Phi' = \text{const}$. При этом

$$\Delta u(x) \approx \frac{\theta\Phi'}{2\pi\delta} \int_{-a}^a \left[\ln \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 + (x - x_1)^2}}{\delta} - \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + (x - x_1)^2}} \right] dx_1 \lesssim \frac{\theta\Phi'}{\pi}. \quad (34)$$

Здесь использовано завышенное значение интеграла (34), равное 2δ . Оно соответствует пределам $\pm\infty$. Оценку для $u_0(M)$ можно получить, также принимая $\Phi'(x_1) \approx \Phi'$,

$$u_0(x) \approx \frac{\Phi'}{2\pi} \ln \frac{a - x + \sqrt{\delta^2 + (a - x)^2}}{-a - x + \sqrt{\delta^2 + (a + x)^2}} \gtrsim \frac{\Phi'}{2\pi} \ln \frac{4a}{\delta}. \quad (35)$$

Таким образом, как и в приведенном выше примере для тонкого листа с эллиптической щелью, отношение $\Delta u/u_0$ имеет порядок $[A \ln(\varphi a/\delta)]^{-1}$, где A и φ — числа порядка единицы. Следовательно, для приближенного расчета скалярного магнитного потенциала в точке M' на краю щели можно сохранить лишь член $u_0(x)$, определяемый по формуле (30). Естественно обобщить этот вывод на случай щели с криволинейной осевой линией, если ее радиус кривизны много больше δ ,

$$u(N') \approx \frac{1}{2\pi} \int_l \frac{\Phi'(M') d\tau(M')}{\sqrt{\rho_{M'N'}^2 + \delta^2}}. \quad (36)$$

При произвольном отношении δ/Δ имеем (рис. 6,б),

$$\Phi'(M') = 2\delta\beta B(M), \quad (37)$$

$$u(N') \approx u(N) - \int_N^{N'} B_z dz = \frac{\mu_0 i}{2} - \frac{\alpha\Delta B(N)}{2}, \quad (38)$$

где численные множители β и α являются функциями отношения δ/Δ и могут быть найдены путем расчета плоского поля в щели методом конформных отображений.

В пределе $\delta/\Delta \gg 1$ имеем $\beta = \pi/2$, $\alpha = 0$, а в пределе $\delta/\Delta \ll 1$ $\alpha = \beta = 1$. Подставляя (36) и (37) в формулу (38), приходим к интегральному уравнению второго рода для индукции

$$\frac{2}{\pi} \int_l \frac{\delta(M)B(M)\beta(M)d\tau(M)}{\sqrt{\rho^2 + \delta^2(M)}} = \mu_0 i - \alpha(N)\Delta B(N), \quad (39)$$

где $\rho = \rho_{M'N'}$.

Интегральное уравнение (39) допускает решение методом последовательных приближений, причем разложение быстро сходится, если толщина листа велика. В первом приближении можно пренебречь полем вне щели, тогда $B(N) = B_1(N) = \mu_0 i / [\Delta \alpha(N)]$. Во втором приближении находим

$$B_2(N) = B_1(N) - \frac{2}{\pi \Delta \alpha(N)} \int_l \frac{\delta(M) \beta(M) B_1(M) d\tau(M)}{\sqrt{\rho^2 + \delta^2(M)}}. \quad (40)$$

Воспользуемся этим методом для приближенного расчета распределения поля в прямой узкой щели ($l \gg 2\delta$, $\delta = \text{const}$) (рис.6, е). Поскольку при $\Delta \gg 2\delta$ имеем $\alpha = 1$, то в первом приближении $B(x) = B_1 = \mu_0 i / \Delta$. Далее находим второе приближение, считая $\beta = 1$,

$$B_2(x) = B_1 - \frac{2\delta B_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{dx_1}{\sqrt{\delta^2 + (x - x_1)^2}} = \frac{\mu_0 i}{\Delta} \left(1 - \frac{2\delta}{\pi} \ln \frac{\sqrt{\delta^2 + (a - x)^2} + a - x}{\sqrt{\delta^2 + (a + x)^2} - a - x} \right). \quad (41)$$

В начале и конце щели индукция принимает значение⁴

$$B_2(\pm a) \approx \frac{\mu_0 i}{\Delta} \left(1 - \frac{2\delta}{\Delta} \ln \frac{4a}{\delta} \right). \quad (42)$$

Если $\delta/\Delta = 0.05$, $2a/\Delta = 20$, то индукция на концах примерно на 12% меньше, чем в случае щели исчезающе малой ширины. Это же формула дает приближенное значение индукции в соленоиде, присоединенном к краю щели, если радиус соленоида меньше толщины листа Δ .

Аналогичная оценка может быть выполнена и для поля, создаваемого в концентраторе магнитного потока (рис. 1, б). Примем, что радиус отверстия R_1 мал по сравнению с толщиной листа Δ , так что поле в отверстии близко к однородному. Индукция на оси в первом приближении не отличается от $B_1 = \mu_0 i / \Delta$, а во втором может быть рассчитана по формуле (40), где $\alpha = \beta = 1$, $\delta = \text{const}$, а интегрирование следует распространить на всю щель, включающую в себя прямолинейный участок длиной AO и окружность радиуса R_2 . Интеграл по прямому участку $l = 2a$ уже вычислен в предыдущем примере. Интеграл по окружности, радиус которой $R_2 \gg \delta$, дает вклад в $B_2(0)$, не зависящий от R_2 и равный $(-4/\Delta)B_1$. В результате получаем

$$B_2(0) = \frac{\mu_0 i}{\Delta} \left(1 - \frac{2\delta}{\pi \Delta} \ln \frac{2l}{\delta} - \frac{4\delta}{\Delta} \right). \quad (43)$$

При тех же соотношениях размеров, что и в предыдущем примере, кольцевая щель приводит к дополнительному снижению индукции на 20% вследствие перехода на поверхность листа значительно большего тока, чем в примере, где кольцевой разрез отсутствовал.

⁴ В (41) отброшены члены порядка $\delta^2/(2a\Delta)$.

Список литературы

- [1] Дашук П.Н., Зайенц С.Л., Комельков В.С. и др. Техника больших импульсных токов и магнитных полей. М.: Атомиздат, 1970.
- [2] Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972.
- [3] Шнейерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. Л.: Энергоиздат, 1981.
- [4] Miura N., Kido G., Goto T. et al. // Ultrahigh Magnetic Fields (Physics. Techniques. Applications) / Ed. V.M.Titov, G.A.Shvetsov. M., 1984. P. 116-129.
- [5] Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г. Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981.
- [6] Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей. Справочная книга. Л.: Энергия, 1970.

Санкт-Петербургский государственный
технический университет

Поступило в Редакцию
10 февраля 1992 г.