

01:07  
©1993 г.

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ РЕШЕТКИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СУБГАРМОНИКИ В ФОТОРЕФРАКТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ. ТЕОРИЯ

*О.П.Нестеркин, Е.П.Шершаков*

Теоретически исследована неустойчивость решетки пространственной субгармоники при записи голограммы в фоторефрактивном кристалле. Показано, что неустойчивость существует, если дрейфовая длина электронов превышает период основной решетки. Рассмотрены случаи внешнего постоянного и переменного поля. Исследовано влияние диффузии и насыщения.

### Введение

Эксперименты по волновому смещению в фоторефрактивных кристаллах привели к наблюдению ряда интересных явлений [1]. На сегодняшний день среди них особое место занимает генерация пространственной субгармоники, о которой сообщалось в работах [2-5].

Пусть кристалл освещается интерференционной картиной с пространственной частотой  $q$  (рис. 1,а). Если в результате приложения внешнего поля появилась решетка субгармоники с пространственной частотой  $q/n$  ( $n$  — целое число), то мы сталкиваемся со случаем, когда симметрия отклика ниже, чем симметрия внешнего воздействия. Процесс развития решетки субгармоники сопровождается уменьшением системы. Такие процессы самоорганизации являются результатом неустойчивости неравновесной термодинамической системы [6]. Для объяснения наблюдаемых экспериментальных данных по наблюдению генера и субгармоники были предложены две теоретические модели неустойчивости.

Первый вид неустойчивости является конвективным. Эта неустойчивость является результатом трехволнового взаимодействия двух сильных волн накачки и слабой шумовой затравки, которая соответствует направлению конкретной субгармоники [7,8]. Для кубических кристаллов причиной волнового усиления является наличие малого вектора расстройкой  $\Delta q$  (рис. 1,б) от брэгговского условия. В однородных кристаллах [9] усиление происходит благодаря анизотропному характеру брэгговской дифракции.

Мы остановимся на рассмотрении неустойчивости в кубических кристаллах. Экспериментально было показано [10,11], что для неустойчивости конвективного типа существует узкий, но конечный непрерывный

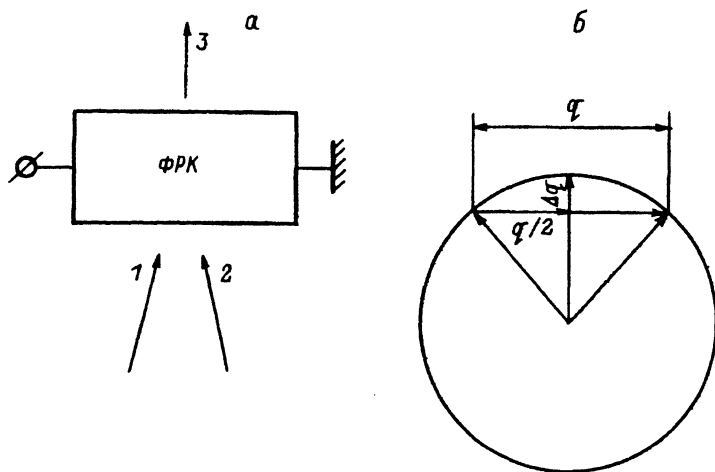


Рис. 1.

*a* — схема засветки фоторефрактивного кристалла (ФРК): 1,2 — волны, дающие интерференционную картину основной частоты; 3 — волна, результирующая от дифракции на решетке субгармоники пространственной частоты  $q/2$ ; *b* — расположение волновых векторов лучей и решеток.

спектр углов около  $\varphi = 0$  (рис. 1, *b*). В эксперименте [12] генерация луча в направлении, соответствующем субгармонике с волновым вектором  $q/2$ , наблюдалась наряду с волной, направленной вдоль оси резонатора. Математически конвективный тип неустойчивости описывается волновыми уравнениями.

Другая неустойчивость является неустойчивостью абсолютного типа и обусловлена параметрическим возбуждением волны перезарядки ловушек (ВПЛ) [13–16]. Такая волна перезарядки имеет место в кристаллах при приложении внешнего поля  $E_0$ , если дрейфовая длина  $l_E = E_0 \mu \tau$  превышает период решетки  $\Lambda/2\pi$ . Здесь  $\mu \tau$  — подвижность, умноженная на время жизни электрона в зоне проводимости. Аналитическое описание абсолютной неустойчивости основывается на решении материальных уравнений [17–21]. Как мы предполагаем, неустойчивости обоих типов играют существенную роль в появлении генерации пространственной субгармоники.

В этой работе мы теоретически исследуем абсолютную параметрическую неустойчивость пространственной решетки субгармоники, имеющую место в кристаллах с большой дрейфовой длиной во внешнем приложенном поле. Мы исследуем два случая: 1) к кристаллу приложено постоянное поле и один из пучков, образующих основную интерференционную картину, промодулирован по фазе, так что интерференционная картина медленно движется; 2) переменное поле меандровой формы приложено к кристаллу и один из пучков имеет прямоугольную фазовую модуляцию, так что интерференционная картина прыгает между крайними положениями синхронно с внешним полем. Мы ограничимся вырожденным случаем, когда возбуждается только субгармоническая решетка с пространственной частотой  $q/2$  при освещении интерференционной картиной основной частоты  $q$ . Цель работы заключается в нахождении области физических параметров, при которых существует неустойчивость абсолютного типа.

Как упоминалось выше, одной из причин генерации субгармоники является параметрическая неустойчивость, обусловленная возбуждением волны перезарядки ловушек (ВПЛ). Особенность записи решетки при условии больших дрейфовых длин используется для увеличения записи голограммы [22,23].

Первая методика заключается в том, что к кристаллу прикладывается постоянное внешнее поле и он освещается медленно движущейся интерференционной картиной

$$I = I_0 + I \exp\{i(qx - \omega t)\}. \quad (1)$$

Здесь  $I_0$  — средняя интенсивность,  $|I| \leq I_0$ . Решетка поля пространственного заряда записывается наиболее эффективно, если скорость движения интерференционной картины совпадает с резонансной скоростью, определяемой внешним полем [19–21]. Фазовый портрет такой методики представлен на рис. 2,а.

При точном резонансе, когда скорость движения интерференционной картины совпадает с величиной  $v_r = \omega_0/q$ , движущаяся решетка (точка А на рис. 2,а) сдвинута на  $\pi/2$  по отношению к движущейся интерференционной картине (точка В на рис. 2,а). Это позволяет организовать эффективное взаимодействие между пучками [21,22].

Вторая методика основывается на остановке голограммы во внешнем переменном поле при засветке статической интерференционной картиной [22,24]. Частота внешнего переменного поля  $\Omega$  должна намного превышать резонансную частоту  $\omega_0$ , про которую говорилось выше [22]. Фазовый портрет такой методики показан на рис. 2,б. Можно видеть, что и в этом случае статическая голограмма смещена по отношению к интерференционной картине на  $\pi/2$ . Это приводит к эффективному энергообмену в двухволновом взаимодействии.

Обратите внимание на то, что смена знака внешнего постоянного поля приводит к изменению двух характеристик процесса: 1) положение равновесия каждый раз по фазе меняется на  $\pi$ ; 2) направление вращения (движение решетки) изменяется на противоположное.

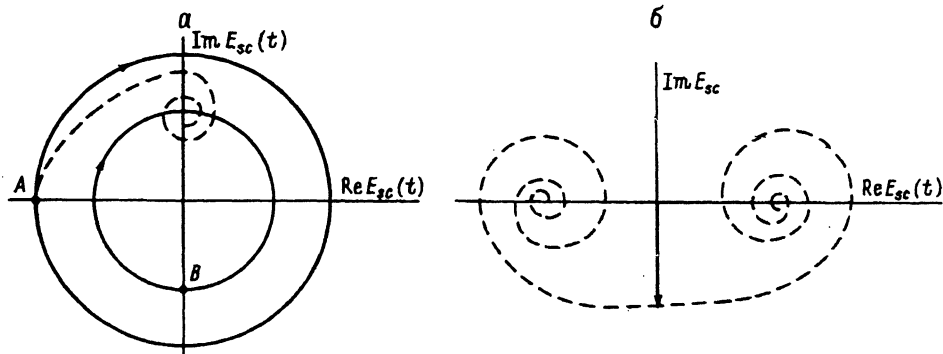


Рис. 2. Фазовый портрет записи решетки.

а — методика движущейся интерференционной картины в постоянном поле, б — в переменном поле.

Перед тем как обсудить параметрическое возбуждение субгармонической решеткой заметим, что основная решетка образуется за счет пространственно неоднородного фототока

$$j_n = \frac{1}{2} \epsilon \mu E_0(t) n_1(t) \exp\{iqx\} + \text{к.с.}, \quad (2)$$

который приводит к распределению пространственного заряда. Здесь  $E_0(t)$  — пространственно однородное действительное внешнее поле,  $n_1(t)$  — комплексная амплитуда основной гармоники подвижных фотоэлектронов. Вообще говоря, величины  $E_0(t)$  и  $n_1(t)$  зависят от времени.

Качественно рассмотрим параметрическую неустойчивость решетки отдельно для переменного и постоянного полей. Пусть движущаяся интерференционная картина засвечивает кристалл с приложенным к нему постоянным полем и возбуждает профиль фотопроводимости  $\sigma_1 \sim \exp(i(x-t)) + \text{к.с.}$  Положим для простоты  $q = \omega = 1$ . Это можно сделать при соответствующем подборе масштабов измерения времени и расстояния. Также предположим, что в результате флуктуаций (неоднородность параметров по кристаллу, неоднородность засветки и др.) образовалась решетка поля  $E_{1/2} = \exp(ix/2) + \text{к.с.}$  В результате образуется пространственно неоднородный фототок  $j_n \sim E_{1/2} \sigma_1(i)$ . Появление этого тока приводит к пространственному разделению заряда аналогично тому, как происходит процесс записи основной гармоники. Если этот процесс превышает максвелловскую релаксацию, то флуктуационное поле  $E_{1/2}$  будет раскачиваться, т.е. будет иметь место неустойчивость. Для того чтобы возбудить параметрически решетку субгармоники во внешнем переменном меандровой формы  $E_0(t) = E_0 \text{sign}\{\cos(\Omega t)\}$ , нужно засвечивать кристалл интерференционной картиной, которая дважды за период  $T = 2\pi/\Omega$  изменяет свою фазу на  $\pi$  синхронно с изменением знака поля. Это дает решетку фотопроводимости, “прыгающую” синхронно с внешним полем  $\sigma_1 \sim \text{sign}\{\cos \Omega t\} \exp\{ix\} + \text{к.с.}$  В результате того, что существует флуктуационное поле  $E_{1/2}$ , возникает нестационарный ток  $j_n \sim E_{1/2} \sigma_1$ . Такая “прыгающая” волна фототока во внешнем приложенном переменном поле меандровой формы записывает статическую решетку поля пространственного заряда. Две функции внешнего переменного поля 1) смена знака положения равновесия и 2) изменение направления движения релаксации решетки перераспределяются между “прыгающей” интерференционной картиной (первая функция) и внешним переменным полем (вторая функция). Если усиление превышает диэлектрическую релаксацию, то амплитуда решетки начнет возрастать. Это приводит к спонтанной генерации субгармоники.

## Основные уравнения, описывающие ВПЛ

Для аналитического рассмотрения формирования фоторефрактивной решетки мы используем простейшую модель. Согласно этой модели, существует один донорный уровень в запрещенной зоне с концентрацией  $N_D$ . Такой уровень частично скомпенсирован отрывом электронов и их последующей рекомбинацией с акцепторами. Концентрация акцепторов —  $N_A \ll N_D$ . Процесс формирования решетки пространственного

заряда описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial N^+}{\partial t} &= SI(N_D - N^+) - \gamma n N^+, \\ \frac{\partial N^+}{\partial t} &= \frac{\partial n}{\partial t} - e^{-1} \frac{\partial j}{\partial x}, \\ j &= e\mu n E + K_B T \mu \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{e}{\varepsilon \varepsilon_0} (N^+ - n - N_A),\end{aligned}\quad (3)$$

состоящей из кинетического уравнения, уравнения непрерывности, закона Ома, включающего диффузионный ток и уравнения Пуассона. Здесь  $I$  есть общая интенсивность,  $n$  и  $N^+$  — концентрации электронов и ионизированных доноров соответственно,  $S$  и  $\gamma$  — константы фотоионизации и электрон-ионной рекомбинации,  $j$  — ток плотности,  $E$  — электростатическое поле,  $e = |e|$  — абсолютная величина заряда электрона,  $K_B T$  — температура в энергетических единицах,  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_0$  есть диэлектрические восприимчивости кристалла и вакуума соответственно. Темновой и фотовольтаический ток в уравнении (3) не учитывался. После исключения  $N^+$  и  $j$  система (3) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} &= SIN_D - \frac{\gamma \varepsilon \varepsilon_0 n}{e} \frac{\partial E}{\partial x} - \gamma n N_A + \mu \frac{\partial(nE)}{\partial x} + \frac{K_B T}{e} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{e\mu}{\varepsilon \varepsilon_0} n E - \frac{K_B T \mu}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}.\end{aligned}\quad (4)$$

При выводе уравнений (4) были сделаны следующие допущения:  $n \ll N_A$ ,  $(\varepsilon \varepsilon_0 / e)(\partial E / \partial x) < N_A \ll N_D$  [25]. Мы будем искать решение (4) в виде  $n = n_0(t) + n_n$  и  $E = E_0(t) + E_{sc}$ . Здесь  $n_0(t)$  и  $E_0(t)$  — пространственно однородные части концентрации электронов и электрического поля соответственно. Они определяются средней интенсивностью  $I_0$  и внешним приложенным полем  $\dot{E}_0(t)$  соответственно. Можно легко получить из (4), что  $n_0(t)$  релаксирует к стационарной величине  $n_0 = SI_0 N_0 / \gamma N_A$  в течение короткого времени  $\tau = (\gamma N_A)^{-1}$ . Физически величина  $\tau$  соответствует времени жизни электронов в зоне проводимости. Для пространственно неоднородных частей концентрации  $n_n$  и поля  $E_{sc}$  мы имеем нелинейную систему

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_n}{\partial t} &= \frac{E_D}{E_\mu} \frac{\partial n_n^2}{\partial x^2} + \frac{E_0}{E_\mu} \frac{\partial n_n}{\partial x} - n_n + \left( \frac{1}{E_\mu} - \frac{1}{E_q} \right) \frac{\partial E_{sc}}{\partial x} - \frac{n_n}{E_q} \frac{\partial E_{sc}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{n_n E_{sc}}{E_\mu} \right) + f, \\ \frac{\partial E_{sc}}{\partial t} &= - \frac{E_D}{\tau_M} \frac{\partial n_n}{\partial x} - \frac{E_0 n_n}{\tau_M} - \frac{E_{sc}}{\tau_M} - \frac{n_n E_{sc}}{\tau_M}.\end{aligned}\quad (5)$$

Единицы измерения в (5) следующие: для времени — время жизни электрона  $\tau$ ; для расстояния — период основной решетки, деленный на  $2\pi$ , т.е.  $q^{-1} = \Lambda / 2\pi$ ; для концентрации — средняя концентрация электронов  $n_0$ . Введены следующие обозначения:  $E_D = qK_B T / e$  — так называемое диффузное поле;  $E_q = eN_A / \varepsilon \varepsilon_0 q$  — поле насыщения ловушек;

$E_\mu = (q\mu\tau)^{-1}$  — дрейфовое поле;  $\tau_M = \varepsilon\varepsilon_0/\varepsilon\mu n_0\tau$  — время максвелловской релаксации;  $f$  — неоднородная часть интенсивности  $I$ , отнормированная на среднюю величину  $I_0$ . Для движущейся интерференционной картины

$$f = m \exp\{-i(\omega t - x)\} \quad (6)$$

и для “прыгающей”

$$f = im \exp\{ix - iA \operatorname{sign}(\cos \Omega t)\}, \quad (7)$$

где  $m$  — контраст интерференционной картины.

Заметим, что мы выше рассматривали случай, когда интерференционная картина изменяет свою фазу на  $\pi$ , что соответствует величине  $A = \pi/2$  в (7). Система (5) будет исходной для аналитического рассмотрения. Нелинейный член  $n_n E_{sc}$  обеспечивает параметрический резонанс при условиях, получаемых ниже. Пренебрегая нелинейными членами, диффузией и насыщением ловушек ( $E_D = E_q^{-1} = 0$ ), можно получить простую систему, описывающую ВПЛ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_n}{\partial t} &= \mu E_0 \frac{\partial n_n}{\partial x} + \mu \frac{\partial E_{sc}}{\partial x} - n_n + f, \\ \frac{\partial E_{sc}}{\partial t} &= -\frac{E_0 n_n}{\tau_M} - \frac{E_{sc}}{\tau_M}. \end{aligned} \quad (8)$$

Исключая из этой системы концентрацию  $n_n$  и учитывая малый параметр  $\tau_M^{-1}$ , можно получить для постоянного поля  $E_0$  простое уравнение, описывающее релаксацию поля пространственного заряда  $E_{sc}$ ,

$$\tau_M \frac{\partial}{\partial t} \left( E_{sc} - l \frac{\partial}{\partial x} E_{sc} \right) + E_{sc} = -E_0 f. \quad (9)$$

Здесь  $l_E = \mu E_0 \tau$  — дрейфовая длина электрона в размерном виде. Временные константы  $\tau = 10^{-10} - 10^{-4}$  с,  $\tau_M = 10^{-1} - 10^3$  с обеспечивают наличие малого параметра  $\tau/\tau_M$ , используемого при выводе (9). Релаксация поля пространственного заряда  $E_{sc} = E_{sc}(t) \exp\{ix\}$  с комплексной амплитудой  $E_{sc}(t)$  [1] описывается хорошо известным уравнением, получаемым из (9),

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{sc}(t) + \Gamma E_{sc}(t) = -\Gamma E_0(t) m, \quad (10)$$

где  $\Gamma = \nu + i\omega_0$  есть комплексная константа релаксации.

На основе уравнения (10) можно вывести характеристики (скорость, время записи), описывающие ВПЛ во внешнем постоянном поле.

Для переменного поля с частотой  $\tau^{-1} \gg \Omega \gg \omega_0$  уравнение (10) также верно и может быть решено через усреднение по периоду поля  $T = 2\pi/\Omega$  [22, 26].

Такой метод дает чисто мнимый отклик  $E_{sc} = -imE_0^2/E_\mu$  [22] в соответствии с приведенным выше качественным анализом (рис. 2, б). Единственное ограничение налагается на частоту поля  $\tau^{-1} \gg \Omega \gg \omega_0$ . Для поля меандровой формы условие  $\Omega \ll \tau^{-1}$  означает, что крутизна фронта меандра должна быть больше времени жизни электрона в зоне проводимости. Практически это нетрудно осуществить.

Релаксация решетки субгармоники описывается уравнением (9) без правой части (нет интерференционной картины с пространственной частотой  $q/2$ ), но с промодулированным коэффициентом при  $1/\tau_M$  благодаря основной гармонике фотопроводимости, возбуждаемой интерференционной картиной. Формально это соответствует слагаемому  $n_1 E_{1/2}$  нелинейного члена  $n_n E_{sc} = (n_1 + n_{1/2})(E_1 + E_{1/2})$ , получаемого при выводе (9) из системы (5). Членами  $n_{1/2} E_1$ ,  $n_1 E_1$  и  $n_{1/2} E_{1/2}$  в простейшей модели мы пренебрегаем. После этих замечаний для амплитуды решетки поля  $E_{1/2}$  мы имеем

$$\frac{\partial E_{1/2}}{\partial t} - l_E(t) \frac{\partial^2 E_{1/2}}{\partial x \partial t} + \frac{1}{\tau_M} \left( 1 + \frac{n_1(t)}{2} e^{ix} + \frac{n_1^*(t)}{2} e^{-ix} \right) E_{1/2} = 0, \quad (11)$$

где

$$n_1(t) = n_1 \exp\{-i\omega t\} \quad (12)$$

для постоянного приложенного поля и

$$n_1(t) = in_1 \exp\{-iA \operatorname{sign}(\cos \Omega t)\} \quad (13)$$

для переменного поля меандровой формы. Уравнение (13) соответствует модуляции интерференционной картины типа "меандр". Амплитуда решетки концентрации электронов  $n_1$  может быть легко получена из линейаризованной системы (8).

Для того чтобы определить область неустойчивости во внешнем постоянном поле, будем искать решение (11) с концентрацией  $n_1(t)$ , данной уравнением (12), в форме

$$E_{1/2} = \frac{1}{2} [E_{1/2}(t) \exp\{i(x/2 - \omega t/2)\} + \text{к.с.}].$$

Пренебрегая членами, соответствующими пространственной гармонике с частотой  $3q/2$ , можно получить линейную систему для амплитуд  $E_{1/2}(t)$  и  $E_{1/2}^*(t)$ . Анализируя устойчивость такой системы, мы видим, что неустойчивость пространственной субгармоники существует при условии

$$|n_1| > [(\omega\tau_M)^2 + (l_E\omega\tau_M - 4)^2]^{1/2}. \quad (14)$$

Уравнение (14) определяет область существования неустойчивости на плоскости  $(\omega, |n_1|)$  при приложении к кристаллу постоянного поля.

Для существования неустойчивости очевидное условие  $|n_1| < 1$  дает пороговое значение добротности  $Q > 4$ , полученное из уравнения (14). Этот результат совпадает с пороговым значением добротности для классического параметрического резонанса [27].

Для исследования неустойчивости пространственной субгармоники в переменном поле мы подставим выражение для  $n_1(t)$  в (11) и получим для амплитуды  $E_{1/2}(t)$  поля субгармоники

$$\frac{d}{dt} E_{1/2}(t) = -\frac{1}{1 - il_E(t)/2} E_{1/2}(t) - \frac{n_1(t)/2}{1 - il_E(t)/2} E_{1/2}^*(t),$$

$$\frac{d}{dt} E_{1/2}^*(t) = -\frac{n_1^*(t)/2}{1 + il_E(t)/2} E_{1/2}(t) - \frac{1}{1 + il_E(t)/2} E_{1/2}^*(t). \quad (15)$$

Усреднение коэффициентов уравнения (15) по периоду  $T = 2\pi/\Omega$  и исследование на устойчивость конечной системы приводят к тому, что амплитуда  $E_{1/2}(t)$  экспоненциально возрастает при условии

$$|n_1| > 4/|l_E| \cos(A - \pi/2). \quad (16)$$

Пороговая величина добротности  $Q > 4$  для оптимальной амплитуды  $A = \pi/2$  дается неравенством (16) и очевидным условием  $|n_1| < 1$ . Уравнение (16) дает область существования неустойчивости на плоскости  $(A; |n_1|)$ . Пороговая величина  $Q > 4$ , полученная из (15) и (16), в простейшей аппроксимации совпадает как для постоянного, так и для переменного поля.

### Подробное аналитическое решение

Используя начальную систему (5), мы рассмотрим вопрос существования неустойчивости в двух случаях: а) постоянное поле и равномерно движущаяся интерференционная картина; б) переменное поле и “прыгающая” интерференционная картина.

Равномерно движущаяся интерференционная картина в постоянном поле. Выражение (5) в системе координат, движущейся со скоростью интерференционной картины, имеет следующую форму:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{E_0}{E_\mu} \nabla n + \frac{E_D}{E_\mu} \Delta n + (1/E_\mu - 1/E_q) \nabla E_{sc} - \frac{n_n \nabla E_{sc}}{E_q} - \nabla \frac{(n_n E_{sc})}{E_\mu} + m \exp(ix),$$

$$\frac{\partial E_{sc}}{\partial t} = -\frac{E_D}{\tau_M} \nabla n_n - \frac{E_0}{\tau_M} n_n + b \nabla E_{sc} - \frac{E_{sc}}{\tau_M} - \frac{n_n E_{sc}}{\tau_M}. \quad (17)$$

Символы  $\nabla$  и  $\Delta$  означают  $\partial/\partial x$  и  $\partial^2/\partial x^2$  соответственно. Здесь  $b = \omega\tau$  — скорость интерференционной картины в безразмерных единицах. Величина  $\omega = v/q$  — частота осцилляций интерференционной картины. Также мы предполагаем, что член  $v\nabla n_n \sim \omega$  мал по сравнению с членом  $\partial n/\partial t \sim n/\tau$  и может быть отброшен. Это предположение будет оправдано результатами последующих вычислений [14].

Мы будем искать решение системы (17) в следующем виде:

$$n_n = \frac{1}{2} [n_1 \exp(ix) + \text{к.с.}] + \frac{1}{2} \left[ n_{1/2} \exp\left(\frac{ix}{2}\right) + \text{к.с.} \right],$$

$$E_{sc} = \frac{1}{2} [E_1 \exp(ix) + \text{к.с.}] + \frac{1}{2} \left[ E_{1/2} \exp\left(\frac{ix}{2}\right) + \text{к.с.} \right]. \quad (18)$$

Здесь  $n_1, n_{1/2}, E_1, E_{1/2}$  — медленно меняющиеся амплитуды основной гармоники (индекс 1) и субгармоники (индекс 1/2) для концентрации электронов и для электростатического поля соответственно. Стационарные



величины  $E_1$  и  $n_1$ , рассчитанные из линейной части (17), выражаются следующим образом:

$$E_1 = -m \frac{E_0 + iE_D}{1 + E_D/E_q - iE_0/E_q - b\tau_M E_0/E_\mu - ib\tau_M(1 + E_D/E_\mu)},$$

$$n_1 = \frac{m(1 - ib\tau_M)}{1 + E_D/E_q - iE_0/E_q - b\tau_M E_0/E_\mu - ib\tau_M(1 + E_D/E_\mu)}. \quad (19)$$

Подставляя (18) в (17), мы получаем, что в правой части системы (17) нелинейный член дает слагаемые, пропорциональные  $e^0$ :  $\exp(\pm ix)$ ,  $\exp(\pm 2ix)$ ,  $\exp(\pm ix/2)$ . Все эти члены, исключая последний, можно отбросить. Для членов, содержащих стационарные величины (19), предположим, что  $\partial n_1/\partial t = 0$  и  $\partial E_1/\partial t = 0$  соответственно. После этих упрощений мы имеем линейную систему уравнений четвертого порядка для субгармонических амплитуд  $n_{1/2}$ ,  $n_{1/2}^*$ ,  $E_{1/2}$ ,  $E_{1/2}^*$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} n_{1/2} \\ n_{1/2}^* \\ E_{1/2} \\ E_{1/2}^* \end{bmatrix} = \alpha_{ij} \begin{bmatrix} n_{1/2} \\ n_{1/2}^* \\ E_{1/2} \\ E_{1/2}^* \end{bmatrix} \quad (20)$$

с матрицей коэффициентов  $\alpha_{ij}$

$$\begin{bmatrix} -\frac{E_D}{4E_\mu} + \frac{iE_0}{2E_\mu} - 1; & \frac{iE_1}{2} \left(-\frac{1}{E_q} + \frac{1}{2E_\mu}\right); & \frac{i}{2} \left(\frac{1}{E_\mu} - \frac{1}{E_q}\right); & \frac{in_1}{4} \left(\frac{1}{E_\mu} + \frac{1}{E_q}\right) \\ -\frac{iE_1^*}{2} \left(-\frac{1}{E_q} + \frac{1}{2E_\mu}\right); & -\frac{E_D}{4E_\mu} - \frac{iE_D}{2E_\mu} - 1; & -\frac{in_1^*}{4} \left(\frac{1}{E_\mu} + \frac{1}{E_q}\right); & -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{E_\mu} - \frac{1}{E_q}\right) \\ -\frac{iE_D}{2\tau_M} - \frac{E_0}{\tau_M}; & -\frac{E_1}{2\tau_M}; & \frac{ib}{2} - \frac{1}{\tau_M}; & -\frac{n_1}{2\tau_M} \\ -\frac{E_1^*}{2\tau_M}; & \frac{iE_D}{2\tau_M} - \frac{E_0}{\tau_M}; & -\frac{n_1^*}{2\tau_M}; & -\frac{ib}{2} - \frac{1}{\tau_M} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Для аналитического решения мы предполагаем, что величина  $E_1$  пренебрежимо мала, так как резонанс для основной гармоники расположен вдали от резонанса для субгармоники [14]. В соответствии с этим предположением мы положим  $E_1 = E_1^* = 0$ . Присутствие малого параметра  $\tau_M^{-2}$  позволяет пренебречь членами  $d^2 E_{1/2}/dt^2$ ,  $d^2 E_{1/2}^*/dt^2$ ,  $1/\tau_M^2$  после исключения  $n_{1/2}$ ,  $n_{1/2}^*$  из (20). В результате этих упрощений система (20) имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E_{1/2} \\ E_{1/2}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12}^* & \beta_{11}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1/2} \\ E_{1/2}^* \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Здесь коэффициенты  $\beta_{ij}$  получены из элементов матрицы  $\alpha_{ij}$

$$\beta_{11} = \alpha_{33} - \frac{\alpha_{13}\alpha_{31}}{\alpha_{11}}; \quad \beta_{12} = \alpha_{34} - \frac{\alpha_{14}\alpha_{31}}{\alpha_{11}}. \quad (23)$$

Стандартная процедура исследования на устойчивость системы (22) дает уравнение, определяющее границу области неустойчивости

$$\text{Im } \beta_{11} = \pm(|\beta_{12}|^2 - (\text{Re } \beta_{11})^2)^{1/2}. \quad (24)$$

В системе координат  $(b; |n_1|)$  мы имеем уравнение границы

$$b = b_{1/2} \pm (A_1 |n_1|^2 - B_1)^{1/2}. \quad (25)$$

Коэффициенты  $A_1$  и  $B_1$  можно легко посчитать из (24), (25). Рассмотрим несколько предельных случаев при различных параметрах  $E_D$ ,  $E_q$ , учитывая важное условие, которое часто выполняется на практике  $E_q/E_\mu > 1$ .

а)  $E_q^{-1} = E_D = 0$ . Этот случай был рассмотрен в работе [14].

б)  $E_D = 0$ ;  $E_q^{-1} > 0$ . Граница области неустойчивости выражается следующим уравнением [14]:

$$b = \frac{4E_\mu E_0 (E_q - E_\mu)}{\tau_M (4E_\mu^2 + E_0^2) E_q} \pm \frac{E_{mu}}{2\tau_M (4E_\mu^2 + E_0^2) E_q} \left[ (16E_\mu^2 E_q^2 + E_0^4 + 4E_0^2 (E_q^2 + E_\mu^2)) |n_1|^2 - 4(4E_\mu E_q + E_0^2)^2 \right]^{1/2}. \quad (26)$$

Вершина области неустойчивости расположена на плоскости  $(b; |n_1|)$  в точке с координатами

$$|n_c| = 2 \left[ \frac{(4E_\mu E_q + E_0^2)}{(16E_\mu^2 E_q^2 + E_0^4 + 4E_0^2 (E_q^2 + E_\mu^2))} \right]^{1/2},$$

$$b_{1/2} = \frac{4E_\mu E_0 (E_q - E_\mu)}{\tau_M (4E_\mu^2 + E_0^2) E_q}. \quad (27)$$

Из условия  $|n_c| \leq 1$  и неотрицательности подкоренного выражения в уравнении (26) мы получаем область для внешнего поля  $12E_\mu^2 < E_0^2 \leq 4E_q^2/3$ , в которой существует неустойчивость, предполагая  $E_q \gg E_\mu$ . Таким образом, эта область ограничена как верхним пределом, так и нижним, в то время как при отсутствии насыщения существует только нижняя граница, которая совпадает с результатом, полученным без учета насыщения.

в)  $E_D > 0$ ;  $E_q^{-1} = 0$ . Вершина этой области имеет координаты

$$b_{1/2} = \frac{16E_0 E_\mu}{\tau_M ((4E_\mu + E_D)^2 + 4E_0^2)}; \quad |n_c| = \left( \frac{4(E_D + 4E_\mu)^2}{(4E_\mu + E_D)^2 + 4E_0^2} \right)^{1/2}. \quad (28)$$

Условие  $|n_c| \leq 1$  дает большую пороговую величину для внешнего поля  $E_0^2 > 3(4E_\mu + E_D)^2/4$ , чем в случае  $E_D = 0$ .

г)  $E_D > 0$ ;  $E_q^{-1} > 0$ ;  $E_1 > 0$ . В этом разделе мы учтем наличие величины  $E_1$  для того, чтобы исследовать влияние основной гармоники. Из-за громоздкости конечных формул анализ произведен численно при величине  $\mu x = 10^{-7}$  см<sup>2</sup>/В. Область неустойчивости на плоскости  $(q, E_0)$ , рассчитанная численно, находилась из условия  $|n_c| \leq 1$  при 100%-ном контрасте  $m$  и представлена на рис. 3. Оказывается, что неустойчивость

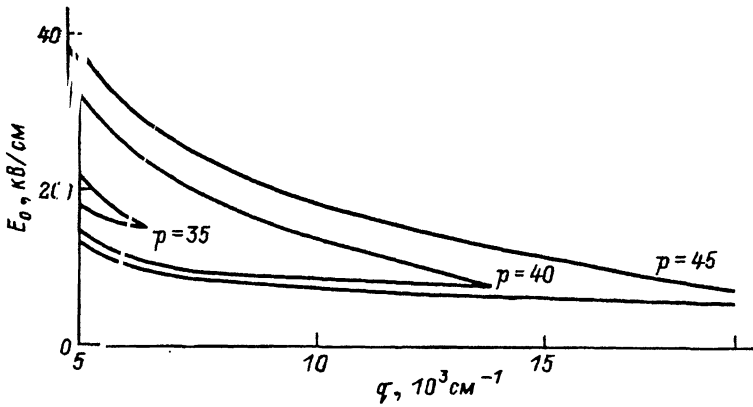


Рис. 3. Область существования неустойчивости на плоскости  $(q, E_0)$  при различных значениях  $p = E'_q/E_\mu$  (постоянное поле и движущаяся интерференционная картина) ( $\mu\tau = 10^{-7}$  с·см<sup>2</sup>/В,  $m = 1$ ).

исчезает при условии  $p = E_q/E_\mu < 34$ . Кроме того, пороговое соотношение  $E_0^2 > 12E_\mu^2$  переходит в  $E_0^2 \geq 64E_\mu^2$  при одновременном учете трех факторов: 1) диффузия  $E_D > 0$ ; 2) насыщение ловушек  $E_q^{-1} > 0$ ; 3) ненулевая основная гармоника  $E_1 > 0$ . Также существует ограничение на область неустойчивости для внешнего поля  $E_0 < E_b$ , где  $E_b$  есть поле электрического пробоя по поверхности кристалла. Практически эта величина составляет 10–15 кВ/см.

Переменное поле типа “меандр” и “прыгающая” интерференционная картина. Мы предполагаем, что переменное поле меандровой формы частоты  $\Omega$  приложено к кристаллу. Интерференционная картина прыгает синхронно с внешним полем и описывается членом (7). Используя (5), мы проводим процедуру, аналогичную и для постоянного поля. После подстановки (17) в (5) и исключения соответствующих членов мы получаем систему уравнений (20) с коэффициентами матрицы  $\gamma_{ij}$

$$\begin{bmatrix} -\frac{E_D}{4E_\mu} + \frac{iE_0}{2E_\mu} - 1; & \frac{iE_1}{2} \left( -\frac{1}{E_q} + \frac{1}{2E_\mu} \right); & \frac{i}{2} \left( \frac{1}{E_\mu} - \frac{1}{E_q} \right); & \frac{in_1}{4} \left( \frac{1}{E_\mu} + \frac{1}{E_q} \right) \\ -\frac{iE_1^*}{2} \left( -\frac{1}{E_q} + \frac{1}{2E_\mu} \right); & -\frac{E_D}{4E_\mu} - \frac{iE_D}{2E_\mu} - 1; & -\frac{in_1^*}{4} \left( \frac{1}{E_\mu} + \frac{1}{E_q} \right); & -\frac{i}{2} \left( \frac{1}{E_\mu} - \frac{1}{E_q} \right) \\ -\frac{iE_D}{2\tau_M} - \frac{E_0}{\tau_M}; & -\frac{E_1}{2\tau_M}; & -\frac{1}{\tau_M}; & -\frac{n_1}{2\tau_M} \\ -\frac{E_1^*}{2\tau_M}; & \frac{iE_D}{2\tau_M} - \frac{E_0}{\tau_M}; & -\frac{n_1^*}{2\tau_M}; & -\frac{1}{\tau_M} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Отметим, что коэффициенты матрицы  $\gamma_{ij}$  зависят от времени. Далее мы не можем не учитывать величину  $E_1$ . Мы будем находить величину  $E_1$  из приближения первого порядка. Для простоты используется трапециевидная форма  $f(t)$ ,  $E_0(t)$  имеет ширину фронта с характерным временем  $\tau_1$ , удовлетворяющим условию  $\tau \ll \tau_1 \ll 2\pi/\Omega$ . Такая временная зависимость практически реализуется в экспериментах и позволяет пренебречь многими членами при выводе и усреднении уравнений по периоду  $T = 2\pi/\Omega$  [26, 28]. Наличие малых параметров  $\tau_M^{-1}$ ,  $\tau/\tau_1$  и  $\Omega\tau$  позволяет пренебречь членами  $d^2 E_{1/2}/dt^2$ ;  $dE_{1/2}/dt^2 \sim \tau_M^{-2}$  и  $dE_0/dt$  соответственно после

исключения  $n_{1/2}$ ,  $n_{1/2}^*$  из (20). Результатом таких упрощений является система с коэффициентами, зависящими от времени,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} E_{1/2} \\ E_{1/2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}^*(t) & k_{11}^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1/2} \\ E_{1/2}^* \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Мы проведем процедуру усреднения системы (30). Это лишь уменьшит область существования неустойчивости [29]. Далее будем исследовать усредненную систему, полученную из (30), с коэффициентами  $\langle k_{ij}(t) \rangle$ , которые выражаются через элементы матрицы  $\gamma_{ij}(t)$ ,

$$\begin{aligned} \langle k_{11} \rangle &= \langle \gamma_{33} - \frac{\gamma_{13}(\gamma_{31}\gamma_{22} - \gamma_{32}\gamma_{21}) + \gamma_{23}(\gamma_{32}\gamma_{11} - \gamma_{31}\gamma_{12})}{|\gamma_{22}|^2 - |\gamma_{21}|^2} \rangle, \\ \langle k_{12} \rangle &= \langle \gamma_{34} - \frac{\gamma_{14}(\gamma_{31}\gamma_{22} - \gamma_{32}\gamma_{21}) + \gamma_{24}(\gamma_{32}\gamma_{11} - \gamma_{31}\gamma_{12})}{|\gamma_{22}|^2 - |\gamma_{21}|^2} \rangle. \end{aligned} \quad (31)$$

Угловые скобки обозначают усреднение по периоду поля. Основная гармоника  $E_1$  и величина  $n_1$  будут находиться в каждом конкретном случае из системы первого порядка [26,28].

Для существования неустойчивости одно из собственных значений усредненной системы должно быть положительным. Запишем выражение, описывающее область существования неустойчивости, в следующем виде:

$$G + (C^2 + D^2 - B^2)^{1/2} \geq 0, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} G &= \langle \text{Re } k_{11}(t) \rangle d, & C &= \langle \text{Re } k_{12}(t) \rangle d, \\ B &= \langle \text{Im } k_{11}(t) \rangle d, & D &= \langle \text{Im } k_{12}(t) \rangle d. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь  $d$  — усредненная величина  $\langle |\gamma_{11}|^2 - |\gamma_{21}|^2 \rangle$  элементов  $k_{ij}$ . Давайте рассмотрим несколько предельных случаев, определяемых параметрами  $E_D$ ,  $E_q$ , для практически важного условия  $E_q > E_\mu$ .

а)  $E_D = E_q^{-1} = 0$ . Вначале предположим, что положение прыгающей интерференционной картины изменяется на величину  $\pi/2 + \Delta\lambda$ , где  $\Delta = A - \pi/2$  — малый параметр. Тогда мы имеем при усреднении амплитуду поля основной гармоники  $E_1$  и величину  $n_1$  из линейной части системы (5)

$$\langle E_1 \rangle = -mE_0 + \frac{mE_0\Delta^2}{4} - \frac{imE_0^2\Delta^2}{4E_\mu}, \quad n_1 = f, \quad (34)$$

где  $f$  выражается формулой (7).

После усреднения элементов  $k_{ij}$  мы имеем следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} G &= -16E_\mu^2, & B &= -mE_\mu E_0\Delta^2, \\ C &= m(E_0^2 - 4E_\mu^2)\Delta^2, & D &= m2E_\mu E_0(\Delta^2 - 1). \end{aligned} \quad (35)$$

Используя условие (32), найдем координаты вершины области неустойчивости

$$m_c = \frac{2E_\mu}{E_0}; \quad A = \pi/2. \quad (36)$$

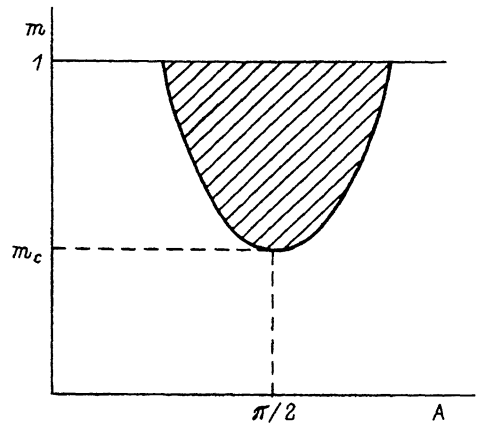


Рис. 4. Область существования неустойчивости на плоскости  $(A, m)$  (переменное поле и “прыгающая” интерференционная картина).

Область неустойчивости представлена на рис. 4 на плоскости  $(A, m)$ . Условие  $m_c \leq 1$  дает пороговую величину внешнего поля  $E_0 > 2E_\mu$ , требуемого для существования неустойчивости.

б)  $E_q^{-1} > 0$ ;  $E_D = 0$ . Для простоты мы будем исследовать вершину области неустойчивости на плоскости  $(A, m)$ , т.е.  $\Delta = 0$ . Тогда будем использовать усредненную величину первой гармоники и величину  $n_1$ , полученные из линеаризованной системы (5) в следующей форме:

$$\langle E_1 \rangle = -\frac{mE_0}{1 + E_0^2/E_q E_\mu},$$

$$n_1 = \left( m + \left( \frac{E_q - E_\mu}{E_q E_\mu} \right) \langle E_1 \rangle + im \frac{E_0}{E_\mu} - \frac{E_0}{E_\mu} \langle E_1 \rangle \frac{E_q - E_\mu}{E_q E_\mu} \right) \cdot \left( \frac{1}{1 + E_0^2/E_\mu^2} \right)^{-1}. \quad (37)$$

Мы рассмотрим два предельных соотношения. Они определяются условиями  $E_0^2/E_q E_\mu \ll 1$  и  $E_0^2/E_q E_\mu \gg 1$  соответственно.

в)  $E_0^2 \ll E_q E_\mu$ . Пусть параметр  $\lambda \ll 1$  есть величина  $E_0^2/E_q E_\mu$ . После усреднения коэффициентов  $k_{ij}$  и отбрасывания членов порядка больше первого по параметру  $\lambda$  мы получаем следующие коэффициенты:

$$G = -(16E_0^2 E_\mu^2 + 5E_q E_\mu m^2 E_0^2 + 4E_0^2 E_q E_\mu), \\ B = C = 0, \quad D = -m8E_\mu E_q^2 E_0(1 - \lambda). \quad (38)$$

Используя соотношение (32), мы записываем условие существования неустойчивости в следующем виде:

$$m^2 - \frac{8E_q}{5E_0} m(1 - \lambda) + \frac{4}{5}(1 + 4/\lambda) < 0. \quad (39)$$

Вершина области неустойчивости имеет координаты

$$m_c = 2E_\mu/E_0 + \frac{5E_0}{2E_q}; \quad A = \pi/2. \quad (40)$$

Из условия  $m_c \leq 1$  мы находим пороговую величину для внешнего поля  $E_0 > 2E_\mu$ , предполагая, что  $E_\mu/E_q \ll 1$ .

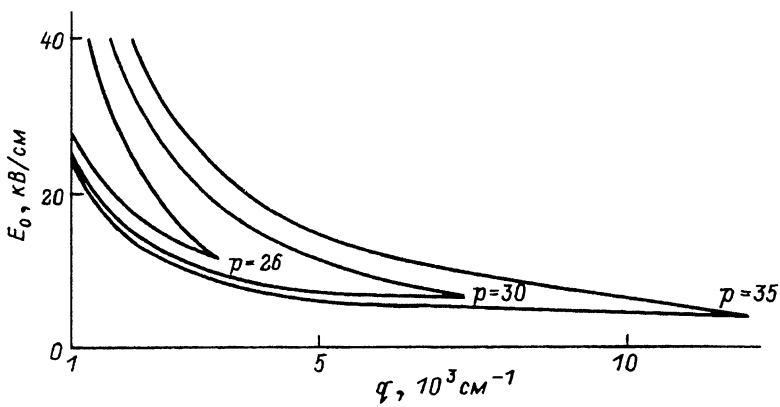


Рис. 5. Область существования неустойчивости на плоскости  $(q, E_0)$  при различных значениях  $p = E_0/E_\mu$  (переменное поле и "прыгающая" интерференционная картина) ( $\mu\tau = 10^{-7}$  см<sup>2</sup>/В,  $m = 1$ ).

г)  $E_0^2 \gg E_q E_\mu$ . Пусть параметр  $\varphi$  — величина  $(E_q E_\mu)/E_0^2 \ll 1$ . Используя (37), мы произведем усреднение и учтем члены, содержащие первый порядок параметра  $\varphi$ . Это дает следующие результаты:

$$G = -4E_0^2 E_q E_\mu, \quad D = -8m\varphi E_0 E_q^2 E_\mu. \quad (41)$$

Используя соотношение (32), мы находим координаты вершины области неустойчивости

$$m_c = \frac{E_0^3}{2E_q^2 E_\mu}, \quad A = \pi/2. \quad (42)$$

Из очевидного соотношения  $m_c \leq 1$  можно видеть, что существует верхняя граница по внешнему полю  $E_0^3 2E_q^2 E_\mu$ , предполагая условие  $E_q \gg E_\mu$  и  $E_0 > E_\mu$ . Аналогичная ситуация была для случая постоянно поля.

д)  $E_D > 0$ ;  $E_q^{-1} = 0$ . Вершина области неустойчивости имеет следующие координаты:

$$m_c = \frac{(4E_\mu + E_D)(1 + E_D/E_\mu)}{2E_0}; \quad A = \pi/2. \quad (43)$$

Аналогично случаю постоянного поля диффузия дает большую величину порога для постоянного поля  $E_0$  в сравнении с другими предельными случаями.

е)  $E_D > 0$ ;  $E_q^{-1} > 0$ . Для численного счета мы проводили усреднение с учетом параметров  $E_D, E_q$  при соответствующих величинах  $\langle E_1 \rangle$  и  $n_1$ . Окончательные формулы очень громоздки, и мы представляем только результаты вычислений. При значениях  $\mu\tau = 10^{-7}$  см<sup>2</sup>/В и  $m = 1$  мы нашли область существования неустойчивости, представленной на рис. 5 на плоскости  $(q; E_0)$ . Уточним, что неустойчивость существует при условии  $p = E_q/E_\mu \geq 24$ . Также есть добавочное ограничение на существование неустойчивости  $E_0 < E_b$ , где  $E_b$  есть поле электрического пробоя по поверхности кристалла.

Как показывают аналитические и численные расчеты, неустойчивость может развиваться при достаточно умеренных амплитудах внешнего поля, если безразмерный параметр  $p$  имеет значение  $p = E_q/E_\mu = 25-35$ . Этот параметр  $p = eN_{\text{АМТ}}/\epsilon\epsilon_0$  не зависит от экспериментальных условий (пространственная частота, внешнее поле и др.) и определяется только свойствами кристалла. Это означает, что полупроводники (GaAs, InP, CdTe) являются наиболее подходящими для наблюдения параметрической неустойчивости, так как они имеют наибольшую величину произведения времени жизни в зоне проводимости на подвижность для электронов среди всех фоторефрактивных кристаллов. Известные параметры для силленитов не дают нужного значения параметра  $p$ . Мы думаем, что как абсолютная, так и конвективная неустойчивости должны быть привлечены для объяснения наблюдаемых экспериментальных результатов [2,3]. Чисто абсолютную неустойчивость можно наблюдать при больших пространственных частотах (для исключения конвективной неустойчивости) через брэгговскую дифракцию третьего независимого пучка. Переменное поле предпочтительней для генерации субгармоники по следующим причинам: 1) не нужно однородно засвечивать кристалл, 2) не нужно настраиваться в резонанс по частоте для волн, дающих основную интерференционную картину, 3) более слабые требования на пороговые величины.

Авторы приносят благодарность Б.Я.Зельдовичу за полезные обсуждения данной работы.

### Список литературы

- [1] Photorefractive Materials and Their Applications / Gunter P., Huignard J.-P. Ed. I, II. Springer-Verlag, 1988, 1989.
- [2] Mallick S., Imbert B., Duccolet H. et al. // J. Appl. Phys. 1988. Vol. 63. P. 5660.
- [3] Webb D.J., Solytar L. // Opt. Comm. 1990. Vol. 74. P. 386.
- [4] Новиков А., Одулов С. // УФЖ. 1987. Т. 32. С. 1514.
- [5] Novicov A., Odulov S., Jungen R. et al. // Technical Digest of Topical Meeting on Photorefractive Materials, Effects and Devices, 1991. Optical Society of America. Washington, D.C., 1991. Vol. 14. P. 440-442.
- [6] Glansdorff P., Prigogine I. Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuation. London: Wiley, 1971.
- [7] Ringhofer K.H., Solytar L. // Appl. Phys. Lett. 1988. Vol. 53. P. 1039.
- [8] Ringhofer K.H., Solytar L. // Appl. Phys. B. 1989. Vol. 48. P. 395.
- [9] Одулов С. // УФЖ. 1989. Т. 32. С. 145.
- [10] Erbschloe D.R., Solytar L. // Appl. Phys. Lett. 1988. Vol. 53. P. 1135.
- [11] Erbschloe D.R., Solytar L. // Electron. Lett. 1988. Vol. 24. P. 683.
- [12] Jones D.C., Solytar L. // Opt. Lett. 1989. Vol. 14. P. 743.
- [13] Au A.B., Solytar L., Ringhofer K.H. // Technical Digest of Topical Meeting on Photorefractive Materials, Effects and Devices, 1990. II. Aussois (France). Paper B4.
- [14] Nestiorkin O.P. // Opt. Comm. 1991. Vol. 81. P. 315.
- [15] Nestiorkin O.P. // Technical Digest of Topical Meeting on Photorefractive Materials, Effects and Devices, 1991. Optical Society of America, Washington, D.C. 1991. Vol. 14. P. 444-447.
- [16] Bledowski A., Sturman B., Otten J., Ringhofer K.H. // Technical Digest of Topical Meeting on Photorefractive Materials, Effects and Devices, 1991. Optical Society of America, Washington, D.C. 1991. Vol. 14. Paper WC22.
- [17] Казаринов П.Ф., Сурис П.А., Фукс Б.И. // ФТП. 1972. Т. 6. С. 572.
- [18] Fuchs B.I., Kagan M.S., Suris R.A., Zhudnova N.G. // Phys. Stat. Sol. (A). 1977. Vol. 40. P. K61.

- [19] *Stepanov S.I., Kulikov V.V., Petrov M.P.* // Opt. Commun. 1982. Vol. 44. P. 19.
- [20] *Valley G.C.* // JOSA. B1. 1984. P. 868.
- [21] *Refregier Rh., Solyman L., Raibenbach H., Huignard J.-P.* // J. Appl. Phys. 1985. Vol. 58. P. 45.
- [22] *Stepanov S.I., Petrov M.P.* // Photorefractive Materials and Their Applications. Springer-Verlag, 1988, 1989. Vol. 1. Chapter 9.
- [23] *Nestiorkin O.P., Zeldovich B.Ya.* // J. Moscow Phys. Soc. 1991. Vol. 1. P. 231.
- [24] *Stepanov S.I., Petrov M.P.* // Opt. Commun. 1985. Vol. 53. P. 292.
- [25] *Valley G.C., Lam J.F.* // Photorefractive Materials and Their Applications. Springer-Verlag, 1988, 1989. Vol. 1. Chapter 3. P. 75.
- [26] *Pinykh P.N., Nestiorkin O.P., Zeldovich B.Ya.* // JOSA. 1991. B8. P. 1042.
- [27] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Классическая механика. М.: Наука, 1988.
- [28] *Doogin A.V., Pinykh P.N., Nestiorkin O.P., Shernakov Ye.P.* JOSA. (to be published).
- [29] *Чемаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1990.

Челябинский государственный технический  
университет

Поступило в Редакцию  
12 августа 1992 г.