1993 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 63, в. 6
1993 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 63, N 6

01;07

КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ СВЕРХРЕШЕТКА КАК ВЫСОКОДОБРОТНЫЙ РЕЗОНАТОР РЕНТГЕНОВСКОГО ДИАПАЗОНА

С.Т.Завтрак, Г.Я.Слепян

Показано, что кристаллическая сверхрешетка является высокодобротным резонатором в рентгеновском диапазоне длин волн. Получены характеристические уравнения для различных групп собственных мод сверхрешетки в условиях брэгговской дифракции, вычислены радиационная и диссипативная добротности. Показано, что добротность некоторых мод сверхрешетки может быть выше, чем у однородного плоскопараллельного кристаллического слоя.

Введение

Задачи теории волн в периодических структурах описывают широкий класс разнообразных физических явлений: дифракцию рентгеновских лучей в кристаллах [1], распространение СВЧ и оптического излучения в гофрированных волноводах [2], слоистых средах [3] и т.д. Особый интерес представляют резонансные дифракционные эффекты, в частности дифракция в условиях Вульфа–Брэгга [4]. В последние годы значительное внимание привлекли к себе сверхрешетки — сложные периодические структуры с двумя масштабами периодичности [5]. Их изучение привело к обнаружению ряда новых явлений в полупроводниках, системах полупроводник–пьезодиэлектрик и т.д. Фундаментальный обзор последних достижений имеется в [5].

Использование периодических структур, в частности сверхрешеток, открывает возможности существенного уменьшения тепловых потерь по сравнению с однородными волноведущими структурами из того же материала [2,5]. В СВЧ диапазоне эти возможности уже используются на практике для создания гибких волноводов с малым затуханием [6,7], высокодобротных резонаторов [8] и т.д.

Цель данной работы — проанализировать возможности сверхрешеток применительно к задаче создания высокодобротных открытых резонаторов рентгеновского диапазона. В качестве модели резонатора рассматривается сверхрешетка, представляющая систему из параллельных плоских кристаллических пластинок, разделенных вакуумными промежутками. Геометрия резонатора и основные обозначения показаны на рисунке. Рассматриваемые собственные моды имеют по x зависимость $\exp(jkx\sin\theta)$, где $\theta \approx \theta_Б$, $\theta_Б$ — угол Брэгга, $k = \omega/c$ — волновое число в вакууме.

Матрица преобразования

Пусть внутри слоя $n\Lambda<z<L+n\Lambda$ $(n = 0,\pm 1,\ldots)$ относительная диэлектрическая восприимчивость описывается пространственно-периодической функцией координат

$$\chi(\mathbf{r}) = \chi\left(\mathbf{r}+\frac{2\pi\boldsymbol{\tau}}{(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau})}\right)$$

$\boldsymbol{\tau}$ — вектор обратной решетки. Вне слоя $\chi(\boldsymbol{\tau}) = 0$. Предположим, что выполняются следующие условия: 1) $|\chi| \ll 1$; 2) поглощение в кристалле достаточно мало, так что $\chi'' \ll \chi'$ (χ', χ'' — соответственно действительная и мнимая части диэлектрической восприимчивости); 3) отражение от кристаллов происходит по Брэггу, т.е. $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{z}_0\tau$, $\mathbf{z}_0$ — единичный вектор вдоль оси z.

Цель данного раздела — в рамках сделанных допущений записать матрицу преобразования одного периода рассматриваемой структуры. Это позволит в дальнейшем получить матрицу преобразования сверхрешетки из N элементов и характеристическое уравнение для ее собственных частот. В основу анализа нами положена классическая теория дифракции рентгеновских лучей в кристаллах применительно к одиночному кристаллическому слою. В рамках двухволнового приближения теории дифракции система уравнений для одиночного слоя имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} B_1 &= C_1 + C_2,\\ B_2 &= C_1S_1 + C_2S_2,\\ D_1 &= e^{jk_{z1}L}C_1 + e^{jk_{z2}L}C_2,\\ D_2 &= e^{jk_{z1}L}C_1S_1 + e^{jk_{z2}L}C_2S_2, \end{aligned} \tag{1}$$

B_i, C_i, D_i — неизвестные коэффициенты,

$$d = \frac{2k_{0z}\tau+\tau^2}{2k^2},$$

$$k_{z1,2} = k\left[\cos\theta_\text{Б} \pm \frac{1}{2\cos\theta_\text{Б}}\sqrt{(\alpha-\chi_0)^2 - |C|^2\chi_\tau\chi_{-\tau}}\right], \quad k_{0z} = k\cos\theta,$$

χ_0, χ_τ — фурье-коэффициенты диэлектрической восприимчивости $\chi(\boldsymbol{\tau})$, $S_{1,2} = e^{\pm V}$, $y = \operatorname{ch}V = (\alpha-\chi_0)/C\sqrt{\chi_\tau\chi_{-\tau}}$, $C = 1$ для σ-поляризации и $C = \cos 2\theta_\text{Б}$ для π-поляризации.

Матрица преобразования A-слоя определяется равенством [5]

$$\begin{pmatrix} B_1\\ B_2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} D_1\\ D_2\end{pmatrix},$$

таким образом, для нахождения ее элементов a_{ij} достаточно из (1) исключить C_i, а B_i выразить через D_i. Окончательно получаем

$$a_{11} = \left[\cos(F\sqrt{y^2-1}) + \frac{jy}{\sqrt{y^2-1}}\sin(F\sqrt{y^2-1})\right]e^{-jk\cos\theta_\text{Б}L}, \tag{2}$$

$$a_{12} = -a_{21} = j\frac{\sin(F\sqrt{y^2-1})}{\sqrt{y^2-1}}e^{-jk\cos\theta_{\text{Б}}L}, \tag{3}$$

$$a_{22} = \left[\cos(F\sqrt{y^2-1}) - \frac{jy}{\sqrt{y^2-1}}\sin(F\sqrt{y^2-1})\right]e^{-jk\cos\theta_{\text{Б}}L}, \tag{4}$$

где $F = |C|\,kL\sqrt{\chi_\tau\chi_{-\tau}}/2\cos\theta_{\text{Б}}$.

Теперь можно выразить матрицу преобразования $\tilde{A}$ одного периода (кристаллический слой + вакуумный промежуток), перемножая матрицу, определенную равенствами (2)–(4), с матрицей преобразования вакуумного промежутка ширины L_1. Результат имеет следующий вид:

$$\tilde{a}_{11} = a_{11}e^{-jk_{0z}L_1}, \tag{5}$$

$$\tilde{a}_{12} = a_{12}e^{jk_{0z}L_1}, \tag{6}$$

$$\tilde{a}_{21} = a_{21}e^{-jk_{0z}L_1}, \tag{7}$$

$$\tilde{a}_{22} = a_{22}e^{jk_{0z}L_1}. \tag{8}$$

Характеристическое уравнение

Следующий этап анализа заключается в том, чтобы, исходя из матрицы преобразования одного элемента, определяемой равенствами (5)–(8), получить матрицу преобразования N-элементной сверхрешетки. Для этого необходимо выполнить возведение матрицы $\tilde{A}$ в N-ю степень, учитывая при этом, что матрица $\tilde{A}$ унимодулярна ($\text{Det}\tilde{A} = 1$). Стандартный аппарат для выполнения этой операции — теорема Абелеса [5]. В нашем случае, однако, непосредственное ее применение приводит к весьма громоздким выкладкам, поэтому мы будем использовать принципиально эквивалентный, но аналитически более простой прием, основанный на аппарате матриц Паули [9]. Обозначим

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и

$$\boldsymbol{\beta\sigma} = \sum_{i=1}^{3}\beta_i\sigma_i,$$

где $\boldsymbol{\beta}$ — некоторый 3-вектор с декартовыми компонентами β_i.

Согласно [9], для матрицы $\tilde{A}$ существует вектор $\boldsymbol{\beta}$, такой, что

$$\tilde{A} = \exp(j\boldsymbol{\beta\sigma}) = \cos\beta + j\frac{(\boldsymbol{\beta\sigma})}{\beta}\sin\beta, \tag{9}$$

где $\beta = (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})^{1/2}$.

Чтобы определить требуемый вектор $\boldsymbol{\beta}$, необходимо поэлементно приравнять матрицу (9) равенствам (5)–(8). При этом получаем

$$\cos\beta = \cos(F\sqrt{y^2-1})\cos\varphi + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\sin(F\sqrt{y^2-1})\sin\varphi, \tag{10}$$

$$\frac{\beta_3}{\beta}\sin\beta = -\cos(F\sqrt{y^2-1})\sin\varphi + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\sin(F\sqrt{y^2-1})\cos\varphi, \tag{11}$$

$$\frac{\sin\beta}{\beta}(\beta_1 - j\beta_2) = \frac{\sin(F\sqrt{y^2-1})}{\sqrt{y^2-1}}e^{j\varphi}, \tag{12}$$

где $\varphi = k_{0z}L_1$.

Из (9), в частности, вытекает, что $\cos\beta = (\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22})/2$.

С учетом (9)–(12) для N-й степени матрицы $\tilde{A}$ имеем

$$\tilde{A}^N = \cos\beta N + j\frac{\beta\sigma}{\beta}\sin\beta N. \tag{13}$$

Коэффициент отражения от N-элементной сверхрешетки имеет вид

$$R_N = \frac{(\tilde{A}^N)_{12}}{(\tilde{A}^N)_{22}} = \frac{j\Lambda_N\frac{\sin(F\sqrt{y^2-1})}{\sqrt{y^2-1}}}{\cos\beta N + j\Lambda_N\left[\cos(F\sqrt{y^2-1})\sin\varphi - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\sin(F\sqrt{y^2-1})\cos\varphi\right]}, \tag{14}$$

где $\Lambda_N = \sin\beta N/\sin\beta$.

В предельном случае $L_1 \to 0$ из (14) мы получаем, как и должно быть, отношение a_{12}/a_{22}, в котором a_{12}, a_{22} определены равенствами (3), (4), но в качестве толщины кристалла выступает величина NL.

Характеристическое уравнение, определяющее собственные колебания системы, имеет вид [5]

$$(\tilde{A}^N)_{22} = 0 \tag{15}$$

или

$$\cos\beta N + j\Lambda_N\left[\cos(F\sqrt{y^2-1})\sin\varphi - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\sin(F\sqrt{y^2-1})\cos\varphi\right] = 0. \tag{16}$$

Это уравнение следует решать относительно комплексных волновых чисел $k = k' + jk''$. Действительные части собственных волновых чисел определяют резонансные частоты системы, мнимые части — затухание, обусловленное как поглощением рентгеновских лучей в резонансной системе, так и излучением их за ее пределы.

Резонансные частоты и добротности собственных колебаний

В данном разделе мы дадим классификацию собственных мод сверхрешетки, получим и проанализируем формулы для добротности собственных мод. Собственные моды сверхрешетки мы разделим на две группы. К первой группе отнесем моды, близкие к модам одиночного кристаллического слоя и лишь слегка искаженные взаимодействием элементов. Ко второй группе отнесем моды, не имеющие аналогов среди мод одиночного слоя, т.е. их формирование целиком обусловлено взаимодействием элементов в сверхрешетке.

Моды первой группы, как следует из их определения, в первом приближении описываются уравнением (16) с $N = 1$ или уравнением

$$\sin(F\sqrt{y^2-1}) = \frac{j\sqrt{y^2-1}}{y}\cos(F\sqrt{y^2-1}). \tag{17}$$

Полагая $k = k' + jk''$, получаем

$$F\sqrt{y^2-1} \approx F'\sqrt{y'^2-1}\left\{1 + j\frac{k''}{k'} + \frac{j[y'(\alpha''-\chi_0'') - \chi_\tau''\,|C|]}{\chi_\tau'\,|C|\,(y'^2-1)}\right\}, \tag{18}$$

где $F' = \chi_\tau'\,|C|\,k'L/2\cos\theta_Б$, $y' = (\alpha' - \chi_0')/\chi_\tau'\,|C|$, $\alpha' = \tau(2k'\cos\theta_Б + \tau)/2k'^2$, $\alpha'' = -2k''\cos^2\theta_Б/k'$.

Предположим, что $F' \gg 1$. Тогда решение (17) (или в общем случае (16)) можно искать в виде

$$F\sqrt{y^2-1} = \pi m + j\delta,$$

где m — целое число, δ — малая поправка.

Учитывая (18) и выражая из (16) k'' методом возмущений, получаем для добротности Q следующее выражение:

$$\frac{1}{Q} = -\frac{2k''}{k'} = \frac{\chi_0'' + \dfrac{\chi_\tau''\,|C|}{y'}}{\cos^2\theta_Б} + \frac{\chi_\tau'\,|C|\,(\pi m)^2}{Ny'^2F'^3\cos^2\theta_Б}. \tag{19}$$

Первое слагаемое в (19) описывает затухание колебаний за счет поглощения, второе — за счет излучения. Удобно ввести парциальные радиационную и диссипативную добротности, пользуясь соотношением

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{дисс}} + \frac{1}{Q_{рад}},$$

где

$$\frac{1}{Q_{дисс}} = \frac{\left[\chi_0'' + \dfrac{\chi_\tau''\,|C|}{y'}\right]}{\cos^2\theta_Б}, \tag{20}$$

$$\frac{1}{Q_{рад}} = \frac{\chi_\tau'\,|C|\,(\pi m)^2}{Ny'^2F'^3\cos^2\theta_Б}. \tag{21}$$

Следует отметить, что первое и второе слагаемые в числителе (20) могут иметь разные знаки и частично компенсировать друг друга. В этом проявляется известный в кристаллооптике эффект Бормана [1]. Он максимально выражен вблизи одной из границ "столика Дарвина", когда $y' \to -1$; при этом $Q_{\text{дисс}}$ максимальна.

Любопытно отметить что $Q_{\text{дисс}}$ не зависит от числа элементов в сверхрешетке N, в то время как $Q_{\text{рад}}$ с увеличением N растет по линейному закону. Эти результаты имеют четкий физический смысл. Добротность пропорциональна отношению средних за период запасенной энергии и мощности потерь. Энергия рассматриваемых мод практически полностью сосредоточена внутри кристаллических слоев и имеет такое же пространственное распределение, как и для одиночного слоя. Но с ростом N как запасенная в сверхрешетке энергия, так и мощность тепловых потерь возрастают по линейному закону, в то время как мощность радиационных потерь от N не зависит (последние формируются только двумя краевыми элементами сверхрешетки).

Перейдем к рассмотрению мод второй группы. Любопытно, что в нее входят резонансы внутри "столика Дарвина", когда $|y| \leqslant 1$. Эти резонансы не имеют аналогов в однородном кристалле, который при условии $|y| \leqslant 1$ оказывается непрозрачным.

Уравнение (16) запишем в виде

$$\sin(\beta N) = \frac{j\beta}{\beta_3}\cos(\beta N) \tag{22}$$

и будем решать его совместно с (10), (11), предполагая выполненными условия $F' \gg 1$, $|y'| \leqslant 1$, $F'\sqrt{1-y'^2} \gg 1$. Решение ищем в виде $\beta N = \pi m + j\delta$, где δ — малая поправка, m — целое число. Величина δ выражается при помощи метода теории возмущений

$$\delta \approx \operatorname{Re}\left(\frac{\beta}{\beta_3}\right) \cong -\frac{2(1-y'^2)\sin\left(\dfrac{m\pi}{N}\right)}{\sin(k'L_1\cos\theta_{\text{Б}})} e^{-F'\sqrt{1-y'^2}}. \tag{23}$$

Подставляя найденное с учетом (23) значение β в (10), будем решать его относительно неизвестного комплексного k, отдельно приравнивая действительные и мнимые части. В результате получим следующие соотношения для $Q_{\text{дисс,рад}}$

$$\frac{1}{Q_{\text{дисс}}} = \frac{\chi_0'' + y'\chi_\tau''\,|C|}{\cos^2\theta_{\text{Б}}(1+F_1\sqrt{1-y'^2})}, \tag{24}$$

$$\frac{1}{Q_{\text{рад}}} = \frac{4(1-y'^2)^{5/2}\sin^2\left(\dfrac{m\pi}{N}\right)e^{-2F'\sqrt{1-y'^2}}}{N\sin^2(k'L_1\cos\theta_{\text{Б}})(1+F_1\sqrt{1-y'^2})}\chi_\tau'\,|C|, \tag{25}$$

где $F_1 = k'L_1\chi_\tau'\,|C|/2\cos\theta_{\text{Б}}$.

Как и в (20), числитель (24) состоит из двух слагаемых, которые могут иметь разный знак и частично компенсировать друг друга (эффект Бормана). Как и в (20), эффект Бормана выражен наиболее ярко вблизи одной из границ "столика Дарвина" ($y' \to -1$). Но в отличие от (20), (24) содержит еще один фактор повышения $Q_{\text{дисс}}$ — множитель $\left\{1 + F_1\sqrt{1-y'^2}\right\}^{-1}$. Этот множитель для реальных параметров кристаллов может иметь значительную величину. Например, если сделать зазор между пластинками равным их толщине, то для реальных кристаллов с $F = F_1 \cong 200$ [1] получаем уменьшение диссипативных потерь (повышение добротности) примерно на 2 порядка.

Физический механизм повышения $Q_{\text{дисс}}$ состоит в том, что поле собственных мод данного типа сосредоточено в вакуумных промежутках и лишь на достаточно малую глубину проникает в поглощающий кристалл.

В заключение рассмотрим моды вне "столика Дарвина", характеризуемые условием

$$\cos(F'\sqrt{y'^2-1}) = 0. \tag{26}$$

Используя это условие и применяя изложенную выше методику, мы получаем вместо (23)

$$\delta \approx \mathrm{Re}\left(\frac{\beta}{\beta_3}\right) \cong (-1)^n \frac{\sqrt{y'^2-1}\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{y'\cos(k'L_1\cos\theta_{\text{Б}})}. \tag{27}$$

Аналогично для $Q_{\text{дисс}}$ получаем

$$\frac{1}{Q_{\text{дисс}}} = \frac{\chi_0'' + \chi_\tau''|C|\left(\frac{g+y'}{1+gy'}\right)}{\left[\cos^2\theta_{\text{Б}} + \frac{\sqrt{y'^2-1}y'\varphi_0\chi_{tau}'|C|}{2(gy'+1)}\right]}, \tag{28}$$

$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\sqrt{y'^2-1}$, n четное, $g = (n+1/2)\pi$,

$$\frac{1}{Q_{\text{дисс}}} = \frac{\chi_0'' + \chi_\tau''|C|\left(\frac{g-y'}{gy'-1}\right)}{\left[\cos^2\theta_{\text{Б}} - \frac{\sqrt{y'^2-1}y'\varphi_0\chi_\tau'|C|}{2(gy'-1)}\right]}, \tag{29}$$

n нечетное.

Для рассматриваемых мод характерны весьма малые тепловые потери. Основная часть их запасенной энергии также сосредоточена в вакуумных промежутках, хотя кристалл и прозрачен. Это обусловлено выполнением "антирезонансного" условия (26), благодаря которому внутри кристаллических пластинок парциальные волны складываются в противофазе.

Еще одна важная особенность мод данного класса заключается в том, что для них эффект Бормана оказывается ярко выраженным не только у границы "столика Дарвина", но и при существенном удалении от нее.

Заключение

Показано, что сверхрешетка из кристаллических слоев, разделенных вакуумными промежутками, представляет собой высокодобротный резонатор рентгеновского диапазона волн. Среди собственных мод такого резонатора имеются моды с более высокой добротностью, чем моды однородного плоского кристаллического слоя. Эффект возникновения собственных мод с повышенной добротностью является достаточно универсальным, т.е. не зависящим от физической природы образования сверхрешетки (стратификация кристалла, воздействие ультразвуком [10] и т.д.).

Авторы признательны В.Г.Барышевскому и Ф.Г.Бассу за обсуждение и поддержку данной работы.

Список литературы

[1] *Пинскер З.Г.* Динамическое рассеяние рентгеновских лучей в идеальных кристаллах. М.: Наука, 1974. 358 с.
[2] *Ильинский А.С., Слепян Г.Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М., 1983. 231 с.
[3] *Булгаков А.А., Тимченко А.И.* // ФТТ. 1986. Т. 28. Вып. 2. С. 510–516.
[4] *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987. 616 с.
[5] *Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П.* Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. М.: Наука, 1989. 287 с.
[6] *Альховский Э.А., Головченко Г.С., Ильинский А.С.* и др. Гибкие волноводы в технике СВЧ. М.: Радио и связь, 1986. 127 с.
[7] *Clarricoats P.J.B., Olver A.D., Chong S.L.* // Proc. IEE. 1975. Vol. 122. N 11. P. 1173–1186.
[8] *Ильинский А.С., Слепян Г.Я.* // РиЭ. 1986. Т. 31. № 10. С. 1915–1917.
[9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 752 с.
[10] *Барышевский В.Г., Дубовская И.Я., Поликарпов И.В.* // ДАН БССР. 1988. Т. 32. № 9. С. 806–809.

Научно-исследовательский институт ядерных проблем
при Белорусском университете
Минск

Поступило в Редакцию
21 мая 1992 г.