

01:05:08

©1993 г.

МАГНИТОУПРУГИЕ СИЛЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ДЛИННОГО СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО СТЕРЖНЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С.Г.Бодров, А.Д.Данилов, А.И.Русаков, А.А.Семенов

Теоретически определена величина магнитоупругих сил, возникающих при изгибных колебаниях бесконечнодлинного круглого в сечении стержня для конечной и бесконечной проводимости. Проанализировано влияние на эти силы сверхпроводящего экрана.

Введение

Собственная частота механических колебаний сверхпроводящего стержня в магнитном поле определяется не только упругими свойствами и плотностью материала стержня, но и величиной магнитоупругих сил, связанных с взаимодействием наводимых в стержне при колебаниях токов с внешним магнитным полем. Величина этих сил может быть найдена с помощью системы уравнений магнитоупругости [1,2]. При решении этой системы уравнений сверхпроводник с жестко закрепленными на центрах пиннинга вихрями может рассматриваться как идеальный ($\sigma \rightarrow \infty$) проводник [3], а сверхпроводник в режиме термически активированного потока — как проводник с конечной проводимостью.

В предлагаемой работе определена величина магнитоупругих сил, возникающих при изгибных колебаниях круглого в сечении стержня как для случая конечной, так и бесконечной проводимости. Проанализировано влияние на величину магнитоупругих сил сверхпроводящего экрана, поверхность которого параллельна оси стержня. Показано, что использование экрана позволяет по измеренным значениям частоты колебаний в магнитном поле определять кембеловскую глубину проникновения λ .

1. Сверхпроводящий стержень

Рассмотрим бесконечный цилиндрический стержень радиусом r_0 из сверхпроводника второго рода, находящийся в магнитном поле, параллельном его оси $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ ($B_0 = \text{const}$). В стационарном состоянии магнитное поле полностью проникает в сверхпроводник.

Допустим, что в стержне возбуждены изгибные колебания малой амплитуды в плоскости xz . Тогда смещение точек поверхности цилиндра запишется в виде

$$\xi_x(r_0) = \xi_0 e^{i\omega t + ikz} \quad (\xi_0 = \text{const}). \quad (1.1)$$

Колебания сверхпроводника вызывает возмущение магнитного поля как вне, так и внутри его. Возмущение магнитного поля вне стержня можно записать в виде

$$\mathbf{V}^* = \text{grad } \psi, \quad (1.2)$$

где ψ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \psi = 0. \quad (1.3)$$

Решение уравнения (1.3) при естественном условии ограниченности при $r \rightarrow \infty$ можно записать в виде

$$\psi = AK_1(kr) \cos \varphi e^{ikz + i\omega t}, \quad (1.4)$$

здесь A — постоянная интегрирования. $K_n(x)$ — цилиндрическая функция n -много аргумента.

Из (1.4) при учете (1.2) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_r &= kAK_1'(kr) \cos \varphi e^{ikz + i\omega t}, \\ \mathbf{V}_\varphi &= -1/2AK_1(kr) \sin \varphi e^{ikz + i\omega t}, \\ \mathbf{V}_z &= ikAK_1(kr) \cos \varphi e^{ikz + i\omega t}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из условий равенства нулю нормальной компоненты магнитного поля на поверхности сверхпроводника выразим постоянную интегрирования через смещение

$$A = i \frac{B_0}{K_1'(kr_0)} \xi_0. \quad (1.6)$$

Таким образом, компоненты магнитного поля (1.5) запишутся в виде

$$\begin{aligned} B_r &= iB_0 \frac{K_1'(kr)}{K_1'(kr_0)} k \xi_0 \cos \varphi e^{ikz + i\omega t}, \\ B_\varphi &= -iB_0 \frac{K_1(kr)}{K_1'(kr)} \frac{\xi_0}{r} \sin \varphi e^{ikz + i\omega t}, \\ B_z &= B_0 \left[1 - \frac{K_1(kr)}{K_1'(kr_0)} k \xi_0 \cos \varphi e^{ikz + i\omega t} \right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Магнитное поле создает давление на поверхности сверхпроводника, которое в линейном приближении относительно ξ_0 имеет вид

$$P_{\text{мнар}} = \frac{B_0^2}{2\mu} \left[1 - 2 \frac{K_1(kr_0)}{K_1'(kr_0)} k \xi_0 \cos \varphi e^{ikz + i\omega t} \right]. \quad (1.8)$$

Дополнительные упругие силы, возникающие из-за влияния внешнего магнитного поля на сверхпроводник и действующие на единицу длины проводника, равны

$$f_{\text{хнар}} = -r_0 \int_0^{2\pi} P_{\text{мнар}} \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi B_0^2 k r_0 K_1(kr_0)}{\mu_0 K_1'(kr_0)} \xi_0 e^{ikz+i\omega t}. \quad (1.9)$$

Возмущение магнитного поля внутри сверхпроводника в линейном приближении имеет вид

$$\mathbf{B}^* = \text{rot}[\xi \mathbf{B}_0] \quad (1.10)$$

и соответственно

$$f_{\text{хвн}} = -\frac{\pi k^2 r_0^2 B_0^2}{\mu_0} \xi_0 e^{ikz+i\omega t}. \quad (1.11)$$

Таким образом, дополнительная полная магнитоупругая сила, действующая на единицу длины колеблющегося сверхпроводника, будет равна

$$f_x = -\frac{\pi k^2 r_0^2 B_0^2}{\mu_0} \xi_0 e^{ikz+i\omega t} \left[1 - \frac{K_1(kr_0)}{kr_0 K_1'(kr_0)} \right]. \quad (1.12)$$

2. Стержень с конечной проводимостью

Рассмотрим бесконечный проводящий цилиндр радиуса r_0 , находящийся в магнитном поле, параллельном его оси $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ ($B_0 = \text{const}$).

Далее положим, что стержень начинает совершать изгибные гармонические колебания в плоскости xz . Тогда смещение точек поверхности цилиндра запишется в виде

$$\xi_x(r) = \xi_0 e^{ikz+i\omega t} \quad (\xi_0 = \text{const}). \quad (2.1)$$

Колебания проводника, так же как и сверхпроводника, вызывают возмущение магнитного поля. Эти возмущения вне проводника можно записать в виде

$$\mathbf{B}^* = \text{grad } \psi, \quad (2.2)$$

где ψ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \psi = 0. \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.3) при естественном условии ограниченности при $r \rightarrow \infty$ можно записать в виде

$$\psi = B K_1(kr) \cos \varphi e^{ikz+i\omega t}, \quad (2.4)$$

где B — постоянная интегрирования.

Соответственно

$$B_r^* = k B K_1'(kr) \cos \varphi e^{ikz+i\omega t},$$

$$B_\varphi^* = -1/r B K_1(kr) \sin \varphi e^{ikz+i\omega t},$$

$$B_z^* = ikBK_1(kr) \cos \varphi e^{ikz+i\omega t}. \quad (2.5)$$

Возмущение магнитного поля в проводнике описывается уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{V}\mathbf{B}] - \frac{1}{\mu_0\sigma} \text{rot rot } \mathbf{B}^*, \quad \text{div } \mathbf{B}^* = 0, \quad (2.6)$$

где σ — проводимость материала стержня.

В рассматриваемом случае уравнение (6) в линейном приближении относительно ξ_0 записывается в виде

$$\Delta \mathbf{B}^* - i\omega\mu_0\sigma \mathbf{B}^* = i\omega\mu_0\sigma \text{rot}[\xi \mathbf{B}_0]. \text{div } \mathbf{B}^* = 0 \quad (2.7)$$

Решение уравнений (2.7) при естественном условии ограниченности при $r = 0$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} B_r^* &= \left[B_0 \frac{ik(\alpha^2 - k^2 r_0^2)}{\alpha^2} \xi_0 - i \frac{kr_0}{\alpha} N I_1' \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right) + 1/r M I_1 \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right) \right] \cos \varphi e^{ikz+i\omega t}, \\ B_\varphi^* &= \left[-B_0 \frac{ik(\alpha^2 - k^2 r_0^2)}{\alpha^2} \xi_0 + i \frac{kr_0^2}{\alpha^2 r} N I_1 \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right) - \alpha/r_0 M I_1' \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right) \right] \sin \varphi e^{ikz+i\omega t}, \\ B_z^* &= N I_1 \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right) \cos \varphi e^{ikz+i\omega t}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= (k^2 + i\mu_0\sigma\omega) r_0^2 = \left(k^2 + \frac{2i}{\delta^2} \right) r_0^2, \\ \delta^2 &= \frac{2}{\mu_0\sigma\omega}. \end{aligned}$$

Из условий отсутствия тока через возмущенную поверхность, т.е. $(\text{rot}_r \mathbf{B})|_{r=r_0} = 0$, получаем

$$M = - \frac{i(\alpha^2 - k^2 r_0^2)}{k\alpha^2} \frac{I_1(\alpha)}{\alpha I_1'(\alpha)} N - \frac{ikr_0(\alpha^2 - k^2 r_0^2)}{\alpha^3 I_1'(\alpha)} \xi_0 B_0. \quad (2.9)$$

Из условий непрерывности магнитного поля на возмущенной границе находим

$$N = \frac{k^2 r_0 (\alpha^2 - k^2 r_0^2) \varphi_1(\alpha) [1 - \varphi_1(\alpha)] \psi_1(kr_0)}{I_1(\alpha) \{ [k^2 r_0^2 + (\alpha^2 - k^2 r_0^2) \varphi_1^2(\alpha)] \psi_1(kr_0) - \alpha^2 \varphi_1(\alpha) \}} \xi_0 B_0, \quad (2.10)$$

здесь введены обозначения

$$\varphi_1(x) = \frac{I_1(x)}{x I_1'(x)}; \quad \psi_1(x) = \frac{K_1(x)}{x K_1'(x)}.$$

Сила, действующая со стороны магнитного поля на единицу длины колеблющегося проводника, равна

$$f_x = \frac{B_0}{\mu_0} \int_0^{r_0} r dr \int_0^{2\pi} \text{rot}_y \mathbf{B}^* d\varphi, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_y \mathbf{B}^* = \operatorname{rot}_r \mathbf{B}^* z \sin \varphi + \operatorname{rot}_\varphi \mathbf{B}^* \cos \varphi = & \left\{ -\frac{k^2 r_0 (\alpha^2 - k^2 r_0^2)}{\alpha^2} \xi_0 B_0 \left[1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{I_1' \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right)}{I_1'(\alpha)} \sin^2 \varphi - \frac{r_0}{r} \frac{I_1 \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right)}{\alpha I_1'(\alpha)} \cos^2 \varphi \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha^2 - k^2 r_0^2}{\alpha^2 r_0} N \left[\frac{I_1(\alpha)}{I_1'(\alpha)} I_1' \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right) \sin^2 \varphi + \frac{r_0}{r} \frac{I_1(\alpha) I_1 \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right)}{\alpha I_1'(\alpha)} \cos^2 \varphi - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{r_0}{r} I_1 \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right) \sin^2 \varphi - \alpha I_1' \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right) \cos^2 \varphi \right] \right\} e^{ikz+i\omega t}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.11) и произведя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} f_x = & -\frac{\pi k^2 r_0^2 \xi_0 B_0^2}{\mu_0} \frac{\alpha^2 - k^2 r_0^2}{\alpha^2} [1 - \varphi_1(\alpha)] \left\{ 1 + \right. \\ & \left. + \frac{(\alpha^2 - k^2 r_0^2) [1 - \varphi_1(\alpha)] \varphi_1(\alpha) \psi_1(kr_0)}{[k^2 r_z^2 + (\alpha - k^2 r_0^2) \varphi_1(\alpha)] \psi_1(kr_0) - \alpha^2 \varphi_1(\alpha)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Полученные из (2.13) зависимости от отношения r/δ действительной части магнитоупругой силы, определяющей изменение частоты и мнимой части, определяющей скорость затухания колебаний, показаны на рис. 1.

Нетрудно видеть, что если $\sigma \rightarrow \infty$, то $\psi_1(\alpha) \sim 1/\alpha$ ($|\alpha| \rightarrow \infty$) и (2.13) принимает вид

$$f_x \Big|_{|\alpha| \rightarrow \infty} = \frac{\pi k^2 r_0^2 \xi_0 B_0^2}{\mu_0} [1 - \psi_1(kr_0)], \quad (2.14)$$

что полностью совпадает с формулой (1.12) из раздела 1.

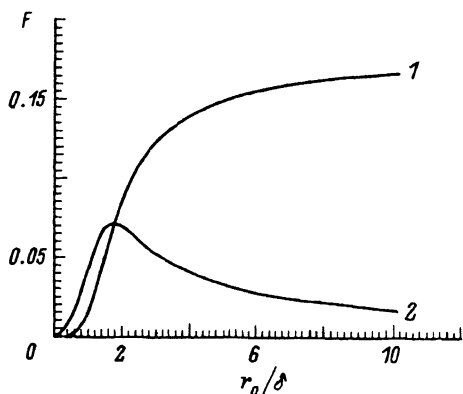


Рис. 1. Зависимости $F = f_x \frac{\mu_0}{\pi \xi_0 B_0^2}$ от r_0/δ .
1 — $\operatorname{Re} F(r_0/\delta)$, 2 — $\operatorname{Im} F(r_0/\delta)$, $kr_0 = 0.314$.

3. Сверхпроводящий стержень над сверхпроводящим экраном

Рассмотрим цилиндрический сверхпроводящий стержень радиуса r_0 , ось которого расположена на линии ($x = a$; $y = 0$). Сверхпроводящий экран занимает полупространство $x < 0$, внешнее поле направлено вдоль оси z , т.е. $\mathbf{V} = B_0 \mathbf{e}_z$. Если проводник начинает совершать изгибные гармонические колебания $\xi_x(z_0) = \xi_0 e^{ikz+i\omega t}$ ($\xi_0 = \text{const}$), то возмущение поля вне проводника при $x > 0$ можно представить как суперпозицию возмущений от двух колеблющихся цилиндрических проводников радиуса r_0 : первый — реальный, ось которого изначально располагалась на линии ($x = a$, $y = 0$); второй — зеркальноотраженный от сверхпроводящей поверхности с осью на линии ($x = -a$, $y = 0$), т.е.

$$\mathbf{V}^* = \text{grad}(\psi + \psi^*),$$

где

$$\Delta_{r,\varphi,z}\psi = 0; \quad \Delta_{R,\theta,z}\psi^* = 0. \quad (3.1)$$

Общее решение уравнения Лапласа при естественных условиях ограниченности при $z \rightarrow \infty$; $R \rightarrow \infty$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \psi + \psi^* &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n K_n(kr) \cos(n\varphi) + B_n K_n(kR) \cos(n\theta) \right) e^{ikz+i\omega t} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n K_n \left(k\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \right) \left[\left(\frac{x-a+iy}{x-a-iy} \right)^{\frac{n}{2}} + \left(\frac{x-a-iy}{x-a+iy} \right)^{\frac{n}{2}} \right] + \right. \\ &\left. + B_n K_n \left(k\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right) \left[\left(\frac{x+a+iy}{x+a-iy} \right)^{\frac{n}{2}} + \left(\frac{x+a-iy}{x+a+iy} \right)^{\frac{n}{2}} \right] \right\} e^{ikz+i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из условия равенства нулю нормальной составляющей магнитного поля на поверхности сверхпроводящего экрана, т.е.

$$B_x \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x}(\psi + \psi^*) \Big|_{x=0} = 0,$$

получаем

$$B_n = (-1)^n A_n. \quad (3.3)$$

Воспользуемся теорией сложения для бесселевых функций мнимого аргумента [4]

$$K_n(kR) \cos(n\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m K_{n+m}(2ka) I_m(kr) \cos(m\varphi) =$$

$$= K_n(2ka) I_0(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m I_m(kr) \left[K_{n+m}(2ka) + K_{n-m}(2ka) \right] \cos(m\varphi) \quad (r < 2a)$$

и представим потенциал магнитного поля для $r < 2a$ в виде

$$\begin{aligned}
 \psi + \psi^* &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left\{ K_n(kr) \cos(n\varphi) + (-1)^n K_n(2ka) I_0(kr) + \right. \\
 &+ (-1)^n \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m I_m(kr) \left[K_{n+m}(2ka) + K_{n-m}(2ka) \right] \cos(m\varphi) \left. \right\} e^{ikz+i\omega t} = \\
 &= A_0 K_0(kr) + I_0(kr) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n K_n(2ka) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_m K_m(kr) + \right. \\
 &+ (-1)^m I_m(kr) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \left[K_{n+m}(2ka) + K_{n-m}(2ka) \right] \left. \right\} \cos(m\varphi) e^{ikz+i\omega t}. \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Будем рассматривать только изгибные гармонические колебания, так как на возмущенной поверхности сверхпроводника должно выполняться условие

$$\mathbf{Bn} = 0, \quad (3.5)$$

где

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_x - 1/r_0 \mathbf{e}_y \xi_0 \sin(\varphi) e^{ikz+i\omega t} - ik\xi_0 \mathbf{e}_z - e^{ikz+i\omega t} \cos \varphi.$$

В линейном приближении условие (5) соответствует условию

$$B_r^* \Big|_{r=r_0} - ik\xi_0 B_0 e^{ikz+i\omega t} = 0. \quad (3.6)$$

Таким образом, из (3.4) и (3.5) получаем следующую систему уравнений для определения постоянных интегрирования A_n :

$$\begin{aligned}
 A_0 K_0'(k_0 r) - I_0'(kr_0) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n K_n(2ka) &= 0, \\
 A_1 K_1'(k_0 r) - I_1'(kr_0) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \left[K_{n+1}(2ka) + K_{n-1}(2ka) \right] &= i\xi_0 B_0, \\
 A_m K_m'(k_0 r) + (-1)^m I_m'(kr_0) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \left[K_{n+m}(2ka) + \right. \\
 &\left. + K_{n-m}(2ka) \right] = 0, \quad m \geq 2. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Полагаем $A_n = i\xi_0 B_0 C_n$, и соответственно бесконечная система уравнений (3.7) перепишется в безразмерном виде

$$C_1 K_0'(kr_0) + I_0'(kr_0) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n K_n(2ka) = 0,$$

$$C_1 K_1'(kr_0) - I_1'(kr_0) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n [K_{n+1}(2ka) + K_{n-1}(2ka)] = 1,$$

$$C_m K_m'(kr_0) + I_m'(kr_0) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n [K_{n+m}(2ka) + K_{n-m}(2ka)] = 0 \quad (m \geq 2). \quad (3.8)$$

Сила, действующая со стороны внешнего магнитного поля на единицу длины проводника,

$$f_{x \text{ нар}} = \frac{\pi k r_0 \xi_0 B_0^2}{\mu_0} \left\{ C_1 K_1(kr_0) - I_1(kr_0) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n [K_{n+1}(2ka) + K_{n-1}(2ka)] \right\} e^{ikz+i\omega t}. \quad (3.9)$$

Так как наличие экрана никоим образом не сказывается на возмущении поля внутри сверхпроводника, то, так же как и в (1.11),

$$f_{x \text{ вн}} = -\frac{\pi k^2 r_0^2 \xi_0 B_0^2}{\mu_0} \xi_0 e^{ikz+i\omega t}. \quad (3.10)$$

Таким образом, полная магнитоупругая сила, действующая на колеблющийся сверхпроводящий стержень над сверхпроводящим экраном, будет равна

$$f_x = \frac{\pi k^2 r_0^2 \xi_0 B_0^2}{\mu_0} \left[1 - \frac{1}{kr_0} \left\{ C_1 K_1(kr_0) - I_1(kr_0) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n [K_{n+1}(2ka) + K_{n-1}(2ka)] \right\} \right] \xi_0 e^{ikz+i\omega t}. \quad (3.11)$$

Рассчитанная по формуле (3.11) зависимость магнитоупругой силы от расстояния до экрана показана на рис. 2. Из этих зависимостей следует, что наличие экрана существенно (до 40%) изменяет магнитоупругие

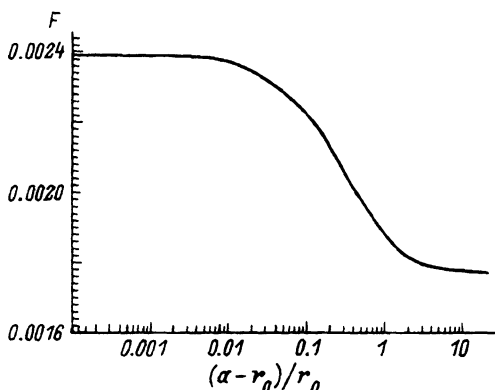


Рис. 2. Зависимость F от $(a - r_0)/r_0$, $kr_0 = 0.0314$.

силы, причем перемещение стержня относительно экрана сказывается на величине магнитоупругих сил, только если расстояние между поверхностью экрана и стержня лежит в диапазоне $0.1R_0 \leq a \leq R_0$.

В приведенных выше расчетах глубина проникновения возмущений магнитного поля в сверхпроводник считалась бесконечно малой. Реально же возмущение магнитного поля проникает в сверхпроводник на конечную глубину. Поэтому эффективное расстояние, определяющее величину магнитоупругих сил, оказывается большим, чем использованное в расчетах на сумму глубин проникновения магнитного поля в материалы экрана и стержня.

Сопоставление же измеренной и рассчитанной частот позволяет определить глубину проникновения возмущения магнитного поля в сверхпроводник.

4. Проводящий стержень над экраном

Магнитное поле вне проводника при $x > 0$ определяется (3.4).

Возмущение магнитного поля, так же как и в разделе 2, описывается уравнениями (2.7), т.е.

$$\Delta \mathbf{V}^* - i\omega t \sigma \mathbf{V}^* = i\omega \mu_0 \sigma \operatorname{rot}[\xi \mathbf{B}_0], \quad \operatorname{div} \mathbf{V}^* = 0 \quad (4.1)$$

Решение системы уравнений (4.1) при естественном условии ограниченности при $r = 0$ записывается в виде

$$\begin{aligned} B_r^* &= \left[\frac{ik(\alpha^2 - k^2 r_0^2)}{\alpha^2} \xi_0 B_0 \cos \varphi - ik \frac{r_0}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} N_n I_n' \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right) \cos(n\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} M_n I_n \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right) \cos(n\varphi) \right] e^{ikz+i\omega t}, \\ B_\varphi^* &= \left[-\frac{ik(\alpha^2 - k^2 r_0^2)}{\alpha^2} \xi_0 B_0 \sin \varphi - \frac{ikr_0}{\alpha^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} n N_n I_n \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right) \sin(n\varphi) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} M_n I_n' \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right) \sin(n\varphi) \right] e^{ikz+i\omega t}, \\ B_z^* &= \sum_{n=0}^{\infty} N_n I_n \left(\alpha \frac{r}{r_0} \right) \cos(n\varphi) e^{ikz+i\omega t}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь

$$\alpha^2 = (k^2 + i\mu_0 \sigma \omega) r_0^2 = \left(k^2 + \frac{2i}{\delta^2} \right) r_0^2; \quad \delta^2 = \frac{2}{\mu_0 \sigma \omega};$$

N_n, M_n — постоянные интегрирования.

Из условия отсутствия тока через возмущенную поверхность проводника, т.е. $\operatorname{rot}_r \mathbf{V}|_{r=r_0}$, получаем

$$M_1 = -\frac{i(\alpha^2 - k^2 r_0^2)}{\alpha^2 k} \frac{I_1(\alpha)}{\alpha I_1'(\alpha)} N_1 - \frac{i(\alpha^2 - k^2 r_0^2)}{\alpha^3 I_1'(\alpha)} \xi_0 B_0,$$

$$M_n = -\frac{in^2(\alpha^2 - k^2 r_0^2)}{\alpha^2 k} \frac{I_n(\alpha)}{\alpha I_n'(\alpha)} N_n. \quad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в (4.2) и используя условие непрерывности магнитного поля на возмущенной поверхности проводника (выражение для внешнего поля получаем из (3.4)), после ряда преобразований приходим к следующей бесконечной системе уравнений относительно A_n :

$$A_0 \left[\alpha K_1(kr_0)I_0(\alpha) + kr_0 K_0(kr_0)I_1(\alpha) \right] - \left[\alpha I_1(kr_0)I_0(\alpha) - kr_0 I_0(kr_0)I_1(\alpha) \right] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n K_n(2a) = 0,$$

$$A_1 \left\{ \alpha^3 kr_0 K_1'(kr_0)I_1(\alpha)I_1'(\alpha) - K_1(kr_0) \left[\alpha^2 k^2 r_0^2 I_1'^2(\alpha) + (\alpha^2 - k^2 r_0^2) I_1^2(\alpha) \right] \right\} - \left\{ \alpha^3 kr_0 I_1'(kr_0)I_1(\alpha)I_1'(\alpha) - I_1(kr_0) \left[\alpha^2 k^2 r_0^2 I_1'^2(\alpha) + (\alpha^2 - k^2 r_0^2) I_1^2(\alpha) \right] \right\} \times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \left[K_{n+1}(2ka) + K_{n-1}(2ka) \right] = i\alpha kr_0 (\alpha^2 - k\xi_0^2) \xi_0 B_0 I_2(\alpha) I_1(\alpha),$$

$$A_m \left\{ \alpha^3 kr_0 K_m'(kr_0)I_m(\alpha)I_m'(\alpha) - K_m(kr_0) \left[\alpha^2 k^2 r_0^2 I_m'^2(\alpha) + m^2 (\alpha^2 - k^2 r_0^2) I_m^2(\alpha) \right] \right\} + (-1)^m \left\{ \alpha^3 kr_0 I_m'(kr_0)I_m(\alpha)I_m'(\alpha) - I_m(kr_0) \left[\alpha^2 k^2 r_0^2 I_m'^2(\alpha) + m^2 (\alpha^2 - k^2 r_0^2) I_m^2(\alpha) \right] \right\} \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \left[K_{n+m}(2ka) + K_{n-m}(2ka) \right] = 0 \quad (m \geq 2). \quad (4.4)$$

Перейдем в (4.4) к безразмерным величинам, для этого произведем замену $A_m = i\xi_0 B_0 C_m$. Тогда

$$C_0 \left[\alpha K_1(kr_0)I_0(\alpha) + kr_0 K_0(kr_0)I_1(\alpha) \right] - \left[\alpha I_1(kr_0)I_0(\alpha) - kr_0 I_0(kr_0)I_1(\alpha) \right]$$

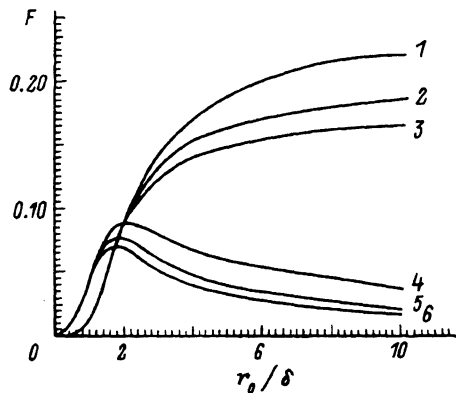


Рис. 3. Зависимости F от r_0/δ .
 1-3 — $\text{Re}F(r_0/\delta)$,
 4 — $\text{Im}F(r_0/\delta)$, $(a - r_0)/r_0 = 20$;
 5 — $\text{Im}F(r_0/\delta)$, $(a - r_0)/r_0 = 0.5$;
 6 — $\text{Im}F(r_0/\delta)$, $(a - r_0)/r_0 = 10^{-4}$;
 $kr_0 = 0.314$.

$$\begin{aligned}
& -kr_0 I_0(kr_0) I_1(\alpha) \Big] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n K_n(2ka) = 0, \\
& C_1 \left\{ \alpha^3 kr_0 K_1'(kr_0) I_1(\alpha) I_1'(\alpha) - K_1(kr_0) \left[\alpha^2 k^2 r_0^2 I_1'^2(\alpha) + \right. \right. \\
& \left. \left. + (\alpha^2 - k^2 r_0^2) I_1^2(\alpha) \right] \right\} - \left\{ \alpha^3 kr_0 I_1'(kr_0) I_1(\alpha) I_1'(\alpha) - \right. \\
& \left. - I_1(kr_0) \left[\alpha^2 k^2 r_0^2 I_1'^2 + (\alpha^2 - k^2 r_0^2) I_1^2(\alpha) \right] \right\} \times \\
& \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n \left[K_{n+1}(2ka) K_{n-1}(2ka) \right] = \alpha kr_0 (\alpha^2 - k^2 r_0^2) I_1(\alpha) I_2(\alpha), \\
& C_m \left\{ \alpha^3 kr_0 K_m'(kr_0) I_m(\alpha) I_m'(\alpha) - K_m(kr_0) \left[\alpha^2 k^2 r_0^2 I_m'^2(\alpha) + \right. \right. \\
& \left. \left. + m^2 (\alpha^2 - k^2 r_0^2) I_m^2(\alpha) \right] \right\} + (-1)^m \left\{ \alpha^3 kr_0 I_m'(kr_0) I_m(\alpha) I_m'(\alpha) - \right. \\
& \left. - I_m(kr_0) \left[\alpha^2 k^2 r_0^2 I_m'^2 + m^2 (\alpha^2 - k^2 r_0^2) I_m^2(\alpha) \right] \right\} \times \\
& \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n \left[K_{n+m}(2ka) K_{n-m}(2ka) \right] = 0 \quad (m \geq 2). \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Сила, действующая на единицу длины проводника,

$$\begin{aligned}
f_x = & \frac{B_0}{\mu_0} \int_0^{r_0} r dr \int_0^{2\pi} \text{rot}_y \mathbf{B}^* dy = -\frac{\pi k^2 r_0^2 (\alpha^2 - k^2 r_0^2)}{\alpha^2} \xi_0 B_0^2 \left(1 - \frac{I_1(\alpha)}{\alpha I_1'(\alpha)} \right) \times \\
& \times \left\{ 1 - \frac{1}{kr_0} \left[C_1 K_1(kr_0) - I_1(kr_0) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n (K_{n+1}(2ka) + K_{|n-1|}(2ka)) \right] \right\}. \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Зависимость величины силы от толщины скин-слоя для различных расстояний между стержнем и экраном показана на рис. 3. Нетрудно видеть, что если $\sigma \rightarrow \infty$, т.е. $|\alpha| \rightarrow \infty$, то система уравнений (4.5) переходит в систему уравнений (3.8), а выражение (4.6) для f_x переходит в (3.11).

Список литературы

- [1] Paria G. // Magneto-Elasticity and Magneto-Thermoelasticity in Applied Mechanism. London: Acad. Press, 1967. Vol. 10. P. 73.
- [2] Бодров С.Г., Семенов А.Ф. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 12. С. 14-20.
- [3] Brant E.H. // J. Low Temperature Phys. 1986. Vol. 63. N 3/4. P. 187-214.
- [4] Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М., 1949.

Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
16 марта 1992 г.