

01:07

©1993 г.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В ОДНОМОДОВОМ СКРУЧЕННОМ ВОЛОКНЕ С ДВОЙНЫМ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕМ

В.В.Брыксин, Л.И.Коровин, М.П.Петров

Развита теория распространения света в одномодовом волокне с двойным лучепреломлением, учитывающая скручивание волокна. Задача сведена к определению двух функций F_1 и F_2 , система дифференциальных уравнений для которых идентична уравнениям, описывающим квантовую двухуровневую систему. Функции F_1 и F_2 определяют состояние поляризации волны в волокне при специально выбранной поляризации на входе в волокно. Поле волны с произвольной начальной поляризацией связано с функциями F_1 и F_2 простыми линейными соотношениями. Задача решалась в линейном режиме, когда показатель преломления в волокне не зависит от интенсивности света. Найдены условия, при выполнении которых начальная поляризация периодически повторяется вдоль волокна. Если волокно скручено по произвольному периодическому закону, то всегда существуют две начальные поляризации, которые периодически повторяются вдоль волокна. Показано также, что имеет место и другой тип решения, при котором периодически повторяется любая начальная поляризация. Такое решение накладывает ограничения на тип скручивания. Проанализированы некоторые точно решаемые модели скрутки волокна.

Одномодовое оптическое волокно с двойным лучепреломлением используется в качестве датчиков различных величин, таких как давление, температура, электрическое и магнитное поля и т.п. [1,2]. Причем интерес проявляется не только к датчикам с сосредоточенными параметрами (как, например, в гидрофонах), но и к датчикам с распределенными параметрами. В устройствах с распределенными параметрами их чувствительность к внешнему сигналу зависит от того, совпадает ли пространственный период воздействия с каким-либо пространственным периодом, характеризующим световолоконный датчик. В качестве такого дополнительного параметра, обеспечивающего заданную периодичность структуры, может служить скрутка волокна. Кроме того, наличие пространственной периодичности в виде скрутки волокна в настоящее время эффективно используется в так называемых рокинг-фильтрах, которые служат нелинейными переключателями поляризации [3,4]. Наличие скрутки в некоторых случаях может играть и отрицательную роль. Поэтому анализ распространения света в скрученных волокнах является в настоящее время актуальной задачей. Задача о распространении света в скрученном одномодовом волокне для простейших ситуаций уже рассматривалась [5-9]. В настоящей работе развит метод, который по-

зволяет сравнительно простым образом находить решение для случая практически произвольного закона скрутки волокна и при произвольном состоянии поляризации света на входе в волокно. В частности, найдены условия, при которых возникает так называемый эффект периодической повторяемости начальной поляризации света в скрученном волокне. Поскольку этот эффект в определенном смысле аналогичен резонансным эффектам, то он может представлять интерес для повышения чувствительности волоконных датчиков с распределенными параметрами.

1. Основные уравнения

В настоящей работе ограничимся лишь линейным режимом, когда показатель преломления в волокне не зависит от интенсивности света. В двулучепреломляющем волокне скручивание вызывает изменения двух типов. Во-первых, в результате чисто геометрического эффекта направления главных осей эллипса поляризации перестают быть фиксированными и изменяются от точки к точке вдоль волокна. Во-вторых, появляется гиротропия, наведенная деформацией кручения. Вывод дифференциальных уравнений для проекций поля световой волны в двулучепреломляющих гиротропных средах обычно основывается на методе матрицы Джовса [10,11]. В настоящей работе для вывода этих уравнений используется более простой и наглядный способ.

Расчет будем проводить для локальной системы координат x', y', z , которая поворачивается вместе со скручиванием волокна. Ориентация осей x' и y' для каждой точки z соответствует главным осям эллипса показателей преломления волокна, ось z направлена вдоль оси волокна. Рассматривается плоская волна, радиальной структурой поля пренебрегаем. Тогда для каждой точки в интервале от z до $z + \Delta z$ комплексную амплитуду поля можно представить в виде проекций $E_{x'}$ и $E_{y'}$ в форме

$$E_{x'} = E_{x'} e^{-ik_0 z}, \quad E_{y'} = E_{y'} e^{-ik_0 z}, \quad (1)$$

где $k_0 = (\beta_{x'} + \beta_{y'})/2$; $\beta_{x'} = 2\pi n_{x'}/\lambda_0$; $\beta_{y'} = 2\pi n_{y'}/\lambda_0$; λ_0 — длина волны; $n_{x'}$, $n_{y'}$ — показатели преломления вдоль главных осей эллипса (рис. 1).

Для определенности полагаем, что $n_{x'} < n_{y'}$. Амплитуды $E_{x'}$ и $E_{y'}$, очевидно, есть функции z , угла скручивания ψ , параметра $\kappa = (\beta_{y'} - \beta_{x'})/2 > 0$ и параметра гиротропии g . Переход от точки z к точке $z + \Delta z$ приводит к следующим изменениям $E_{x'}$ и $E_{y'}$. Во-первых, изменяется фаза $E_{x'}$ на величину $\kappa\Delta z$ и фаза $E_{y'}$ на величину $-\kappa\Delta z$. Во-вторых, изменяются амплитуды $E_{x'}$ и $E_{y'}$ вследствие поворота системы координат (вместе с вращением эллипса показателя преломления) на

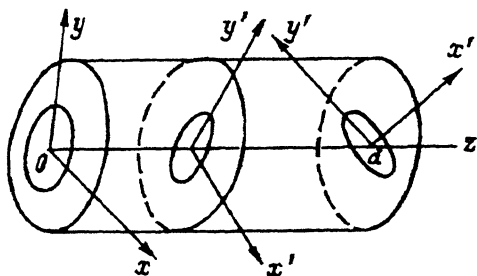


Рис. 1. Ориентация и форма эллипса показателей преломления как функция координаты z .

Лабораторная система координат — (x, y, z) , текущая — (x', y', z) . d — координата конца волокна.

угол $\Delta\Psi = (d\Psi/dz) = \Psi'\Delta z$ и поворота плоскости поляризации волны за счет наведенной гиротропии на угол $-1/2g\Psi'\Delta z$, где $g \simeq 0.13-0.16$ [5,7]. Тогда можно записать

$$\begin{aligned} E_{x'}(z + \Delta z) &= [E_{x'}(z) \cos \Delta\varphi + E_{y'}(z) \sin \Delta\varphi] e^{i\kappa\Delta z}, \\ E_{y'}(z + \Delta z) &= [E_{y'}(z) \cos \Delta\varphi - E_{x'}(z) \sin \Delta\varphi] e^{-i\kappa\Delta z}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Delta\varphi = (1 - g/2)\Psi'\Delta z = \Omega\Delta z$.

При переходе к пределу $\Delta z \rightarrow 0$ из (2) получаем, что

$$\frac{dE_{x'}}{dz} = i\kappa E_{x'} + \Omega E_{y'}, \quad \frac{dE_{y'}}{dz} = -i\kappa E_{y'} - \Omega E_{x'}. \quad (3)$$

Подобные уравнения были получены в работе [5]. Система уравнений (3) должна быть дополнена начальными условиями, т.е. задана поляризация волны в точке $z = 0$ на входе в волокне. Поскольку Ψ' и g в общем случае являются функциями z , то решение уравнений (3) оказывается достаточно трудоемким. Существенное упрощение происходит, если от функций $E_{x'}$, $E_{y'}$ перейти к новым функциям F_1 , F_2 , для которых начальные условия фиксированы вне зависимости от состояния поляризации на входном торце. Функции $E_{x'}$, $E_{y'}$ и F_1 , F_2 связаны соотношением

$$E_{x'} = E_{x0}F_1 - E_{y0}F_2^*, \quad E_{y'} = E_{x0}F_2 + E_{y0}F_1^*, \quad (4)$$

где E_{x0} и E_{y0} есть значения проекций поля при $z = 0$.

Предполагается, что на входе в волокно лабораторная система координат x , y совмещена с главными осями эллипса показателей преломления, поэтому $E_{x'} = E_{x0}$, $E_{y'} = E_{y0}$.

Подставляя выражения (4) в систему (3) и приравнявая к нулю множители при произвольных коэффициентах E_{x0} , E_{y0} , получим уравнения для функций F_1 и F_2

$$iF_1' = -\kappa F_1 + i\Omega F_2, \quad iF_2' = \kappa F_2 - i\Omega F_1. \quad (5)$$

Функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ удовлетворяют начальным условиям

$$F_1(0) = 1, \quad F_2(0) = 0 \quad (6)$$

и условию нормировки

$$|F_1(z)|^2 + |F_2(z)|^2 = 1. \quad (7)$$

Соотношения (4) позволяют выразить амплитуды поля $E_{x'}$, $E_{y'}$ в лабораторной системе координат, которая повернута на угол $-\Psi$ относительно локальной

$$E_x = E_{x'} \cos \Psi - E_{y'} \sin \Psi, \quad E_y = E_{x'} \sin \Psi + E_{y'} \cos \Psi.$$

Тогда

$$E_x = E_{x0}(F_1 \cos \Psi - F_2 \sin \Psi) - E_{y0}(F_1^* \sin \Psi + F_2^* \cos \Psi), \quad (8)$$

$$E_y = E_{x0}(F_1 \sin \Psi + F_2 \cos \Psi) + E_{y0}(F_1^* \cos \Psi - F_2^* \sin \Psi). \quad (9)$$

Угол Ψ условимся отсчитывать от оси x лабораторной системы координат.

Обсудим физический смысл введенных комплексных функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$. По своей структуре уравнения (5) идентичны уравнениям, описывающим квантовую двухуровневую систему, в которой роль времени играет координата z . В начальный момент $z = 0$ нижний уровень (ему соответствует "волновая" функция F_1) с энергией $-\kappa$ заполнен ($F_1(0) = 1$), а верхний уровень с энергией κ пуст ($F_2(0) = 0$). Величина $i\Omega(z)$ играет роль матричного элемента перехода между уровнями. Соотношение (4) позволяет связать "волновые" функции F_1 и F_2 с состоянием поляризации света. Полагая, например, в (4) $E_{y0} = 0$, видим, что F_1, F_2 определяют состояние поляризации волны в локальной системе координат в точке z волокна, если на входе свет был линейно поляризован вдоль оси x .

Аналогия с двухуровневой системой позволяет, в частности, использовать для приближенного определения поляризации света методы, разработанные в квантовой механике. Например, в квазиклассическом случае, когда $\Omega(z)$ меняется медленно на длине биения κ^{-1} (т.е. $\kappa\Omega \gg d\Omega/dz$),

$$F_1(z) = \cos \left(\int_0^z \beta(z') dz' \right) + \frac{i\kappa}{\beta(z)} \sin \left(\int_0^z \beta(z') dz' \right),$$

$$F_2(z) = -\frac{\Omega(z)}{\beta(z)} \sin \left(\int_0^z \beta(z') dz' \right), \quad (10)$$

где $\beta(z) = \sqrt{\kappa^2 + [\Omega(z)]^2}$.

Если $\Omega = \text{const}(z)$, т.е. $\int_0^z \beta(z') dz' = \beta z$ (равномерное скручивание), то соотношения (10) являются точными, они были получены в целом ряде работ (например, в [5]).

Другим частным случаем является малость Ω (т.е. $\Omega\kappa^{-1} \ll 1$). В этом случае решение системы (5) находится по теории возмущений

$$F_1 = e^{i\kappa z}, \quad F_2 = -\int_0^z dz' \Omega(z') e^{i\kappa(2z' - z)}. \quad (11)$$

В определении F_2 в (11) входит $\Omega(z')$ в интервале от 0 до z . Если под z понимать длину волокна d , а $\Omega(z')$ доопределить так, что $\Omega(z') = 0$ при $z' < 0$ и $z' > d$, то на входе

$$F_2 = -\exp(i\kappa d)\Omega(\omega, d),$$

где $\Omega(\omega, d)$ есть фурье-образ $\Omega(z')$, доопределенный нулем вне интервала $0 \leq z' \leq d$, а $\omega = 2\kappa$.

Таким образом, F_2 на конце волокна длиной d пропорциональна спектральной плотности функции $\Omega(z')$ на пространственной частоте 2κ при условии малости возмущения (т.е. $|F_2| \ll 1$).

2. Периодически скрученное волокно

Важным частным случаем является скручивание по произвольному периодическому закону с периодом a (пространственной частотой $2\pi/a$). Интерес к этому случаю обусловлен наличием “резонанса” частоты ω и двулучепреломлением, который в простейшем случае возникает в окрестности точки $\omega = 2\kappa$.

Характер такого резонанса легче всего проиллюстрировать на примере косинусоидальной скрутки $\Omega(z) = 2\Delta \cos(\omega z + \varphi_0)$. Тогда легко показать, что в области малой расстройки $(\omega - 2\kappa)/2\kappa \ll 1$ и малой амплитуды скручивания ($\Delta \ll \kappa, \omega$)

$$\begin{aligned} F_1(z) &= e^{i\omega z/2} \{ \cos \nu z + i\nu^{-1}(\kappa - \omega/2) \sin \nu z \}, \\ F_2(z) &= -e^{-i\omega z/2} \cdot e^{-i\varphi_0} (\Delta/\nu) \sin \nu z, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\nu = \sqrt{\Delta^2 + (\kappa - \omega/2)^2}$.

В точном резонансе ($\omega = 2\kappa$) $F_1(z) = \exp(i\kappa z) \cos \Delta \cdot z$, $F_2(z) = -\exp[i(\kappa z + \varphi_0)] \sin \Delta \cdot z$, т.е. на длине $\pi/2\Delta$ происходит полная перекачка волны из моды F_1 в моду F_2 . Это, согласно (4), соответствует повороту на $\kappa/2$ волны, которая на входе линейно поляризована вдоль главной оси эллипса. На длине же π/Δ скрученное волокно “прозрачно” (т.е. свет в этой точке имеет такую же поляризацию, какая имела бы место в отсутствие волокна) для линейно поляризованного вдоль главной оси света на входе. Одновременно можно найти условие “прозрачности” волокна при любой поляризации света. Эти условия следующие: 1) длина волокна должна удовлетворять условию $d = \pi n/\Delta$, 2) $d = \pi m/\kappa$, где n и m — целые числа. Отсюда возникает связь $\Delta = (n/m)\kappa$, при выполнении которой поляризация на входе повторяет поляризацию на длинах $d = \pi n/\Delta$. Произвольные поляризации повторяются в точке $z = nqa = nq\pi/\kappa$. Но в резонансе для этого нужно иметь $\Omega(z) = 2\Delta \cos q\kappa z$, где $\Delta = \kappa(p/q - 1)$, что получаем из условия $\cos \varepsilon a = \text{Re } F_1(a)$ (см. формулы (17) и (17а)).

Из рассмотренного примера видно, что при периодической скрутке волокна существуют такие поляризации света на входе, для которых волокно “прозрачно”. Кроме того, при выполнении дополнительных условий на характер скрутки, сформулированных выше, волокно становится “прозрачным” для любой поляризации света на входе. Такое явление до некоторой степени аналогично параметрическому резонансу. В высоких порядках теории возмущений резонансное условие принимает более общий вид $2\kappa = n\omega$, где n — целое число. Формула (12) может оказаться полезной при анализе качества волокна, содержащего малые возмущения в виде случайных скруток.

Ниже определяются условия “прозрачности” волокна в произвольных периодически скрученных волокнах в зависимости от поляризации падающего света и характера периодической скрутки. При произвольном периодическом скручивании периода a угол скручивания $\Psi(z) = \rho z + \varphi(z)$, где ρ — константа, а $\varphi(z+a) = \varphi(z)$. Отсюда следует, что $\Omega = (\rho + \varphi')(1 - g/2)$. Найдем условия, при которых $E_{x'}(z)$ и $E_{y'}(z)$ являются периодическими функциями z . В общем случае, согласно теореме Флоке [9], решения уравнений (3) для $E_{x'}$ и $E_{y'}$ можно записать в виде

$$E_{x'} = C_1 e^{i\varepsilon z} K_1(z) + C_2 e^{-i\varepsilon z} K_2(z),$$

$$E_{y'} = C_1 e^{i\epsilon z} K_2(z) + C_2 e^{-i\epsilon z} K_1(z), \quad (13)$$

где $K_{1,2}(z) = K_{1,2}(z+a)$; C_1 и C_2 — константы, определяемые начальными условиями; $\exp(\pm i\epsilon z)$ — характеристический множитель.

Можно убедиться в том, что в рассматриваемом случае ϵ является действительной величиной. Условие периодичности состояния поляризации удобно записать в виде

$$E_{x'}(z)/E_{y'}(z) = E_{x'}(z+a)/E_{y'}(z+a). \quad (14)$$

Очевидно, что условия (14) выполняются, если $C_2 = 0$ (или $C_1 = 0$), но этот вариант не дает новых решений и сводится к преобразованию $\epsilon \rightarrow -\epsilon$. Равенство $C_2 = 0$ выполняется лишь при определенных начальных условиях, т.е. при определенной поляризации падающего света. Таким образом, задача сводится к нахождению специальных начальных условий, обеспечивающих периодическую повторяемость начальной поляризации. Полагая в (13) $C_2 = 0$, $C_1 = 1$ и подставляя (13) в (4), получим соотношения

$$\begin{aligned} K_1(z) &= \exp(-i\epsilon z)[E_{x0}F_1(z) - E_{y0}F_2^*(z)], \\ K_2(z) &= \exp(-i\epsilon z)[E_{x0}F_2(z) + E_{y0}F_1^*(z)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Из этих соотношений, используя условие периодичности $K_1(z) = K_1(z+na)$, $K_2(z) = K_2(z+na)$, можно исключить K_1 и K_2

$$[F_1(z) - e^{-i\epsilon na}F_1(z+na)]E_{x0} + [-F_2^*(z) + e^{-i\epsilon na}F_2^*(z+na)]E_{y0} = 0,$$

$$[F_2(z) - e^{-i\epsilon na}F_2(z+na)]E_{x0} + [F_1^*(z) - e^{-i\epsilon na}F_1^*(z+na)]E_{y0} = 0. \quad (16)$$

Если в формулах (13) положить $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, что соответствует другой начальной поляризации, то в уравнениях (16) ϵ заменяется на $-\epsilon$.

Уравнения (16) представляют собой систему двух линейных уравнений для E_x , E_y . Можно убедиться в том, что получаемое из (16) отношение E_{y0}/E_{x0} не зависит ни от z , ни от числа периодов n . Приравнявая детерминант системы (16) нулю и учитывая условие нормировки (7), получаем характеристическое уравнение для нахождения ϵ

$$\cos n\epsilon a = \operatorname{Re} \{F_1(z+na)F_1^*(z) + F_2(z+na)F_2^*(z)\},$$

Легко убедиться в том, что правая часть этого уравнения не зависит от z . Для этого достаточно продифференцировать ее по z , и, используя (5) показать, что производная равна нулю. Полагая $z = 0$ получим

$$\cos n\epsilon a = \operatorname{Re} F_1(na). \quad (17)$$

Применяя теорему Флоке к уравнению (5), можно показать, что это равенство не зависит от номера n . Полагая $n = 1$, получим

$$\cos \epsilon a = \operatorname{Re} F_1(a). \quad (17a)$$

Здесь достаточно определить ϵa в интервале $0 \leq \epsilon a \leq \pi$, тогда в силу нормировки (7) $|\operatorname{Re} F_1| < 1$, поэтому уравнение (17a) в интервале $0 \leq \epsilon a \leq \pi$ имеет единственный корень. Теперь из уравнений (16) определим соотношение E_{y0}/E_{x0}

$$\frac{E_{y0}}{E_{x0}} = \frac{F_1(z) - \exp(-i\varepsilon na)F_1(z + na)}{F_2^*(z) - \exp(-i\varepsilon na)F_2^*(z + na)} = \frac{F_2(z) - \exp(-i\varepsilon na)F_2(z + na)}{F_1^*(z + na) \exp(-i\varepsilon na) - F_1^*(z)}.$$

Тем же способом можно показать, что правые части этого равенства не зависят ни от z , ни от n . Полагая $z = 0$, $n = 1$ и учитывая (17а), получим

$$\frac{E_{y0}}{E_{x0}} = i \frac{\operatorname{Im} F_1(a) \pm \sin \varepsilon a}{F_2^*(a)} \quad (0 \leq \varepsilon a \leq \pi) \quad (18)$$

(нижний знак соответствует $C_1 = 0$, $C_2 = 1$).

Формула (18) определяет две начальные поляризации, которые периодически повторяются с периодом скручивания a . Она принимает наглядный вид, если комплексные величины E_{x0} , E_{y0} , $F_1(a)$ и $F_2(a)$ представить через амплитуды и фазы в виде

$$E_{x0} = E_0 \cos \alpha e^{i\varphi/2}, \quad E_{y0} = E_0 \sin \alpha e^{-i\varphi/2}, \quad (18a)$$

$$F_1(a) = \cos \delta e^{i\gamma_1}, \quad F_2(a) = \sin \delta e^{i\gamma_2}, \quad E_0 > 0. \quad (18b)$$

Все углы отсчитываются от оси x' . Таким образом, рассчитав $F_1(a)$ и $F_2(a)$, находим δ , γ_1 и γ_2 и затем из соотношения (18) находим α и φ . Тогда из (14) следуют два условия для вещественных величин:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma_2, \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = -\operatorname{ctg} \delta \sin \gamma_1. \quad (19)$$

Согласно второму уравнению (19), α в интервале от $-\pi$ до π принимает два значения α_1 и α_2 , связанные условием

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1. \quad (20)$$

Соотношения (19) дают выражения для поляризации падающего света, периодически повторяющейся в точках $z = na$ при заданном характере периодического скручивания, который определяется параметрами δ , γ_1 и γ_2 . Из (20) видно, что при заданном скручивании всегда существуют две такие начальные поляризации, параметр α для которых отличается на $\pi/2$.

В частности, такой избранной поляризацией является линейная, когда $\varphi = 0, \pi$, $\gamma_2 = \pm\pi/2$ и $F_2(a)$ есть чисто мнимая величина. Циркулярная поляризация периодически повторяется, если $\varphi = \pm\pi/2$, $\alpha = \pm\pi/4$, т.е. $\gamma_2 = 0, \pi$ и $\gamma_1 = 0, \pi$ (т.е. $F_1(a)$ и $F_2(a)$ действительны). Такой случай реализуется, например, для косинусоидальной скрутки (12) в резонансе $\omega = 2\kappa$ на периоде $a = \pi/\kappa$.

Найденному решению можно дать следующее толкование. При периодической скрутке волокна существуют две моды, определенные соотношениями (19), (20), которые на дискретном наборе точек $z = na$ являются собственными. Каждая из этих невзаимодействующих мод распространяется со своей фазовой скоростью, так что на длине a между ними происходит набор разности фаз $2\varepsilon a$. В этом смысле оптические свойства периодически скрученного волокна на дискретном наборе точек $z = na$

эквивалентны оптике одноосных и гиротропных кристаллов с соответствующими (19) и (20) собственными модами, имеющими, вообще говоря, эллиптическую поляризацию.

Для конкретного определения поляризации падающей волны, для которой в точках $z = na$ волокно "прозрачно" (т.е. повторяется поляризация в локальной системе координат) требуется решить уравнения системы (5) с начальными условиями $F_1(0) = 1, F_2(0) = 0$. В разделе 3 рассмотрены некоторые точно решаемые модели. В настоящем же разделе ограничимся случаем равномерно скрученного волокна, когда $\Omega = \text{const}$. Вид функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ для этого случая задан соотношениями (10), если в них считать $\beta = \text{const}$. Этот случай является предельным для моделей с периодическим скручиванием, когда период a не определен и из ответов выпадает. Задача же о периодическом повторении поляризации здесь сводится к нахождению такой поляризации падающего света, которая является собственной модой скрученного волокна, т.е. не изменяется вдоль волокна в локальной системе координат. Сравнивая (10) и (17а), видим, что для однородного скручивания $\varepsilon = \beta$. Далее, так как F_2 есть действительная величина, то $\gamma_2 = 0$ или кратное π и $\varphi = \pi/2$. И, наконец, согласно (19) и (20), два значения α определяются из уравнения

$$\text{tg } 2\alpha = \Omega/\kappa.$$

Выше рассмотрена периодическая повторяемость поляризации с периодом a при произвольной периодической скрутке волокна. При этом оказывается, что входная поляризация строго определена. Однако существует и другая принципиальная возможность периодического повторения поляризации с периодом a_q , равным или кратным периоду скрутки a . Эта возможность реализуется, если характеристическое число ε принимает значение

$$\varepsilon = (\pi/a)(p/q), \quad (20a)$$

где p/q — несократимая дробь, p и q — целые числа.

В этом случае, согласно (17), $\text{Re } F_1(qa) = (-1)^p$ и с учетом нормировки (7) $F_1(qa) = (-1)^p, F_2(qa) = 0$. При выполнении такого условия (которое имеет место только при специальной зависимости $\Omega(z)$, которая находится из условий (17а) и (20а)) из соотношений (4) получаем, что

$$E_{x'}(qa) = (-1)^p E_{x0}, \quad E_{y'}(qa) = (-1)^p E_{y0},$$

т.е. произвольная поляризация падающего света повторяется в точке nqa (n — целое число). При однородном скручивании при заданном числе p начальная поляризация в локальной системе координат повторяется в точках $z_n = \pi n/\beta$ ($n = 1, 2, \dots$).

3. Периодическое скручивание в форме "пилы" и потенциала Кронига-Пенни

В настоящем разделе полученные выше результаты применяются для расчета простейших периодических моделей скручивания.

Первая из них (модель "пилы") показана на рис. 2,а. Величина $\Omega(z)$ испытывает скачки в точках $z = (n+1)a/2$ ($n = 0, 1, \dots$). Обозначим функции F_1 и F_2 , относящиеся к левой половине зубца пилы с номером

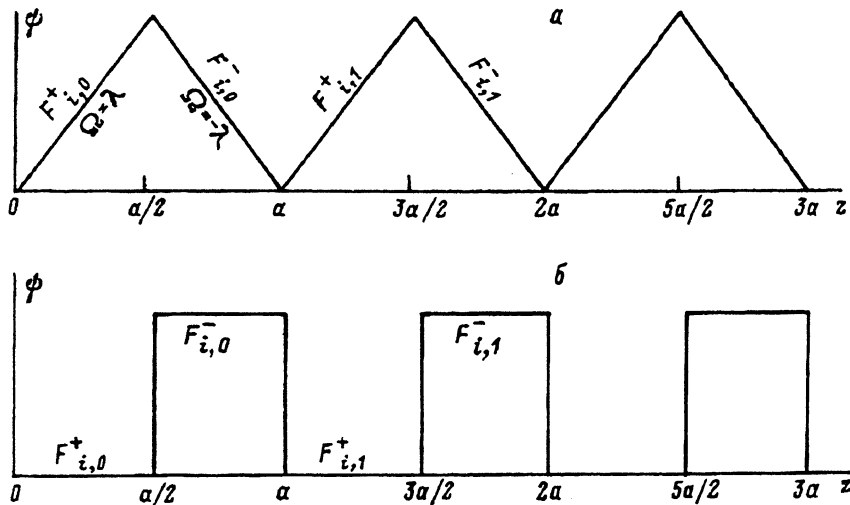


Рис. 2. Зависимость угла скручивания ψ от длины волокна в модели “пилы” (а) и для потенциала Кронига-Пенни (б).

n через F_{1n}^+ и F_{2n}^+ , а к правой — через F_{1n}^- и F_{2n}^- . Уравнения для этих функций, согласно (5), имеют вид

$$iF_{1,n}^{+'} = -\kappa F_{1,n}^+ + i\lambda F_{2,n}^+, \quad iF_{2,n}^{-'} = \kappa F_{2,n}^+ - i\lambda F_{1,n}^+ \quad (na < z < (n+1/2)a), \quad (21)$$

$$iF_{1,n}^{+'} = -\kappa F_{1,n}^- - i\lambda F_{2,n}^-, \quad i\kappa F_{2,n}^- = \kappa F_{2,n}^- + i\lambda F_{1,n}^- \quad ((n+1/2)a < z < (n+1)a), \quad (21a)$$

$\Omega = \lambda$ для левой половины зубца, $\Omega = -\lambda$ для правой.

Решения уравнений (21) и (21a) приведены в Приложении. Для анализа условия периодической повторяемости поляризации достаточно привести значения $F_{1,n}^+$ и $F_{2,n}^+$ в точке $z = a$. Согласно (П.10),

$$F_{1,1}^+(a) = \cos \epsilon a + i(\kappa/\beta) \sin \beta a,$$

$$F_{2,1}^+(a) = (2i\lambda\kappa/\beta^2) \sin^2(\beta a/2). \quad (22)$$

Характеристическое число ϵ определено выражением (П.6), в котором $\beta = \kappa^2 + \lambda^2$. Из (22) следует, что $\gamma_2 = \pi/2$ и в соответствии с (19) $\varphi = 0$. Таким образом, в модели “пилы” периодически повторяется свет линейной поляризации. Углы $\alpha_{1,2}$ между вектором поля и осью x находятся из уравнения (19). Так как $\text{Re } F_{2,1}^+(a) = 0$, то $\text{ctg } \delta \sin \gamma_1 = -\text{Im } F_{1,1}^+(a)/\text{Im } F_{2,1}^+(a)$ и $\text{tg } 2\alpha = -(\lambda/\beta) \text{tg}(\beta a/2)$.

Обратимся теперь к исследованию случая, когда периодически повторяется любая начальная поляризация. Условие $\epsilon = (\pi/a)(p/q)$ выполняется в том случае, если выполняется условие (П.6), которое принимает вид

$$(\kappa/\beta) \sin(\beta a/2) = \sin(\pi p/2q).$$

Повторение поляризации происходит в точках $z_n = nqa$ с периодом $a_q = qa$. В этом случае повторяется произвольная входная поляризация,

по на амплитуду девиации λ накладываются определенные ограничения. В простейшем случае $q = 1$, когда период повторения поляризации совпадает с периодом скручивания a , решением этого уравнения является $\beta a = 2\pi m$. Это решение существует для четных p . При нечетных p , так как $\kappa < \beta$, решений не существует вообще, т.е. если параметры пилы λ и a связаны соотношением

$$\lambda^2 = (2\pi m/a)^2 - \kappa^2 \quad (m = 1, 2, \dots),$$

то поляризация повторяется в точках $z_n = na$. Если $\beta a = 2\pi m$, то формулы для $F_{1,n}^+$ (П.10)–(П.12) становятся непрерывными во всем интервале z

$$F_1(z) = \cos \beta z + i(\kappa/\beta) \sin \beta z, \quad F_2(z) = -(\lambda/\beta) \sin \beta z.$$

Эти выражения совпадают с решением (10) для равномерно скрученного волокна с $\Omega = \lambda$. Иными словами, если $\beta a = 2\pi m$, то световая волна не “замечает” пилу и ведет себя, как в однородно скрученном волокне.

Рассмотрим далее модель потенциала Кронига–Пенни, в которой угол ψ имеет зависимость от z , представленную на рис. 2,б. В точках $z = (n + 1/2)a$ волокно скручено на угол ψ , а в точках $z = (n + 1)a$ — на угол $(-\psi)$. Модель соответствует набору двулучепреломляющих пластинок толщиной $a/2$, повернутых относительно друг друга на угол $\pm\psi$. В этой модели при $z \neq (n + 1)a/2$ $\Omega = 0$, а в точках $z = (n + 1)a/2$ $\Omega = \pm\infty$. Решение для F_1 и F_2 приведено в Приложении. Представляющие интерес для анализа модели значения $F_{1,1}^+(a)$ и $F_{2,1}^+(a)$, согласно (П.16) и выражению для характеристического показателя ε (П.15), имеют вид

$$F_{1,1}^+(a) = \cos \varepsilon a + i \sin \kappa a \cos^2 \psi,$$

$$F_{2,1}^+(a) = i \exp(i a \kappa / 2) \sin 2\psi \sin(a/2).$$

Из (18) следует, что $\varphi = -a\kappa/2$, т.е. поляризация, которая периодически повторяется, вообще говоря, эллиптическая. Что касается угла α , то после нескольких тригонометрических преобразований получаем

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} \psi \cos(a\kappa/2).$$

Выбором параметра $a\kappa$ поляризацию можно превратить в циркулярную или линейную. Так, если $\kappa a = \pi(2m + 1)$, то $\alpha = +\pi/4$, $\varphi = -\pi(m + 1/2)$, т.е. искомая начальная поляризация циркулярна. При $\kappa a = 2\pi m$ эта поляризация становится линейной. Однако при таком выборе параметров поляризация будет повторяться в точках $z = an$ при любой поляризации падающего света. Действительно, условие периодичности в точках $z = anq$ для модели Кронига–Пенни имеет вид

$$\sin(\pi p/2q) = \cos \psi \sin(a\kappa/2).$$

В частности, при $q = 1$ $a\kappa = 2\pi n$. При таком условии (целое число биений на период) повторяется не только линейная поляризация, но и любая другая.

Заключение

Проведенный анализ распространения света в скрученном двулучепреломляющем волокне позволяет сделать следующие выводы. Общая задача нахождения поляризации волны на выходе из волокна как функции характера скручивания волокна и состояния поляризации на входе в волокно сведена к более простой задаче о распространении света со специально выбранной поляризацией на входе, а именно с линейной поляризацией вдоль главной оси эллипса показателей преломления. Связь же этой задачи с общей задачей распространения света с произвольной начальной поляризацией задается простыми соотношениями (4).

Задача о распространении света со специально выбранной поляризацией оказалась эквивалентной известной в квантовой механике двухуровневой задаче, причем координата в оптике эквивалентна времени, а комплексные функции F_1 и F_2 — волновым функциям двух уровней. Параметр $2x$ играет роль расстояния между уровнями (π/x — длина биения), а скручивание — роль матричного элемента перехода. Если состояние поляризации света описывать с помощью двух углов α и φ (см. (18a)) ($-\pi/2 \leq \alpha, \varphi \leq \pi/2$), то распространение света по волокну характеризуется траекторией $\varphi(\alpha)$, полностью расположенной внутри квадрата $-\pi/2 \leq \varphi, \alpha \leq \pi/2$ (рис. 3). Если для какого-либо значения координаты z траектория достигает границы квадрата, то ее следует перенести в соответствии с правилом $\alpha \rightarrow -\alpha, \varphi \rightarrow \varphi \pm \pi$. При заданном характере скручивания имеется бесконечное число траекторий, исходящих из всех возможных начальных точек α_0 и φ_0 , которые определяют поляризацию падающего света. Такие траектории могут самопересекаться, но в общем случае они незамкнуты. Они остаются незамкнутыми и при периодическом скручивании. Однако при периодическом скручивании, как показано в разделе 2, всегда имеются две траектории, начинающиеся в точках α_0, φ_0 и $\alpha_0 + \pi/2, \varphi_0$, при которых траектории оказываются замкнутыми с периодом, по z равным периоду скручивания a . Соотношения (19) определяют координаты α_0, φ_0 как функции параметров периодического скру-

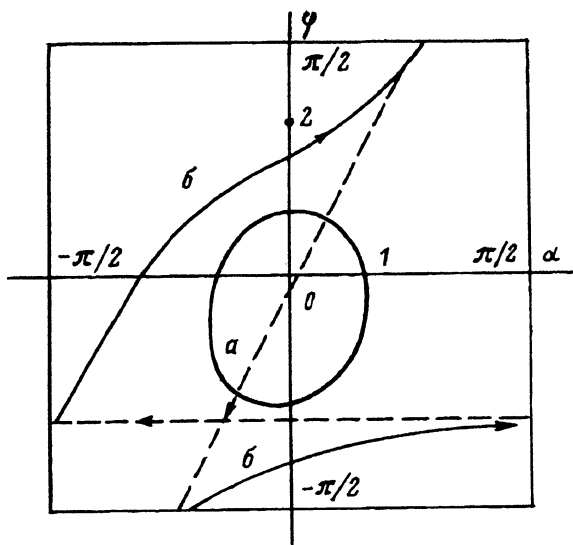


Рис. 3. Траектория изменения состояния поляризации как функция координаты z вдоль волокна на "фазовой плоскости" (α, φ).

1 — линейная начальная поляризация ($\varphi = 0$); 2 — эллиптическая поляризация; циркулярная поляризация — точки $\varphi = \pm\pi/2, \alpha = \pm\pi/4$; a и b — примеры замкнутых траекторий.

чивания. Особый интерес замкнутые траектории могут представлять в связи с тем, что они неустойчивы относительно сколь угодно слабых возмущений, либо начальных условий a_0, φ_0 , либо параметров скручивания (т.е. изменения внешних условий, влияющих, например, на длину волны биения и скручивания). Заметим, что в работе найден лишь тот класс замкнутых траекторий, который соответствует повторению поляризации на длине a . Очевидно, имеются еще другие замкнутые траектории, соответствующие периодам na ($n = 2, 3, \dots$). Характерные траектории приведены на рис. 3. Существуют специальные условия периодического скручивания (20), при которых все траектории независимо от начальной поляризации являются замкнутыми. Соотношение (20) определяет условие периодичности поляризации не только на одном периоде скручивания, но и для периодов qa , где q — целое число. Замкнутые траектории на плоскости α, φ для этого типа решений аналогичны фигурам Лиссажу.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Модель “пилы”. Решение уравнений (21), (21a) запишем в виде

$$F_{1,n}^{\pm} = a_n^{\pm} e^{i\beta(z-na)} + \frac{\beta a_n^{\pm} - \kappa a_n^{\pm}}{\kappa + \beta} e^{-i\beta[z-(n+1)a]},$$

$$F_{2,n}^{\pm} = \mp \frac{i}{\lambda} \left\{ \kappa - \beta \right\} a_n^{\pm} e^{i\beta(z-na)} + (\beta a_n^{\mp} - \kappa a_n^{\pm}) e^{-i\beta[z-(n+1)a]}, \quad (\text{П.1})$$

где $\beta = \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Решения для $F_{1,n}^+$ определены в интервале $na \leq z \leq (n+1/2)a$, а для $F_{1,n}^-$ — в интервале $(n+1/2)a \leq z \leq (n+1)a$. В точках $z = (n+1/2)a$ они непрерывны $F_{i,n}^+[(n+1/2)a] = F_{i,n}^-[(n+1/2)a]$. Коэффициенты a_n^{\pm} определяются из условия непрерывности в точках $(n+1)a$

$$F_{i,n}^-[(n+1)a] = F_{i,n+1}^+[(n+1)a], \quad i = 1, 2. \quad (\text{П.2})$$

Эти условия приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} (\kappa + \beta) e^{i\beta a} a_n^- + (\beta a_n^+ - \kappa a_n^-) &= (\kappa + \beta) a_{n+1}^+ + e^{i\beta a} (\beta a_{n+1}^- - \kappa a_{n+1}^+), \\ -(\kappa - \beta) e^{i\beta a} a_n^- - (\beta a_n^+ - \kappa a_n^-) &= (\kappa - \beta) a_{n+1}^+ + e^{i\beta a} (\beta a_{n+1}^- - \kappa a_{n+1}^+). \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Решение рекуррентных уравнений (П.3) ищем в виде

$$a_n^{\pm} = a^{\pm} \exp(in\varphi). \quad (\text{П.4})$$

Тогда уравнение для a^{\pm} принимает вид

$$\begin{aligned} \kappa a^+ (e^{-i\beta a} - 1) - \beta a^- (e^{-i\varphi} - 1) &= 0, \\ \beta a^+ (e^{i\varphi} - 1) + \kappa a^- (1 - e^{i\beta a}) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Приравнивая детерминант нулю получим уравнение для двух значений $\varphi = \pm \varepsilon a$

$$\sin(\varepsilon a/2) = \pm \kappa \beta^{-1} \sin(\beta a/2). \quad (\text{П.6})$$

Подставляя найденные из решения уравнения (П.6) два значения φ в систему (П.5), получим связь между a^+ и a^- для двух решений, соответствующих $\varphi = \pm \varepsilon a$,

$$a^- = \exp[i(\pm \varepsilon - \beta)a/2]a^+. \quad (\text{П.7})$$

Таким образом, неопределенными остались коэффициенты $a^+(\varepsilon) = a_1$ и $a^+(-\varepsilon) = a_2$. Общее решение для $F_{1,n}^+$ можно записать в виде

$$F_{i,n}^+ = a_1 F_{i,n}^+(a_1) + a_2 F_{i,n}^+(a_2), \quad i = 1, 2. \quad (\text{П.8})$$

Коэффициенты a_1 и a_2 определяются из начальных условий $F_{1,0}^+(z=0) = 1$, $F_{2,0}^+(z=0) = 0$. Полагая в (П.8) $n = 0$, $z = 0$ и используя для $F_{1,0}^+$ решение в форме (П.1), после несложных преобразований с учетом (П.4), (П.6) и (П.7) получаем

$$a_{1,2} = \frac{\kappa + \beta}{4\beta \cos(\varepsilon a/2)} \left(a^{\pm i\varepsilon a/2} \pm e^{-i\beta a/2} \right). \quad (\text{П.9})$$

Подставляя (П.9) в (П.8), получим окончательное выражение для $F_{1,n}^+$ в виде

$$\begin{aligned} F_{1,n}^+(z) &= P_n \cos \beta(z - na) + iQ_n \sin \beta(z - na), \\ F_{2,n}^+(z) &= -\frac{\lambda}{\beta \cos \varepsilon a/2} \left\{ i \sin(n\varepsilon a) \sin \beta[z - (n + 1/2)a] + \right. \\ &\quad \left. + \cos[(n + 1/2)\varepsilon a] \sin \beta(z - na) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

$$\begin{aligned} P_n &= \cos(n\varepsilon a) + i \sin(n\varepsilon a) \cos(\beta a/2) / \cos(\varepsilon a/2), \\ Q_n &= (\kappa/\beta) [P_n + (\lambda^2/\kappa^2) \sin(n\varepsilon a) \operatorname{tg}(\varepsilon a/2)]. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

При помощи найденных значений a_n^\pm из (П.1) можно вычислить $F_{i,n}^-$

$$\begin{aligned} F_{1,n}^-(z) &= \left(P_n \cos \frac{\beta a}{2} + iQ_n \sin \frac{\beta a}{2} \right) \cos \beta[z - (n + 1/2)a] - \\ &- \left[\left(P_n \cos \frac{\beta a}{2} + iQ_n \sin \frac{\beta a}{2} \right) \cos \frac{\beta a}{2} - P_{n+1} \right] \frac{\sin \beta[z - (n + 1/2)a]}{\sin(\beta a/2)}, \\ F_{2,n}^-(z) &= \frac{\lambda}{\beta \cos(\varepsilon a/2)} \left\{ i \sin[(n + 1)\varepsilon a] \sin \beta[z - (n + 1/2)a] + \right. \\ &\quad \left. + \cos[(n + 1/2)\varepsilon a] \sin \beta[z - (n + 1)a] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Модель Кронига-Пенни. В этой модели (рис. 2,б) функции $F_1(z)$ удовлетворяют уравнениям (5) с параметром $\Omega = 0$, а в точках $z = (n + 1/2)a$

и $z = (n + 1)a$ терпят разрыв первого рода. Для определения величины скачков можно воспользоваться условием непрерывности проекций поля ε_x и ε_y в лабораторной системе координат, которое выполняется для любой начальной поляризации. В точках $z = (n + 1/2)a$ из соотношений (9) получаем

$$F_{1,n}^+ = F_{1,n}^- \cos \psi - F_{2,n}^- \sin \psi, \quad F_{2,n}^+ = F_{2,n}^- \cos \psi + F_{1,n}^- \sin \psi, \quad (\text{П.13})$$

а в точках $z = (n + 1)a$

$$F_{1,n}^- = F_{1,n+1}^+ \cos \psi + F_{2,n+1}^+ \sin \psi, \quad F_{2,n}^- = F_{2,n+1}^+ \cos \psi - F_{1,n+1}^+ \sin \psi. \quad (\text{П.14})$$

Далее задача решается точно так же, как и для модели "пилы", поэтому приводятся лишь конечные результаты. Уравнение для характеристического числа ε здесь имеет вид

$$\sin(\varepsilon a/2) = \pm \cos \psi \sin(\kappa a/2). \quad (\text{П.15})$$

Функции $F_{1,n}^\pm(z)$ определяются соотношениями

$$F_{1,n}^+ = e^{i(z-na)\kappa} \{ \cos n\varepsilon a + i \cos \psi \sin n\varepsilon a \cos(\kappa a/2) / \cos(\varepsilon a/2) \},$$

$$F_{2,n}^+ = ie^{-i(z-na)\kappa} e^{i\kappa a/2} \sin n\varepsilon a \sin \psi / \cos(\varepsilon a/2),$$

$$F_{1,n}^- = e^{i(z-na)\kappa} (\cos \varepsilon a/2)^{-1} \left\{ \cos \psi \cos[(n + 1/2)\varepsilon a] + e^{-i\kappa a/2} \sin n\varepsilon a \right\},$$

$$F_{2,n}^- = -e^{-i(z-na)\kappa} (\cos \varepsilon a/2)^{-1} e^{i\kappa a} \cos[(n + 1/2)\varepsilon a]. \quad (\text{П.16})$$

Список литературы

- [1] Smith M.A. // Appl. Opt. 1978. Vol. 17. P. 53.
- [2] Voli V., Shorthill R.W., Berg M.F. // Appl. Opt. 1977. Vol. 16. P. 2605.
- [3] Stolen R.H., Ashin A., Pleibel W., Dziedzic J.M. // Opt. Lett. 1984. Vol. 9. P. 300-302.
- [4] Trillo S., Wabnitz S., Banyani W.C. et. al. // IEEE J. Quant. Electron. 1989. Vol. 25. N 1. P. 104-112.
- [5] Monerie M., Jeunhom L. // Opt. and Quant. Electron. 1980. Vol. 12 P. 449-461.
- [6] Ulrich R., Simon A. // Appl. Opt. 1979. Vol. 18. N 13. P. 2241-2251.
- [7] Huang S., Liu Z. // Appl. Opt. 1985. Vol. 24. N 15. P. 2355-2361.
- [8] Kusano K. // J. Opt. Soc. Am. 1984. Vol. A1. N 8. P. 869-875.
- [9] Tsao C. // J. Opt. Soc. Am. 1987. Vol. A4. N 8. P. 1407-1412.
- [10] Брыксин В.В., Коровин Л.И. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 12. С. 2289-2296.
- [11] Брыксин В.В., Коровин Л.И., Петров М.П., Хоменко А.В. // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 10. С. 1918-1924.

Физико-технический институт им.А.Ф.Иоффе
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
2 июня 1992 г.