

©1993

## НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ ПОПЕРЕЧНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ В МЕТАЛЛАХ

*В.А. Кукушкин*

Рассматривается эволюция мощных акустических импульсов в металлах, обусловленная электромагнитным взаимодействием резонансных электронов с деформацией решетки. Предполагается, что длина импульса  $L$  много меньше длины свободного пробега носителей  $l$ , но существенно превышает характерную глубину затухания электромагнитного поля в проводнике при аномальном скин-эффекте  $\lambda_e$ . Считается также, что амплитуда звука достаточно велика, так что время электронной релаксации  $\tau_p$  много больше времени пролета резонансным электроном области импульса  $L/\bar{v}$  ( $\bar{v}$  — характерная скорость резонансных частиц). С помощью решения кинетического уравнения и уравнения Максвелла найдено вихревое электромагнитное поле, соответствующее различным типам деформации кристалла. Исследована сила, действующая на решетку со стороны резонансных электронов, и решено уравнение теории упругости, описывающее эволюцию акустических импульсов.

Затухание мощных акустических волн, распространяющихся в чистых металлах, обусловлено главным образом взаимодействием электронов проводимости с деформацией кристалла. В случае коротковолнового звука ( $L \ll l$ , где  $L$  — длина волны,  $l$  — длина свободного пробега носителей) основную роль в поглощении играют так называемые резонансные электроны, проекция скорости которых на направление распространения волны порядка скорости звука  $w$ . Два механизма в основном определяют взаимодействие резонансных электронов с акустическим полем. Для продольного звука типичным является деформационный механизм, связанный с модуляцией энергии частиц в поле акустической волны. В случае поперечного звука наряду с деформационным важную роль играет электромагнитное поглощение, обусловленное джоулевыми потерями энергии при протекании в металле вихревых потоков, созданных волной. К настоящему времени хорошо изучены закономерности деформационного и электромагнитного поглощения при распространении в металлах периодических волн как в линейном, так и нелинейном режимах (см. обзор [1]).

В последние годы представляется актуальным исследование в акустоэлектронике мощных коротких звуковых импульсов. Взаимодействие резонансных электронов с акустическими импульсами обуславливают новые нелинейные явления, которые могут быть использованы при создании приборов микроэлектронной техники. Помимо этого применение импульсной методики позволяет избежать проявления в эксперименте разогревных механизмов нелинейности.

Затухание акустических импульсов продольной поляризации в чистых металлах изучено Демиховским с соавторами [2,3]. Качественная картина нелинейного поглощения в этом случае представляется следующим образом.

Потенциальное поле мощного импульса искажает траектории резонансных электронов, вызывая их захват и отражение. Поскольку число частиц, движущихся навстречу импульсу, превышает число частиц, догоняющих его, перед потенциальным горбом образуется избыточная концентрация отражающихся частиц, в то время как за импульсом концентрация меньше равновесной. Нетрудно убедиться в том, что обмен энергией между отражающимися электронами и решеткой приводит к конечному затуханию даже в предельно бесстолкновительном режиме. Частицы же, захваченные потенциальной ямой, в среднем не обмениваются энергией с волной, и вклад в бесстолкновительное затухание таких частиц отсутствует. Поэтому в тех точках, где область движения отражающихся электронов граничит с областью движения захваченных электронов, возникают особенности силы, действующей на решетку; в указанных точках формируются ударные волны. Для реализации режима нелинейного затухания необходимо, чтобы электрон, взаимодействующий с импульсом, не успевал рассеяться за время взаимодействия, т.е.

$$a = \frac{L}{\bar{v}\tau_p} \ll 1, \quad (1)$$

где  $\bar{v}$  — характерная скорость резонансных частиц,  $\tau_p$  — время релаксации.

Цель настоящей работы — исследовать затухание импульсов поперечного звука, обусловленное электромагнитным взаимодействием резонансных электронов с деформацией кристалла. Такой тип затухания, как известно, доминирует в металлах со сферической поверхностью Ферми (в щелочных металлах) при условии, что длина импульса  $L$  много меньше длины пробега носителей  $l$ , но существенно превышает характерную глубину затухания электромагнитного поля в металлах в режиме аномального скин-эффекта  $\lambda_e \sim (c^2 v_F L / \omega \omega_p^2)^{1/3}$

$$l \gg L \gg \lambda_e. \quad (2)$$

Здесь  $\omega_p$  — плазменная частота,  $\omega$  — скорость звука.

Рассмотрим предварительно физическую картину явления. Распространение сдвиговой деформации в металле сопровождается вихревым электромагнитным полем, обусловленным токами ионов решетки и электронов. Можно показать, что отклик резонансных электронов на вихревое поле определяется главным образом его магнитной компонентой; последняя изменяет лишь продольную составляющую импульса этих частиц, поэтому может быть описана некоторым "потенциальным" полем. Подобно деформационному полю магнитный рельеф мощного импульса осуществляет отражение и захват резонансных частиц. В бесстолкновительном режиме ( $a \rightarrow 0$ ) электронный ток обуславливается движением отражающихся частиц, так как вклад в ток захваченных (а также пролетных) электронов равен нулю вследствие антисимметрии возмущенной функции распределения этих частиц по продольной скорости. При выполнении неравенств (2) возбуждаемое электромагнитное поле обеспечивает компенсацию решеточного тока током отражающихся электронов

в данной точке импульса (точнее, на толщине его аномального скин-слоя  $\lambda_e$ ). Работа вихревого поля над резонансными частицами приводит к увеличению их внутренней энергии, которая, таким образом, оказывается функционалом от смещения решетки и, следовательно, определяет силу, обуславливающее затухание акустического импульса.

Система основных уравнений задачи включает в себя кинетическое уравнение для функции распределения резонансных электронов, уравнение Максвелла и уравнение теории упругости. В разделе 1 произведена классификация резонансных частиц и найдено решение кинетического уравнения. В разделе 2 вычислен электронный ток и решено уравнение Максвелла. Затем найдена сила, действующая со стороны резонансных электронов на решетку, и исследована нелинейная эволюция акустических импульсов. Показано, что в точках, являющихся граничными для области движения захваченных частиц, электронная сила испытывает скачок. Исследованы особенности эволюции — перепады деформации в граничных точках. Оценена возможность наблюдения результатов расчета в эксперименте.

## 1. Решение кинетического уравнения

Предположим, что акустический импульс поперечной поляризации распространяется в металле вдоль оси симметрии высокого порядка. Направим ось  $Ox$  сопутствующей системы координат  $K'$  вдоль направления распространения звуковой волны, а ось  $Oy$  — вдоль вектора ее поляризации. В системе  $K'$  функция Гамильтона электронов проводимости может быть записана в виде [4]

$$\varepsilon'(p', \mathbf{r}', t) = \varepsilon_0(\mathbf{p}') + \lambda_{xy} u_{xy} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v}' + m_0 \mathbf{v}' \dot{\mathbf{u}} + e\varphi, \quad (3)$$

где  $\varphi(\mathbf{r}', t)$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}', t)$  — скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля, сопровождающего акустический импульс;  $\mathbf{u} = (0, u, 0)$  — смещение решетки;  $\lambda_{\alpha\beta}$  — тензор деформационного потенциала;  $\mathbf{v}' = \partial \varepsilon' / \partial \mathbf{p}'$ . Спектр частиц в невозмущенном кристалле  $\varepsilon_0(\mathbf{p}')$  предполагается изотропным и квадратичным; в этом случае  $\lambda_{xy} = m_0 \Lambda(|\mathbf{p}'|) \times v'_x v'_y$  ( $m_0$  — масса свободного электрона,  $\lambda \sim 1$ ).

Будем считать, что векторный потенциал  $\mathbf{A}$  удовлетворяет условию Кулона  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ . При этом последнее слагаемое в (3) описывает потенциальное поле, которое может быть учтено путем перенормировки деформационного потенциала:  $e\varphi = -\bar{\lambda}_{xy} u_{xy}$ , где  $\bar{\lambda}_{xy}$  — среднее по поверхности Ферми значение величины  $\lambda_{xy}$ . При распространении поперечного звука в металле продольное поле  $\varphi$  не возникает, поскольку  $\bar{\lambda}_{\alpha\beta} = 0$  ( $\alpha \neq \beta$ ).<sup>1</sup> В этом случае, однако, следует учитывать вихревое поле  $\mathbf{A}(\mathbf{r}', t)$ . Нетрудно убедиться, исходя из симметрии задачи, что при выбранной калибровке для векторного потенциала справедливо представление  $\mathbf{A} = (0, A, 0)$ .

Для дальнейшего удобно перейти во вспомогательную систему отсчета ( $\Lambda$ -систему), в которой гамильтониан электрона имеет более простой

<sup>1</sup> Это равенство является следствием соотношения  $\sum_{\mathbf{p}_i} \lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_i) = 0$  ( $\alpha \neq \beta$ ), в котором компонента тензора  $\lambda_{\alpha\beta}$  берется в точках поверхности Ферми  $\mathbf{p}_i$ , принадлежащих звезде вектора  $\mathbf{p}$ .

вид. Осуществим такой переход с помощью производящей функции

$$\Phi = \mathbf{p}\mathbf{r}' + m_0 \widehat{\Lambda} \mathbf{v}' u.$$

Соответствующие законы преобразования импульса и энергии имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}' - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}}, \\ \varepsilon &= \varepsilon' + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \varepsilon_0(\mathbf{p}) - \frac{e}{c} \mathbf{A}^{(e)} \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(e)} &= \mathbf{A} + (m_0 c / e) \dot{u} (1 - \Lambda), \\ A_x^{(e)} &= A_z^{(e)} = 0. \end{aligned}$$

Запишем уравнение движения электрона в вихревом поле

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{A}^{(e)} \mathbf{v}), \quad (5)$$

где  $\mathbf{P} = m\mathbf{v} + (e/c)\mathbf{A}^{(e)}$  — обобщенный импульс. Принимая во внимание, что эффективный потенциал  $\mathbf{A}^{(e)}$  есть функция волновой координаты  $\zeta = x - wt$ , преобразуем (5) к следующему виду:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial \zeta} (A_y^{(e)} v_y) \mathbf{i} - \frac{e}{c} v_\zeta \frac{\partial a_y^{(e)}}{\partial \zeta} \mathbf{j}. \quad (6)$$

Здесь  $v_\zeta = v_x - w$ ;  $\mathbf{i}$ ;  $\mathbf{j}$  — единичные векторы вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. Для резонансных электронов второе слагаемое в (6) мало по сравнению с первым по параметру  $\tilde{v}/v_F \ll 1$  и им можно пренебречь. Отсюда следует, что движение резонансных частиц контролируется продольной силой, обусловленной магнитной компонентой вихревого поля.

Пренебрегая также изменением поперечной составляющей скорости  $v_y \simeq v_F$ , уравнение движения (6) представим в виде

$$m \frac{dv_\zeta}{dt} = - \frac{\partial u}{\partial \zeta} \operatorname{sgn} v_y, \quad (7)$$

где  $U = -(e/c)A_y^{(e)}v_F$  — “потенциальная” энергия резонансных электронов. Легко видеть, что (7) имеет одномерный интеграл энергии

$$m \frac{v_\zeta^2}{2} + U(\zeta) \operatorname{sgn} v_y = \mathcal{H}. \quad (8)$$

Если скорость  $v_y$  некоторой группы частиц и функция  $A_y^{(e)}(\zeta)$  имеют одинаковые знаки, то, как следует из (8), электромагнитное поле образует для электронов данной группы “потенциальный” горб ( $U \operatorname{sgn} v_y > 0$ ). В этом случае резонансные частицы разделяются на отражающиеся и пролетные. Траектории отражающихся электронов имеют точку поворота в области импульса, причем значения интеграла  $\mathcal{H}$  таких частиц лежат в интервале  $0 < \mathcal{H} < U_0 = \max U(\zeta)$ .

Для пролетных электронов, не имеющих точки поворота в области импульса,  $\mathcal{H} > U_0$ . Если величины  $v_y$  и  $A_y^{(e)}$  имеют противоположные знаки (т.е.  $U \operatorname{sgn} v_y < 0$ ), электромагнитное поле образует "потенциальную" яму. Резонансные частицы в этом случае разделяются на пролетные и захваченные; последние совершают финитное движение в поле ямы и имеют интеграл энергии  $\mathcal{H} < 0$ . В более сложном случае, когда вихревое поле  $A_y^{(e)}$  знакопеременно, можно говорить о движении отражающихся, а также пролетных и захваченных частиц в области импульса.

Для нахождения функции  $A_y^{(e)}(\zeta)$ , определяющей траектории электронов и нелинейное затухание акустического импульса, необходимо совместно решить уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (9)$$

(где  $\mathbf{j}$  — полная плотность тока) и кинетическое уравнение для функции распределения резонансных электронов

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial x} (A^{(e)} v) \frac{\partial f}{\partial p_x} + \frac{f - f_0(\varepsilon')}{\tau_p} = 0, \quad (10)$$

где  $\tau_p$  — время релаксации на примесях.

Учитывая, что столкновительный член в (10) зануляется равновесной функцией распределения  $f_0$ , зависящей от энергии  $\varepsilon'$  в сопутствующей системе координат  $K'$ , решение уравнения (10) следует искать в виде

$$f(\mathbf{p}, \zeta) = f_0(\varepsilon') + m_0 \Lambda v \dot{\mathbf{u}} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + g(\mathbf{p}, \zeta). \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), получим уравнение для функции  $g$

$$\frac{dg}{dt} + \frac{g}{\tau_p} = w \frac{\partial U}{\partial \zeta} \operatorname{sgn} v_y \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + m_0 \Lambda \frac{v \dot{\mathbf{u}}}{\tau_p} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}, \quad (12)$$

где  $t$  — время движения частицы по траектории. Второе слагаемое в правой части (12) описывает эффект неполного увлечения электронов движущимися примесными центрами. Основываясь на решении уравнения Максвелла, полученном в разделе 2, будем пренебрегать вкладом этого слагаемого в силу, действующую на резонансные частицы, как малым по сравнению с силой со стороны магнитного поля импульса по параметру  $(w/v_F)(L/\tilde{v}\tau_p) \ll 1$ . По этой же причине вместо функции  $A_y^{(e)}(\zeta)$ , определяемой формулой (4), мы будем везде писать векторный потенциал  $A(\zeta)$ ; совершаемая при этом ошибка пропорциональна малому параметру  $w/v_F$ .

Решение уравнения (12), удовлетворяющее начальному условию  $g \rightarrow 0$ , при  $t \rightarrow -\infty$ , имеет вид

$$g = w \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int_{-\infty}^t \frac{\partial U}{\partial \zeta'} e^{-\frac{t-t'}{\tau_p}} dt' \operatorname{sgn} v_y. \quad (13)$$

При выполнении условия сильной нелинейности (1) вычисление интеграла (13) удобно произвести, исключив производную  $\partial U / \partial \zeta'$  с помощью

уравнения движения (7). В результате интегрирования по частям для электронов, отражающихся от "потенциального" горба, а также для пролетных электронов получим следующее выражение [2]:

$$g = -\frac{w}{v_F} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} U_0 [s - s_{-\infty} - a(\xi - s_{-\infty} \tau)]. \quad (14)$$

Здесь введены безразмерные переменные:  $s = v_\zeta / \tilde{v}$ ,  $\xi = \zeta / L$ ,  $\tau = \tilde{v} t / L$ ,  $a = L / \tilde{v} \tau_p$ , причем  $\tilde{v}(U_0/m)^{1/2}$ ,  $U_0 = \max U(\xi)$ . Безразмерная скорость  $s_{-\infty} = s(\tau \rightarrow -\infty)$  частиц при подлете к импульсу может быть найдена из интеграла энергии (8)

$$s_{-\infty} = \sqrt{s^2 + 2U_1 \operatorname{sgn} v_y \operatorname{sgn} s_{-\infty}}, \quad (15)$$

где  $U_1 = U/U_0$ . Интервал скоростей  $|s| \leq [2(1 - U_1 \operatorname{sgn} v_y)]^{1/2}$  в (14) соответствует отражающимся частицам, а  $|s| > [2(1 - U_1 \operatorname{sgn} v_y)]^{1/2}$  — пролетным. Функция распределения (13) захваченных частиц удовлетворяет условию периодичности  $g(t+T) = g(t)$ , где  $T$  — период колебания частиц в "потенциальных" ямах. Поэтому, представляя (13) в виде суммы интегралов по числу периодов  $T$  и пользуясь уравнением (7), получим

$$g_{tr} = -\frac{w}{\tilde{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} U_0 (s - a\xi), \quad (16)$$

причем  $|s| \leq [2|U_1|]^{1/2}$ .

## 2. Уравнение Максвелла

Предварительно найдем полную плотность тока, определяемую формулой

$$\mathbf{j}(\xi) = \frac{2e}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}, \xi) \mathbf{v}(\mathbf{p}) \quad (17)$$

Вводя сферическую систему координат  $\varepsilon, \vartheta, \varphi$  ( $d\mathbf{p} = (p_F^2/v_F) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ ), полярная ось которой ориентирована вдоль оси  $Ox$ , и учитывая соотношения (11), (14) и (16), после несложных преобразований получим

$$j_y(\xi) = C e n_0 \dot{u}(\xi) - j_y^{(e)}(\xi), \quad j_x = j_z = 0, \quad (18)$$

где

$$j_y^{(e)}(\xi) = \frac{3}{2\pi} e n_0 w \frac{U_0}{\varepsilon_F} [\Psi_+(U_1) + \Psi_-(U_1) + aF(\xi)], \quad (19)$$

$$\Psi_{\pm}(U_1) = \pm \int ds [s^2 \pm 2U_1(\xi)]^{1/2} \operatorname{sgn} s_{-\infty}, \quad (20)$$

$$F(\xi) = \sum_{\pm} \int ds \left\{ \xi - \sqrt{s^2 \pm 2U_1(\xi)} \tau(s, \xi) \operatorname{sgn} s_{-\infty} \right\}, \quad (21)$$

$n_0$  — равновесная концентрация электронов;  $CC = (m_0/m)(\Lambda(\varepsilon_F)/\pi)$ ; знаки "+" и "-" отвечают положительному и отрицательному знакам скорости  $v_y$  резонансных частиц в области импульса. Интегрирование по скорости  $s$  в (20) и (21) осуществляется по областям, определяемым видом

вихревого поля  $A(\xi)$ . Первое слагаемое в (18) соответствует току решетки, тогда как второе есть ток резонансных электронов. Основной вклад в (19), имеющий нулевой порядок по параметру  $a \ll 1$ , вносит бесстолкновительный ток отражающихся электронов; в то же время ток пролетных и захваченных частиц, обусловленный столкновениями, пропорционален малому параметру  $a$ .

Подставляя (18) в (19), получаем

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \frac{3}{4\pi} \delta^2 \left\{ \frac{4\pi}{3} C \frac{\varepsilon_F}{w} \dot{u}(\xi) - U_0 [\Psi(U_1) + aF(\xi)] \right\}, \quad (22)$$

где  $\delta^2 = (L/\lambda_e)^3$ ,  $\Psi(U_1) = \Psi_+(U_1) + \Psi_-(U_1)$ . В области импульса, где деформация решетки удовлетворяет неравенству

$$|\dot{u}| \gg aw \frac{U_0}{\varepsilon_F}, \quad (23)$$

при выполнении условий (2) решение уравнения (22) можно искать в виде разложения функции  $U(\xi)$  в ряд по степеням малого параметра  $\delta^{-2}$

$$U(\xi) = U^{(0)}(\xi) + \delta^{-2} U^{(1)}(\xi) + \delta^{-4} U^{(2)}(\xi) + \dots \quad (24)$$

Подставляя далее (24) в (22) и приравнявая слагаемые, содержащие одинаковые степени  $\delta^{-2}$ , в главном приближении по параметру  $\max(\delta^{-2}, a)$  получаем

$$\frac{4\pi}{3} C \frac{\varepsilon_F}{w} \dot{u}(\xi) = U_0 \Psi(U_1). \quad (25)$$

Уравнение (25) описывает компенсацию "решеточного" тока  $Cen_0 \dot{u}$  током резонансных электронов  $j_y^{(e)}$  в области импульса. Согласно (25), амплитуда "потенциальной" энергии  $U_0$  и скорость смещения решетки в максимуме  $\dot{u}_0$  связаны между собой соотношением

$$U_0 = \frac{4\pi}{3} \mu \frac{\varepsilon_F}{w} C \dot{u}_0, \quad (26)$$

где

$$\mu = 1/\max \Psi(U_1). \quad (27)$$

Предположим далее, что звуковой импульс, описываемый функцией  $\dot{u}(\xi)$ , представляет собой последовательность "положительной" и "отрицательной" деформации (рис. 1). Соответствующий этому случаю векторный потенциал  $A(\xi)$  будем искать в виде, изображенном на рис. 2. В дальнейшем, решив уравнение Максвелла (25) — условие компенсации таков, мы подтвердим форму выбранного потенциала и определим положение его характерных точек  $\xi = \xi_{m1,2}$ ,  $\xi = \xi_{s1,2}$ . Здесь точки  $\xi = \xi_{m1,2}$ , где функция  $U(\xi)$  максимальна, определяют границы области движения захваченных частиц, поперечная скорость которых положительна ( $v_y > 0$ ). В то же время точка минимума функции  $U(\xi)$  является граничной

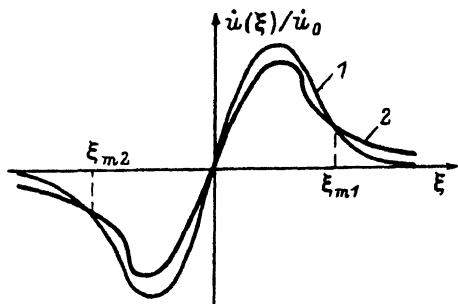


Рис. 1. Скорость смещения решетки в акустическом импульсе.

1 — начальный профиль, 2 — в момент  $\tau_1 > 0$ .

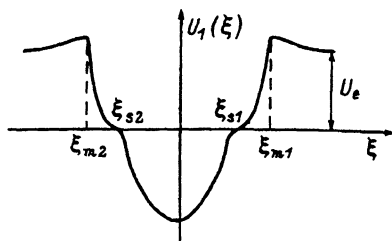


Рис. 2. "Потенциальная" энергия отражающихся электронов в поле поперечного акустического импульса.

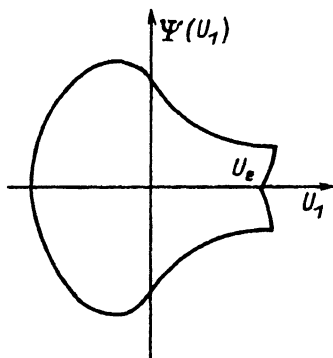


Рис. 3. Функция тока отражающихся частиц.

для области движения отражающихся электронов с отрицательным значением скорости  $v_y$ .

Вычисляя теперь интегралы (20), для функции тока отражающихся частиц  $\Psi(U_1)$  получим выражение (рис. 3)

$$\Psi(U_1) = \pm \mu \begin{cases} \psi(U_1) - \psi(-U_1), & 1 \geq U_1 \geq U_e, \\ \psi(-U_1), & 0 \leq U_1 \leq 1, \\ \psi(U_1), & -1 \leq U_1 \leq 0, \end{cases} \quad (28)$$

где

$$\psi(\pm U_1) = \sqrt{1 \mp U_1} \pm U_1 \ln \left[ \left( \sqrt{1 \mp U_1} + 1 \right) / \sqrt{|U_1|} \right],$$

при этом нормировочный множитель  $\mu$ , определяемый формулой (27), принимает значение  $\mu \simeq 0.83$ .

На основании решения трансцендентного уравнения<sup>2</sup> (25) теперь уже нетрудно найти зависимость  $U_1 = U_1(\xi)$ . Как показывает анализ, характерными точками для функции  $U_1(\xi)$  являются граничные точки  $\xi_{m1,2}$ , в которых производная  $\partial U_1 / \partial \xi$  терпит разрыв, а также точки  $\xi = 0$  и  $\xi_{s1,2}$ , где  $\partial U_1 / \partial \xi$  обращается в нуль. Вдали от импульса (при  $|\xi| \rightarrow \infty$ ) функция  $U_1(\xi)$  приближается к асимптотическому значению  $U_e \simeq 0.92$  (см. замечание в конце работы).

<sup>2</sup> Это уравнение можно решить, например, графически, совмещая рис. 1 и 3.



Необходимо отметить, что полученное выше решение уравнения Максвелла однозначно определяет "потенциальную" энергию резонансных частиц в электромагнитном поле  $U(\xi) = -(e/c)A(\xi)v_F \operatorname{sgn} v_y$ . В этом случае градиентное преобразование векторного потенциала  $\mathbf{A}(\xi)$ , не содержащего зависимость от координат  $y$  и  $z$ , может изменить лишь  $x$ -компоненту вектора  $\mathbf{A}$  и, следовательно, не отразится на виде функции  $U(\xi)$ .

### 3. Нелинейная эволюция акустических импульсов

Уравнение теории упругости, описывающее эволюцию звукового импульса, как известно, имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho w^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathcal{F}(x, t) - \rho \nu' \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}. \quad (29)$$

Здесь  $\rho$  — плотность кристалла,  $\nu'$  — коэффициент решеточной вязкости. Первое слагаемое в правой части (29) есть сила, действующая на решетку со стороны резонансных электронов, а второе — вязкая сила. Электронная сила  $\mathcal{F}$  может быть найдена варьированием внутренней энергии резонансных частиц по смещению  $u$  при постоянной энтропии:

$$\mathcal{F} = -\frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\delta u} \int dx \int d\mathbf{p} g(\mathbf{p}, x, t) \delta \varepsilon(\mathbf{p}, x, t),$$

где  $\delta \varepsilon = -(e/c)v_y \delta A$ .

Записывая вариацию потенциала  $\delta A$  как  $\delta A = -(w/\dot{u})(\partial A/\partial x)\delta u$  и вычисляя вариационную производную, с учетом условия токовой компенсации  $Cen_0\dot{u} = j_y^{(e)}$  получим

$$\mathcal{F} = -\frac{Cn_0w}{v_F} \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (30)$$

Полагая далее, что смещение  $u$  зависит от координаты  $\xi$  и медленного времени  $t'$ , т.е.  $u(x, t) = u(\xi, t')$ , и пренебрегая в (29) второй производной смещения по медленному времени  $\partial^2 u/\partial t'^2$  (такая процедура носит название метода медленно меняющегося профиля), с учетом (30) преобразуем уравнение (29) к виду

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial \tau_1} = -\dot{u}_0 \frac{\partial U_1}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \xi^2}, \quad (31)$$

где

$$\tau_1 = 2\pi C^2 n_0 p_F t' / 3\rho L, \nu = 3\rho \nu' / 4\pi C^2 p_F n_0 L.$$

Уравнение (31) совместно с уравнением Максвелла (25) решает задачу о нелинейном электромагнитном затухании акустических импульсов в металлах.

Как отмечалось выше, производная  $\partial U_1/\partial \xi$ , а вместе с ней и электронная сила в уравнении (31) имеют разрывы в граничных точках  $\xi_{m1,2}$  (рис. 2). Вне этих точек особенности производной  $\partial U_1/\partial \xi$  отсутствуют.

Учитывая, что в области, не содержащей особенности электронной силы, можно пренебречь в (31) вязкой силой, пропорциональной малому параметру  $\nu$ , представим уравнение (31) в виде

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial \tau_1} = -\frac{1}{\partial \Psi / \partial U_1} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \xi}. \quad (32)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что решение (32) удовлетворяет соотношению

$$\dot{u}(\xi, \tau_1) = \dot{u}_0(0) \Phi \left\{ \xi - \int_0^{\tau_1} \frac{d\tau}{\left. \frac{\partial \Psi}{\partial U_1} \right|_{\Psi = \dot{u}(\xi, \tau_1) / \dot{u}_0(\tau)}} \right\}, \quad (33)$$

где функция  $\Phi(\xi) = \dot{u}(\xi, 0) / \dot{u}_0(0)$  описывает начальный профиль импульса. Поскольку в точках  $\xi = 0$  и  $\xi_{s1,3}$  производная  $\partial U / \partial \xi = 0$ , а  $|\partial \Psi / \partial U_1| \rightarrow \infty$ , то, согласно (33), изменения деформации в этих точках не происходит.

Вблизи экстремумов функции  $\dot{u}(\xi, \tau_1)$  производная  $\partial \Psi / \partial U_1$ , согласно (28), имеет вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial U_1} = \pm \sqrt{1 - \Psi(U_1)} \operatorname{sgn}(\xi - \xi_{ex}^{\pm}) \gamma, \quad (34)$$

где  $\xi_{ex}^{\pm}$  — координаты экстремумов,  $\gamma \simeq 2.4$ ; верхний знак в (34) соответствует максимуму функции  $\dot{u}(\xi, \tau_1)$  ( $\xi = \xi_{ex}^+$ ), а нижний — минимуму ( $\xi = \xi_{ex}^-$ ). В этом случае затухание импульса описывается интегральным уравнением

$$\dot{u}(\xi, \tau_1) = \dot{u}_0(0) \Phi \left\{ \xi \pm \frac{1}{\gamma} \int_0^{\tau_1} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{\dot{u}(\xi, \tau_1)}{\dot{u}_0(\tau)}}} \operatorname{sgn}(\xi - \xi_{ex}^{\pm}) \right\}. \quad (35)$$

Уравнения типа (35) исследовались в работе [2] при изучении эволюции продольных акустических импульсов в металлах. В этом случае, если начальный профиль деформации при  $\xi \simeq \xi_{ex}^{\pm}$  имеет вид

$$\dot{u}(\xi, 0) = \dot{u}(\xi_{ex}^{\pm}, 0) [1 - \alpha(\xi - \xi_{ex}^{\pm})^2 + \kappa(\xi - \xi_{ex}^{\pm})^3],$$

то, согласно (35) и [2], затухание импульса в экстремумах при малых временах  $\tau_1$  определяется выражением

$$\dot{u}(\xi_{ex}^{\pm}, \tau_1) = \dot{u}(\xi_{ex}^{\pm}, 0) \left( 1 - \frac{\gamma^{1/2}}{\gamma} \tau_1 \right), \quad \tau_1 \ll 1.$$

При этом точки экстремумов  $\xi_{ex}^{\pm}$  не остаются на месте, а смещаются в область меньших значений производной  $|\partial \dot{u} / \partial \xi|$  по закону

$$\xi_{ex}^{\pm}(\tau_1) = \xi_{ex}^{\pm}(0) \mp \frac{\kappa}{2\alpha} \tau_1.$$

Рассмотрим эволюцию звуковых импульсов вблизи особых точек. Предположим, что при  $\xi \simeq \xi_{m1}$  (рис. 1) решение уравнения (31) имеет вид простой волны

$$\dot{u}(\xi, \tau_1) = \dot{u}(\xi - X\tau_1) \equiv \dot{u}(\eta), \quad (36)$$

где  $S$  — скорость волны в системе отсчета, связанной с движущимся импульсом. Тогда, подставляя (36) в (31) и интегрируя по  $\eta$ , получим

$$\nu \frac{d\dot{u}}{d\eta} = S\dot{u} + \dot{u}_0 U_1 + K, \quad (37)$$

где  $K$  — константа интегрирования. Потребуем, чтобы решение (37) удовлетворяло следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \dot{u}(\eta) &\rightarrow \dot{u}(\eta_m), & \eta &\rightarrow \eta_m \equiv \xi_{m1}, \\ \dot{u}(\eta) &\rightarrow \bar{u}, & \eta &\rightarrow \bar{\eta}. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь функция  $\bar{u}(\xi, \tau_1)$  описывает изменение профиля волны вдали от точки  $\xi_{m1}$  (при  $|\eta_m - \bar{\eta}| \gg \nu$ ) и удовлетворяет соотношению (33).

Функция  $U_1(\eta)$ , входящая в (37), с помощью условия токовой компенсации (25) может быть выражена через деформацию

$$U_1(\eta) = 1 - \frac{\sigma}{\dot{u}_0} [\dot{u}(\eta) - \dot{u}(\eta_m)], \quad \eta \lesssim \eta_m, \quad (39)$$

где

$$\sigma = -1 / \left[ \partial \Psi / \partial U_1 |_{U_1=1} \right] \simeq 5.7.$$

Подставляя (39) в (37) и интегрируя с учетом граничных условий (38), получаем

$$\dot{u}(\eta) = \dot{u}(\eta_m) + [\dot{u} - \dot{u}(\eta_m)] \left[ 1 - e^{-(S+\sigma)(\eta_m - \eta)/\nu} \right]. \quad \eta \lesssim \eta_m, \quad (40)$$

причем

$$S = \nu \left( \frac{d\dot{u}}{d\eta} \Big|_{\eta_m} \right) / (\bar{u} - \dot{u}(\eta_m)) - \sigma.$$

Аналогичное решение типа простой волны можно получить в окрестности другой особой точки  $\xi_{m2}$ .

Соотношение (40) описывает перепад деформации в окрестности граничных точек импульса. Согласно (40), область перепада движется в сопутствующей системе отсчета со скоростью  $S' = 2\pi^2 C^2 n_{op} \rho_F \mu S / 3\rho \simeq \simeq w^2 / v_F$  и имеет характерную ширину  $d = L\nu / S \simeq \nu' v_F / w^2$ . Для типичного металла кинематическая вязкость решетки равна  $\nu' \simeq 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с, поэтому  $d \simeq 10^{-5}$  см.

Рассмотренная выше задача о нелинейном электромагнитном затухании может быть решена для акустических импульсов произвольной формы. В частности, если в металле распространяется сдвиговая деформация одного знака, то, как следует из решения кинетического уравнения и уравнения Максвелла, вихревое электромагнитное поле такого импульса не имеет особенностей. В этом случае искажение профиля волны имеет такой же характер, что и в случае деформационного механизма затухания, рассмотренного в работе [2].

Отметим, что в настоящем сообщении отсутствует анализ процессов, происходящих на границе акустического импульса. Такой анализ тем не менее представляет определенный интерес. Дело в том, что уравнение Максвелла, рассмотренное в разделе 2 как условие компенсации (25), справедливо лишь в области импульса при выполнении неравенства (23).

В этом случае основной вклад в компенсирующий ток вносит бесстолкновительный ток отражающихся электронов. На границе импульса, где условие (23) нарушается, следует учитывать токи, обусловленные рассеянием резонансных частиц. Возбуждаемое в этой области вихревое поле является решением полного уравнения Максвелла (22), в котором  $\dot{i} = 0$ . Можно показать, что такое решение существует вблизи границы импульса на характерном масштабе  $L\delta^{-1}$  и вызывает появление в этой области дополнительных областей деформации — предвестников основного импульса. Исследование электромагнитного поля, а также скорости роста акустических предвестников на границе импульса является целью самостоятельной работы, которую мы предполагаем выполнить в дальнейшем.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить В.Я. Демиховского за ценные замечания, высказанные при обсуждении работы.

#### Список литературы

- [1] Гальперин Ю.М., Гуревич В.Л., Козуб В.И. // УФН. 1979. Т. 128. № 1. С. 106–133.
- [2] Демиховский В.Я., Максимова Г.М., Сауткин В.Е. // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. № 3. С. 1037–1048.
- [3] Демиховский В.Я., Сауткин В.Е., Потапов О.В. // ФТТ. 1985. Т. 27. № 4. С. 1182–1189.
- [4] Гуревич В.Л., Ланг И.Г., Павлов С.Т. // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. № 5. С. 1679–1693.

Чувашский государственный  
педагогический институт  
им. И. Я. Яковлева  
Чебоксары

Поступило в Редакцию  
23 августа 1992 г.  
В окончательной редакции  
12 октября 1992 г.