

УДК 539.23

© 1993

## ВЛИЯНИЕ СТОХАСТИЧНОСТИ ПОТОКОВ НА ПРОЦЕСС КОАЛЕСЦЕНЦИИ

А. И. Олемской, А. Я. Флат

В рамках синергетического подхода получена система кинетических уравнений, описывающая эволюцию пересыщения и потока лимитирующего компонента, а также радиуса выделения гетерофазной системы в процессе коалесценции. Учтены диссипативные и флуктуационные составляющие. Получено стохастическое уравнение для функции распределения выделений по размерам. Исследованы стационарный и нестационарный режимы и влияние флуктуаций интенсивности источников и пересыщения. Показано, что последние играют роль мультипликативного шума, усиление которого приводит к качественной перестройке вида функции распределения. Исследован характер этой перестройки.

Несмотря на длительную историю, задача о коалесценции выделений новой фазы [1] постоянно привлекает к себе внимание [2-8]. Так, в работе [2] было выяснено, что процесс роста выделений складывается из трех стадий.

1) Автономный режим в условиях значительного пересыщения компонентом, лимитирующим объемную долю новой фазы (здесь пересыщение  $\Delta$  остается постоянным, в связи с чем не меняется и критический радиус  $R_c = R_s/\Delta$ ;  $R_s = 2\sigma\Omega/T$ ,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\Omega$  — атомный объем,  $T$  — температура в энергетических единицах).

2) Истощение содержания лимитирующего компонента в окрестности выделения, приводящее к увеличению критического радиуса.

3) Стадия коалесценции, в ходе которой диффузия лимитирующего компонента от малых выделений к большим поддерживает постоянным отношение максимального радиуса к критическому.

Согласно [3], основные особенности процесса коалесценции [1] остаются в принципе неизменными при различных механизмах диффузии и размерности выделений. Более того, оказывается [4], что не вызывает качественных изменений и действие слабых источников лимитирующего компонента. Однако включение сильных источников приводит к подавлению разброса выделений по размерам  $R$  за счет фиксации некоторого отношения  $u = R/R_c$ , величина которого задается интенсивностью источника.<sup>1</sup> При этом действие сильного источника может настолько удалить систему выделений от равновесия, что образуется диссипативная периодическая структура [6]. Характерно, что пороговое значение интенсивности оказывается обратно пропорциональным квадрату радиуса экранирования  $l$  диффузионного потока к данному выделению за счет остальных [6]. Явное

<sup>1</sup> Следует иметь в виду, что в общем случае [3] первоначально установленное [4] совпадение слабых источников с затухающими, а сильных — с постоянными и нарастающими, вообще говоря, не имеет места [5].

выражение  $l$  через параметры дисперсной системы найдено в рамках самосогласованного приближения [7].

В разделе 1 мы покажем, что указанные результаты получают единую трактовку в рамках синергетического подхода [9]. Кроме того, такой подход позволяет стандартным образом обобщить схему [1, 4, 5] на случай потоков компонентов, хаотически изменяющихся со временем (раздел 2). В реальном эксперименте вследствие флуктуаций среды такая ситуация реализуется даже в отсутствие источника лимитирующего компонента: относительно высокий уровень флуктуаций пересыщения имеет место при малом пределе растворимости лимитирующего компонента, скачкообразному изменению концентрации способствует также слияние выделений за счет их движения как целого [10, 11]. Можно предложить и другие механизмы, способствующие стохастическому изменению пересыщения. Кроме того, при включении источников лимитирующего компонента добавляются флуктуации интенсивности самого источника. Оказывается, что два этих вида стохастичности играют совершенно разную роль. Флуктуации интенсивности источника представляют собой аддитивный шум [9], который лишь размывает распределение выделений по размерам, не изменяя существенно его форму. Напротив, флуктуации концентрации сводятся к мультипликативному шуму [9], нарастание которого способно коренным образом перестроить распределение размеров выделений. Как показывает численное решение соответствующего нестационарного уравнения Фоккера—Планка, где шум приводит к диффузионному слагаемому, при его нарастании может появиться дополнительный максимум при значениях  $u < u_c$  и, кроме того, реализуется режим типа перемежаемости. При этом полный ансамбль выделений разбивается на ряд неперекрывающихся подансамблей, ограниченных различными значениями  $u$ . Характерно, что при фиксированном шуме умеренное нарастание интенсивности источников подавляет действие шума и распределение принимает  $\delta$ -образный характер.

## 1. Формулировка задачи

Представим переход в режим коалесценции как обусловленное ростом критического радиуса  $R_c$  кинетическое превращение системы выделений. Процесс самоорганизации связан с диффузионным взаимодействием и приводит к установлению когерентного стационарного состояния, характеризуемого (в отсутствие шума) не зависящим от времени максимальным значением относительного радиуса  $u = R/R_c$ . Полный набор гидродинамических мод, однозначно параметризующих задачу, представляется радиусом выделения  $R$ , концентрацией лимитирующего компонента  $c$  и его потоком  $J$ . Самосогласованная кинетика временной эволюции этих величин задается системой [1-8, 10]

$$\dot{R} = \frac{R}{\tau_R} + J + \xi_R(r, t), \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{j}} = -\frac{J}{\tau_j} - v^2 \nabla (c - c_0) + \xi_j(r, t), \quad (2)$$

$$\dot{c} = \frac{(c_0 - c)}{\tau_c} - \nabla \cdot \mathbf{J} + \xi_c(r, t). \quad (3)$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени  $t$ ,  $\nabla$  — по координате  $\mathbf{r}$ ;  $\tau_{R, J, c}$  — времена релаксации соответствующих величин;  $v$  — постоянная;  $c_0 = c_\infty + (1 + R_s/R) - G\tau_c$  — равновесная концентрация вблизи выделения радиусом  $R$  при темпе генерации  $G$ ;  $c_\infty$  — термодинамическое значение (на линии раст-

воримости) [6]. Первые слагаемые в правых частях (1)–(3) определяют дебаевскую релаксацию величин  $R$ ,  $J$ ,  $c$  к равновесным значениям  $R=0$ ,  $J=0$ ,  $c=c_0$ , последние слагаемые  $\xi(r, t)$  — их флуктуации вблизи этих значений. В пренебрежении флуктуациями  $\xi(r, t)$  уравнение непрерывности (3) получено из микроскопических соображений в [6]. В (2) обычно полагается  $\dot{J}=0$ ,  $\xi_J(r, t)=0$ , в результате чего следует  $J=-D\nabla(c-c_0)$ , где коэффициент диффузии  $D=v^2\tau_J$ . И наконец, уравнение (1) исследовалось в приближении  $\tau_R=\infty$ ,  $\xi_R(r, t)=0$  [1].

При анализе системы (1)–(3) очень важным является соотношение времен релаксации  $\tau_{J,R,c}$ . Поскольку скорость перескока на межатомное расстояние  $a$  составляет  $v=a/\tau_J$ , то для наименьшего из  $\tau_{J,R,c}$  имеем  $\tau_J \sim a^2/D$ . С другой стороны, перераспределение концентрации  $c$  определяется параметром  $R_s$  и, очевидно,  $\tau_c \sim R_s^2/D$ . Величина  $\tau_R$  представляет собой время, по истечении которого все выделения сольются в одно радиусом  $R$  в образце размером  $L$ . Поскольку объемная доля составляет, с одной стороны,  $\sim (R_m/L)^3$ , а с другой — определяется по правилу рычага величиной  $\Delta_i/\Delta_m$ , где  $\Delta_i$  — полное пересыщение с учетом действия источников,  $\Delta_m$  — разница предельных концентраций растворимости (miscibility gap), то  $R_m^3 \sim (\Delta_i/\Delta_m) L^3$ . Отсюда с учетом соотношения  $R^3 \approx R_c^3 \sim DR_s c_\infty t$  [1] находим  $\tau_R \sim (\Delta_i/\Delta_m c_\infty) (L/R_s)^3 \tau_c$ . Таким образом, времена релаксации величин  $J, c, R$  соотносятся как  $1 : (R_s/a)^2 : (\Delta_i/\Delta_m c_\infty) L^3 / (R_s a^2)$ . При реальных значениях параметров имеем  $(R_s/a)^2 > 10$  для выделений фазы в сплавах и  $(R_s/a)^2 \sim 10^4 \div 10^5$  для пор. Соответственно отношение  $(\Delta_i/\Delta_m c_\infty) \times L^3 / (R_s a^2)$  составляет  $\sim 10^{22}$  в первом случае и  $\sim 10^{20}$  во втором.

Приведенные оценки показывают, что  $\tau_R \gg \tau_{J,c}$ , и на характерных временах  $\theta = R_s^2/Dc_\infty$  изменения радиуса  $R$  поток  $J$  и распределение концентрации  $c(r)$  можно считать стационарными. Это означает, что в задаче о коалесценции выполняется адиабатическое соподчинение — в пренебрежении флуктуациями  $\xi_J(r, t)$ ,  $\xi_c(r, t)$  сопряженное поле  $J(t)$  и управляющий параметр  $c(t)$  следуют в своем изменении за медленной эволюцией параметра  $R(t)$ . Тогда скорости  $\dot{J}$ ,  $\dot{c}$  в (2), (3) можно пренебречь [9], в результате чего получаем

$$J = -D\nabla(c - c_0) + j(r, t),$$

$$j(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_J(r, t') e^{-(t-t')/\tau_J} dt', \quad (4)$$

$$l^2 \nabla^2 (c - c_0) - (c - c_0) = S(r, t),$$

$$S(r, t) = \int_{-\infty}^t [\nabla j(r, t') - \xi_c(r, t')] e^{-(t-t')/\tau_c} dt', \quad (5)$$

где  $l = D\tau_c$ . Согласно (5), в неэкранированной области  $r < l$  решение хорошо аппроксимируется гиперболой  $r^{-1}$  [6], в соответствии с чем производную  $\nabla$  в регулярных слагаемых (1)–(5) можно заменить на  $R^{-1}$ . После этого стохастическое уравнение движения (1) принимает вид

$$\dot{R} = - \left( \frac{R}{\tau_R} - \frac{D\Delta_G}{R} + \frac{c_\infty DR_s}{R^2} \right) + \xi(r, t),$$

$$\xi(r, t) = \xi_R(r, t) + i(r, t) + j(r, t),$$

$$i(r, t) = -\frac{D}{l} \nabla \int S(r', t) e^{-|r-r'|/l} dr', \quad (6)$$

где  $\Delta_G = (c - c_\infty) + G\tau_c$  — пересыщение с учетом действия источников  $G$ . В сравнении со стандартным уравнением движения [1] полученное уравнение (6) обладает двумя важными отличиями — релаксационным слагаемым с конечным временем  $\tau_R$  и стохастической составляющей  $\xi(r, t)$ .

Рассмотрим сначала характер первой особенности, полагая временно  $\xi(r, t) = 0$ . Очевидно, отражаемый релаксационным слагаемым учет заключительной стадии коалесценции, когда значительно падает плотность выделений, представляется существенным лишь в мезоскопических объемах. Согласно приведенной оценке, при  $\tau_R \sim 10^7$  с их размер составляет  $L \sim (10^2 + 10^4) R_c$ . Соответственно в случае многофазных систем в сплавах это отвечает области в несколько микрон, т. е. зерну, а для пор — образцам размером до долей миллиметра. Таким образом, при эволюции пор в тонкостенных конструкциях данная особенность может оказаться весьма существенной.

Для количественного исследования перейдем к относительному радиусу  $u = R/R_c$  и логарифмическому времени  $\tau$  [1]. В результате детерминированная часть (6) принимает вид

$$\frac{du^3}{d\tau} = -\frac{\partial V}{\partial u}, \quad V(u) = \gamma \left( u - \frac{u^2}{2} \right) + \frac{u^4}{4}. \quad (7)$$

Здесь параметр  $\gamma$  и связь времен  $\tau(t)$  определяются равенствами

$$\gamma = 3 \frac{R_{c0}^3}{R_c^3} \frac{dt}{d\tau}, \quad R_c^{-3} \frac{dR_c^3}{d\tau} + 3 \frac{\theta}{\tau_R} \frac{dt}{d\tau} = 1, \quad (8)$$

где время  $t$  измерено в масштабе  $\theta = R_c^2/Dc_\infty$ . При малых значениях управляющего параметра  $\gamma$ , задаваемого стационарной скоростью изменения концентрации, реализуется монотонное нарастание синергетического потенциала  $V(u)$  и, согласно (7), стационарное состояние отвечает точке  $u_0 = 0$ . При  $\gamma_c = 3^3/2^2$  зависимость  $V(u)$  приобретает плато в точке  $u_c = 3/2$ , а при  $\gamma > \gamma_c$  — минимум в точке  $u$

$$u \approx u_c + (u_c/\sqrt{3}) \sqrt{\gamma/\gamma_c - 1}, \quad \gamma/\gamma_c - 1 \ll 1.$$

Согласно анализу [1, 4, 5], в отсутствие шума на плато ( $\gamma = \gamma_c$ ) реализуется плавное распределение выделений по размерам, а в минимуме  $V(u)$  —  $\delta$ -образное.

При заданном значении  $\gamma > \gamma_c$  управляющего параметра из (8) следует

$$R_c^3 = R_c^3 (\delta + e^{-\tau})^{-1}, \quad \delta = \gamma\theta/\tau_R, \quad (9)$$

$$\tau = \ln \{ \delta^{-1} [\exp(\delta t/\gamma) - 1] \}. \quad (10)$$

Как и следовало, в пределе  $\delta \rightarrow 0$  получаем обычные результаты теории коалесценции в макрообъемах [1-3]. При конечных значениях  $\delta$  линейное нарастание критического объема  $R_c^3(t)$ , как и прямая пропорциональность времен  $e^\tau$  и  $t$  [1], реализуется лишь в интервале  $t$ , ограниченном значением  $\tau_R$ . За его пределами скорость  $dR_c^3/dt$  спадает, а  $de^\tau/dt$  нарастает, приводя при  $t \gg \tau_R$  к

стабилизации критического объема при значении  $R_{cm}^3 = \gamma^{-1} c_\infty DR_r \tau_R$  и к редукции сингулярного времени  $\tau$  к физическому  $t$ , согласно соотношению  $\tau = -\ln \delta + t/\tau_R$ . Согласно приведенной оценке  $\tau_R$ , имеем  $R_{cm}^3 \sim (\Delta_i/\Delta_m \gamma) L^3$ , что означает слияние всех выделений с объемной долей  $\Delta_i/\Delta_m$  в одно максимальное радиусом  $R_m \sim (\Delta_i/\Delta_m)^{1/3}$ . При этом, разумеется, система оказывается в состоянии полного термодинамического равновесия.

Займемся теперь исследованием второй особенности уравнения (6), связанной с шумом  $\xi(r, t)$ . Он складывается из составляющих  $\xi_R(r, t)$ ,  $i(r, t)$ ,  $j(r, t)$ , обусловленных соответственно флуктуациями радиусов выделений в результате их столкновений и пространственно-временными флуктуациями  $\xi_j(r, t)$ ,  $\xi_c(r, t)$  потока и концентрации. Различная природа составляющих  $\xi_{r,j,c}$  проявляется уже в том, что если последние положить  $\delta$ -коррелированными, т. е. имеющими нулевое время флуктуаций, то для  $j(t)$  оно составляет  $\tau_j$ , а для  $S(t)$ ,  $i(t)$  — величину  $\tau_c$ . Флуктуации  $i(r)$  коррелированы, кроме того, в пространстве размером  $\sim l = (D\tau_c)^{1/2}$ . Все это указывает на тот факт, что процесс эволюции потока и концентрации носит немарковский характер, связанный с наличием времени последствия с масштабами  $\tau_j$ ,  $\tau_c$ . Согласно (6), немарковость эволюции радиуса характеризуется временным масштабом  $\tau_c$  и пространственным  $l$ . Как показано в [12], простым расширением понятия «состояние системы» за счет добавления к координатам и скоростям обобщенных ускорений в качестве независимых переменных можно избавиться от немарковского характера эволюции.

Поскольку процесс коалесценции обусловлен пространственным перераспределением концентрации в поле выделений различного размера, то указанное различие в характере составляющих шума  $\xi(r, t)$  показывает, что наибольшее влияние могут оказать компоненты  $i(r, t)$ ,  $j(r, t)$ . Их учет осуществляется стандартной заменой [9] регулярного управляющего параметра  $\gamma$  в (7) на флуктуирующий  $\gamma(t) = \gamma + \sigma \xi(t)$ , где разброс  $\xi(t)$  нормирован на единицу. В результате стохастическое уравнение движения принимает стандартный вид [9]

$$\frac{dz}{dt} = f_\gamma(u) + \sigma g(u) \xi(t),$$

$$\langle \xi(t) \xi(0) \rangle = \delta(t),$$

$$z = u^3, f_\gamma(u) = h(u) + \gamma g(u), h(u) = -u^3, g(u) = u - 1. \quad (11)$$

Поскольку множитель  $g(u)$  перед флуктуацией  $\xi(t)$  не сводится к константе, то введенный шум среды носит мультипликативный характер и может привести к качественному изменению функции распределения выделений по размерам [9]. Для выяснения картины такой перестройки рассмотрим соответствующее уравнение Фоккера—Планка

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla I = 0, I = f\psi - \frac{\sigma^2}{2} \nabla (g^2 \psi), \quad (12)$$

где обобщенный поток  $I$  записан в представлении Ито [9], а дивергенция  $\nabla$  сводится к  $\partial/\partial u$ , если в стохастическом уравнении (11) роль исходной переменной играет размер выделений  $u$ , и к производной  $\partial/\partial z$ , если объем  $z = u^3$ . Очевидно, первый случай отвечает более сильному, а второй — слабому влиянию флуктуаций. Рассмотрим эти случаи отдельно. Обычно исследуется влияние шума в стационарном случае, когда поток  $I = 0$  и распределение  $\psi(u)$  имеет квазигиббсовский вид с синергетическим потенциалом  $V_\sigma(u)$  в показателе [9].

В этом случае действие шума приводит к отличию вида  $V_\sigma(u)$  от детерминированного слагаемого  $V(u)$  в (7). С формальной точки зрения именно это обстоятельство является причиной фазовых переходов под действием шума [9]. Простота стационарного случая состоит в том [9], что из вида синергетического потенциала

$$V_\sigma(u) = -2 \int f(u) g^{-2}(u) du + 2\sigma^2 \ln [g(u)] \quad (13)$$

немедленно следуют особенности функции распределения

$$\psi(u) \propto \exp \{-V_\sigma(u)/\sigma^2\}. \quad (14)$$

Согласно [2], в процессе эволюции ансамбля выделений фазы стационарный случай реализуется на стадии постоянного пересыщения. Используя формализм [2, 9], нетрудно показать, что при этом действие шума, хотя и является мультипликативным, приводит лишь к уменьшению критического радиуса в  $(1 + \sigma^2/3)$  раз, способствуя только удлинению стационарной стадии, а не ее изменению.

Особенность стадии коалесценции состоит в ее нестационарности, что существенно усложняет уравнение (12). В отсутствие шума ( $\sigma = 0$ ) диффузионное слагаемое потока пренебрежимо, благодаря чему и оказалось возможным аналитическое решение [1]. Нестационарность процесса коалесценции, с одной стороны, и диффузионный вклад шума, с другой стороны, повышают порядок дифференциального уравнения (12) до второго и делают возможным только численный анализ. Откладывая изложение его результатов до следующего раздела, выпишем явный вид уравнения Фоккера—Планка, удобного для проведения такого анализа.

Подобно [1-4] из уравнения баланса легко установить, что временная зависимость искомого распределения имеет вид  $\psi(\tau) \propto R_c^{-3}(\tau) \propto (\delta + \epsilon^{-\tau})$ . Тогда, подставляя в (12) решение в виде  $\psi(u, \tau) = (\delta + \epsilon^{-\tau}) \psi(u)$ , для функции  $\psi(u)$  получаем уравнение  $\psi'' + a\psi' + b\psi = 0$ . Вид коэффициентов  $a, b$  зависит от характера исходной флуктуирующей величины. В случае объемных флуктуаций, когда исходной стохастической переменной является объем  $z = u^3$ ,

$$a = 2(z^{1/3} - 1)^{-1} \left[ \frac{2}{3} z^{-2/3} - \frac{\gamma}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} z (z^{1/3} - 1)^{-1} \right],$$

$$b = -2(z^{1/3} - 1)^{-2} \left[ \frac{1}{9} z^{-5/3} (z^{1/3} - 2) + \frac{\gamma}{3\sigma^2} z^{-2/3} - \frac{2}{\sigma^2} \right]. \quad (15)$$

При флуктуации радиуса  $u$

$$a = -6u^2(u-1)^{-2} \left[ \frac{2}{3} u^{-3}(u^2 - 3u + 2) + \frac{\gamma}{\sigma^2}(u-1) - \frac{1}{\sigma^2} u^3 \right],$$

$$b = 18u^4(u-1)^{-2} \left[ \frac{1}{9} u^{-6}(3u^2 - 12u + 10) + \frac{\gamma}{\sigma^2} u^{-3}(u-2) + \frac{4}{3\sigma^2} \right] e^{-t/\tau}. \quad (16)$$

Здесь время  $t$  выражено в обычных единицах. Характерно, что на заключительной стадии коалесценции ( $t \gg \tau_R$ ), когда  $b = 0$ , а  $\psi(u, \tau) \delta\psi(u)$ , опять устанавливается стационарный режим с функцией распределения (14).

## 2. Обсуждение результатов

а) Нестационарный режим ( $t \ll \tau_R$ ). Согласно [1-4], закон сохранения лимитирующего компонента обеспечивается при значении управляющего параметра  $\gamma \geq \gamma_0$ , где разница  $\gamma - \gamma_c$  нарастает с интенсивностью источников. Поэтому численный анализ функции распределения  $\psi = \psi(u)$  проведем в интервале, ограниченном снизу значением  $\gamma_c = 27/4$ .

Прежде всего обращает на себя внимание тот факт, что вид уравнения Фоккера—Планка определяется выбором исходной переменной, флуктуирующей со временем. Действительно, уравнение Фоккера—Планка для флуктуирующего объема  $z = u^3$  можно получить двояким образом: во-первых, заменой  $u = z^{1/3}$  в стохастическом уравнении (12) и, во-вторых, стандартными выкладками в исчислении Ито [9] из уравнения движения (7), в котором произведена замена  $u^3 = z$ . Оказывается, что получающиеся уравнения совпадают друг с другом только при условии, если во втором случае воспользоваться формализмом в духе Стратоновича, т. е. добавить к обобщенному потоку  $I$  слагаемое  $(1/3)\sigma^2 z^{-1/3} \psi \times \times (z) g^2(z)$ , где  $\psi(z)$  — функция распределения, связанная с функцией распределения в пространстве размеров соотношением  $\psi(z) dz = \psi(u) du$ . Согласно [9], указанная неоднозначность обусловлена неаналитическим характером функции  $g(z) = z^{1/3}$ .

Несмотря на указанную разницу в пределе исчезающего шума, имеем распределения  $\psi(u)$ ,  $\psi(z)$ , совпадающие с результатом Лифшица—Слезова. С увеличением интенсивности шума  $\sigma$  левее основного нефлуктуационного максимума появляется наплыв, переходящий при критическом значении  $\sigma_c$  в флуктуационный максимум (рис. 1). Положение  $u_m$ ,  $u_M$  флуктуационного и основного максимумов, а также величина  $u'_m$  характеризующая положение наплыва согласно условию  $d^2\psi/du^2 = 0$ , представлены в зависимости от интенсивности шума на рис. 2. Видно, что по мере нарастания шума указанные максимумы сближаются, причем высота флуктуационного максимума нарастает, а основного уменьшается. При значении  $\sigma_0 > \sigma_c$  флуктуационный максимум поглощает основной. Интервал  $\sigma < \sigma_c$  характеризуется особенностью, отвечающей экстремуму производной от функции распределения. При  $\sigma > \sigma_c$  появляется экстремум самой функции. В этой связи можно говорить о флуктуационном переходе второго рода в области  $\sigma < \sigma_c$  и первого рода при  $\sigma > \sigma_c$ . Точка  $\sigma_0$  представляет собой обратную бифуркацию флуктуационного и основного максимумов.

Кроме описанных особенностей, характерных для размеров  $u$  1, нарастание шума приводит к осцилляции зависимости  $\psi(u)$  (рис. 1). При флуктуирующем размере  $u$  эти осцилляции наблюдаются только при значительном уровне шума в области больших значений  $u$ . В случае флуктуирующего объема  $z = u^3$  значения  $\sigma$ , начиная с которых проявляется осциллирующий режим, гораздо меньше, а сами осцилляции происходят как при больших, так и при малых  $u$ . Образующееся

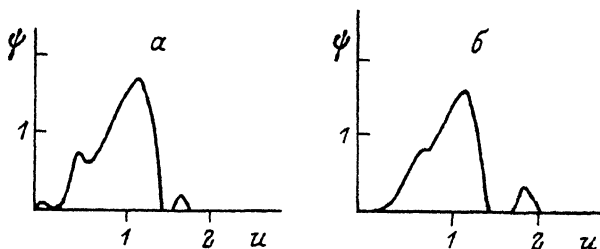
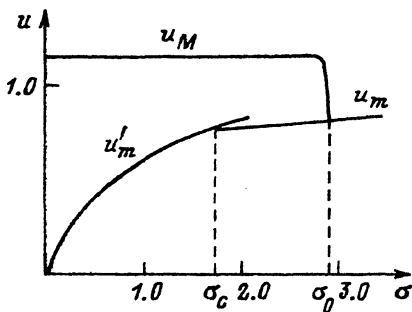


Рис. 1. Вид функции распределения выделений при уровне шума  $\sigma = 1.8$  и  $\gamma = \gamma_c$ .

а — случай флуктуирующего объема  $z$ , б — случай флуктуирующего радиуса  $u$ .

Рис. 2. Зависимость положений экстремальных точек функции распределения  $u_M$ ,  $u_m$  и ее производной  $u'_m$  от уровня шума  $\sigma$  ( $\gamma = \gamma_c$ ).



распределение отвечает разделению полного ансамбля выделений на набор изолированных подансамблей, каждый из которых ограничен сверху и снизу предельными значениями  $u$ . По аналогии с гидродинамикой [13, 14] о таком распределении можно говорить как о режиме перемежаемости, когда за областью разрешенных в данном подансамбле значений  $u$  следует область запрещенных, затем значения  $u$  из другого подансамбля и т. д. (рис. 1, 3). Основой указанной аналогии является то обстоятельство, что как в гидродинамике, так и в рассматриваемом случае причиной перехода является усиление шума (в нашем случае это приводит к увеличению диффузионного слагаемого в уравнении Фоккера—Планка, способствующему реализации колебательного режима). Поскольку выделения в подансамблях представляют собой по сути дела усиленные шумом флуктуации, то получающееся распределение  $\psi(u)$  должно быть весьма чувствительным к начальным условиям. Что касается зависимости вида распределения  $\psi(u)$  от интенсивности шума, то, как видно из рис. 1, 3, при увеличении  $\sigma$  происходит, с одной стороны, рост амплитуды осцилляций, а с другой — уменьшение их числа. В конце концов при больших  $\sigma$  остается один доминирующий максимум, который поглощает также и исходный максимум в области  $u < u_0$ . Рост управляющего параметра  $\gamma$  при заданном уровне шума приводит к значительному усилению максимумов в области перемежаемости (рис. 4). Характерно, что при этом изменяются также положение и число самих максимумов, хотя при больших  $\gamma$ , когда  $\gamma - \gamma_c \ll \gamma$ , так же как и при значительном шуме  $\sigma$ , выделяется один доминирующий максимум. Следует отметить, что при увеличении  $\gamma$  происходит смещение в сторону больших значений характерных точек  $\sigma_c$ ,  $\sigma_0$  на диаграмме экстремумов (рис. 2).

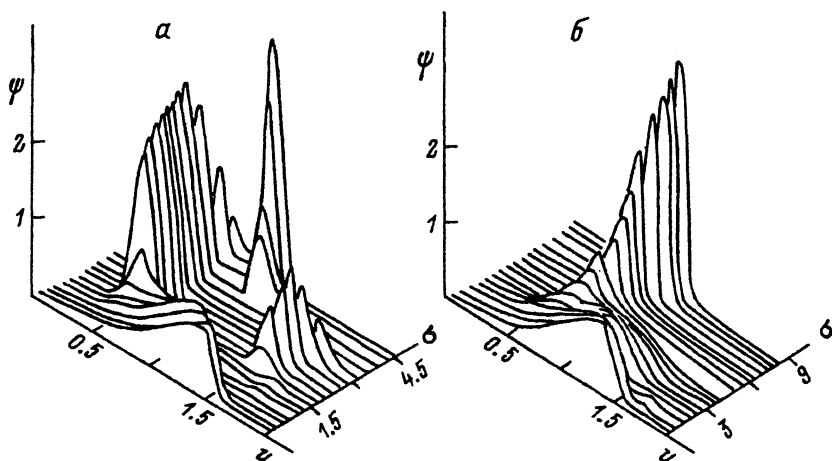
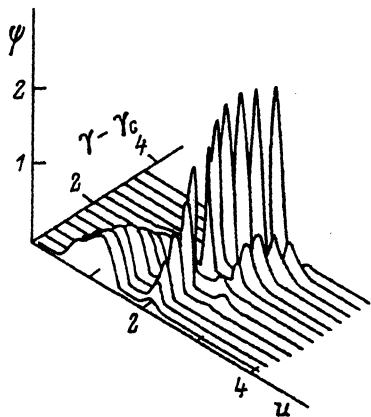


Рис. 3. Изменение функции распределения  $\psi(u)$  при нарастании шума  $\sigma$  ( $\gamma = \gamma_c$ ).

а — случай флуктуирующего объема  $z$ , б — случай флуктуирующего радиуса  $u$ .



Рис. 4. Изменение функции распределения  $\psi(u)$  при нарастании интенсивности источников  $\gamma$  и постоянном уровне шума  $\sigma = 1.8$ .



б) Стационарный режим ( $t \gg \tau_R$ ). Поскольку в стационарном режиме особенности функции распределения полностью определяются особенностями потенциала  $V_\sigma(u)$  (14), то достаточно проанализировать его поведение. Как и следовало ожидать,  $V_\sigma(u)$  имеет основной минимум при  $u_M = 1$ , т. е. наиболее вероятный размер выделения совпадает с критическим. Как и в нестационарном случае, нарастание шума приводит к возникновению флуктуационного максимума  $u_m < u_M$ , отделенного от основного

энергетическим барьером (рис. 5). При  $\sigma_0 17$  этот барьер пропадает и указанные минимумы сливаются в один широкий. При этом функция распределения представляет собой ярко выраженный  $\delta$ -образный пик. Рост интенсивности источников  $\gamma$  при постоянном уровне шума  $\sigma$  приводит к появлению еще одного, широкого, минимума при значениях  $u > u_M$  (рис. 6). Этот минимум, связанный с накачкой лимитирующего компонента, поглощает при  $\gamma 2\gamma$  все остальные и сдвигается в сторону больших  $u$ .

В заключение авторы выражают благодарность В. В. Слезову за плодотворное обсуждение работы.

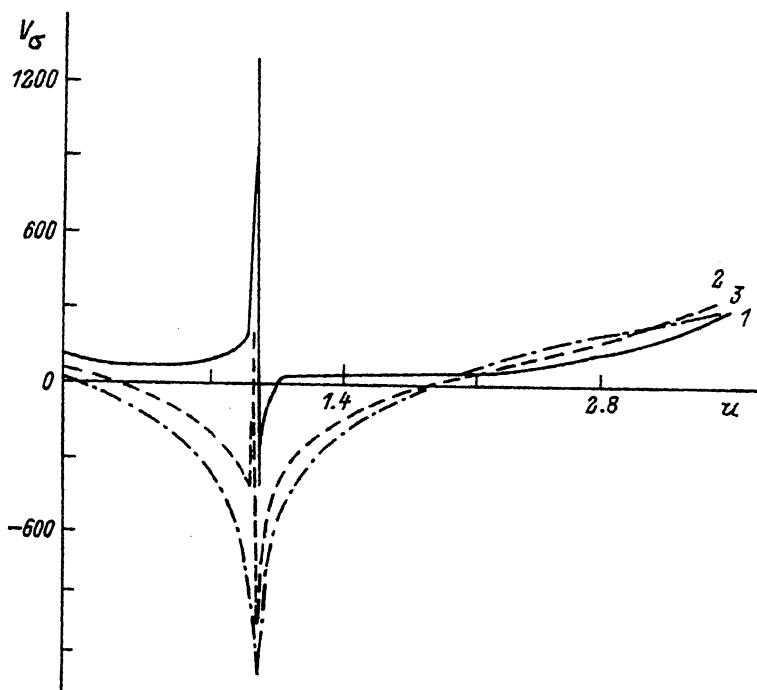


Рис. 5. Вид синергетического потенциала при различных значениях  $\sigma$ .

1 —  $\sigma = 10^{-4}$ , 2 — 10, 3 — 17.  $\gamma = \gamma_c$ .

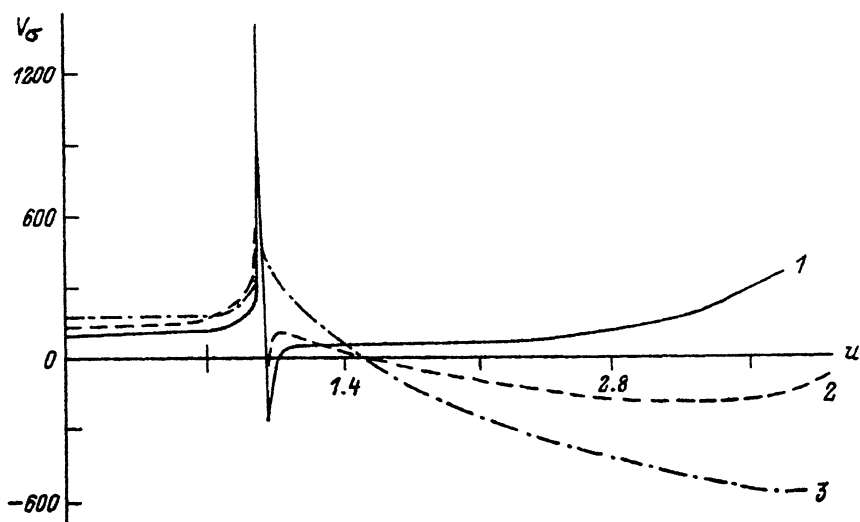


Рис. 6. Вид синергетического потенциала при различных  $\gamma$ .

$1 - \gamma = 6.75, 2 - 15, 3 - 50. \sigma = 1.$

#### Список литературы

- [1] Лифшиц И. М., Слезов В. В. // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. № 2. С. 479—492.
- [2] Михайлова Ю. В., Максимов Л. А. // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. № 10. С. 1368—1377.
- [3] Гегузин Я. Е., Кагановский Ю. С. // УФЖ. 1976. Т. 21. № 2. С. 254—262.
- [4] Слезов В. В., Шикин В. Б. // ФТТ. 1964. Т. 6. № 1. С. 7—15.
- [5] Олемской А. И., Парипский А. В. // Изв. вузов. Физика. 1978. № 11. С. 122—128; № 12. С. 73—76.
- [6] Максимов Л. А., Рязанов А. И. // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. № 6. С. 2311—2327.
- [7] Слезов В. В. // ФТТ. 1989. Т. 31. № 8. С. 20—30.
- [8] Гегузин Я. Б., Кривоглаз М. А. Движение микроскопических включений в твердых телах. М.: Металлургия. 1971. 344 с.
- [9] Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 397 с.
- [10] Осипов А. В. // Металлофизика. 1990. Т. 12. № 4. С. 44—47.
- [11] Abis S., Caciuffo R., Carsughi F., Coppola R., Magnani M., Rustichelli F., Stefanon M. // Phys. Rev. B. 1990. V. 42. N 4. P. 2275—2281.
- [12] Волков В. С. // ЖЭТФ. 1990. Т. 98. № 1. С. 168—177.
- [13] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. // Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [14] Черемской П. Г., Слезов В. В., Бетехтин В. И. Поры в твердом теле. М.: Энергоатомиздат, 1990. 376 с.

Сумский физико-технологический институт

Поступило в Редакцию  
18 марта 1992 г.