

## Дуализм магнитостатики в одномерной цепочке классических магнитных моментов

© А.А. Иванов<sup>1</sup>, В.А. Орлов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сибирский федеральный университет,  
Красноярск, Россия

<sup>2</sup> Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева,  
Красноярск, Россия

E-mail: orlhome@rambler.ru

(Поступила в Редакцию 15 июня 2010 г.  
В окончательной редакции 27 ноября 2010 г.)

Магнитостатическое взаимодействие в поликристаллических нанопроволоках проявляется двумя конкурирующими способами, обеспечивая существование стабильной доменной структуры даже при отсутствии обменной связи между кристаллами. Установлено, что не только доменная, но и блочная структура намагниченности нанопроволоки, состоящей из обменно-невзаимодействующих кристаллитов, имеет магнитостатическую природу. Аналитически вычислены и проверены в моделировании средняя ширина доменной стенки и корреляционный радиус намагниченности. Показана возможность реализации фаз „легкая ось“ и „легкая плоскость“ эффективной анизотропии при различных формах кристаллитов.

Особенности вклада магнитостатики в создание эффективной анизотропии низкоммерных магнитных систем хорошо изучены (см., например, [1,2]). Магнитостатическое взаимодействие в нанопроволоках и прочих одномерных и квазиодномерных системах создает два конкурирующих фактора, подобных магнитной анизотропии и обменному взаимодействию. Мы считаем, что рассмотрение этого обстоятельства заслуживает особого внимания. В работах разных авторов это двойственное проявление магнитостатики так или иначе выступало. В публикациях 80-х годов [3,4] на примере двух- и трехмерного случая было показано, что в системе только диполь-дипольно взаимодействующих магнитных частиц реализуется неоднородное состояние намагниченности, подобное вихревой структуре. Топологии подобных солитонных решений в распределении направлений моментов как цепочек магнитных диполей [5], так и цепочек электрических диполей [6] сейчас активно исследуются. Интерес к таким системам связан с перспективами их использования в широких областях биофизики, физики магнитных явлений и пр.

Важной для установления двуединой природы действия магнитостатики является работа [5]. В ней проведен анализ распределения магнитных моментов в одномерной цепочке классических магнитных диполей. Учитывалось только диполь-дипольное взаимодействие между магнитными моментами. При минимизации функционала в Фурье-представлении диполь-дипольного слагаемого возник квадратичный член по волновому числу. Поскольку при решении дифференциальных уравнений методом Фурье возникновение квадратичных членов по волновому числу обычно связано с членами, содержащими вторые производные по координате, постольку этот член был назван „псевдообменным“ слагаемым. Может показаться, что такое слагаемое своим суще-

ствованием обязано дискретности задачи. На самом деле это кажущийся эффект. „Псевдообменное“ свойство присуще самому диполь-дипольному взаимодействию и в дискретном и в непрерывном рассмотрении. В компьютерном моделировании авторы [5] получили нечто напоминающее доменную стенку. Поскольку ориентация намагниченности для простоты задавалась только одним углом, распределение намагниченности при переходе от одного магнитного момента к другому изменялось скачками, отражающими тенденцию к „антиферромагнитному“ упорядочению.

Проблема, родственная анализу магнитостатического взаимодействия, обсуждалась в [6]. В этой работе рассматривалась одномерная цепочка электрических диполей. Так же как и в [5], при компьютерном моделировании проявилось „псевдообменное“ свойство электрического диполь-дипольного взаимодействия. Но поскольку, как и в работе [5], при компьютерном моделировании использовалось одноугловое приближение в описании ориентаций диполей, гладкая составляющая (несомненно, присутствующая) в распределении направлений диполей оказалась замаскированной.

Перечисленные выше работы указывают на то, что проявление „псевдообменного“ поведения магнитостатического взаимодействия достойно внимания магнитологов. Ясная демонстрация его имеет общефизическое значение. Целью настоящей работы является изучение особенностей формирования структуры намагниченности в ферромагнитных поликристаллических нанопроволоках с отсутствующим обменным взаимодействием между кристаллитами. При поиске равновесных конфигураций распределения дипольных моментов в одноугловом приближении предполагалось, что дипольные моменты цепочки лежат в одной плоскости, т.е. имеют одну степень свободы и их направления описываются

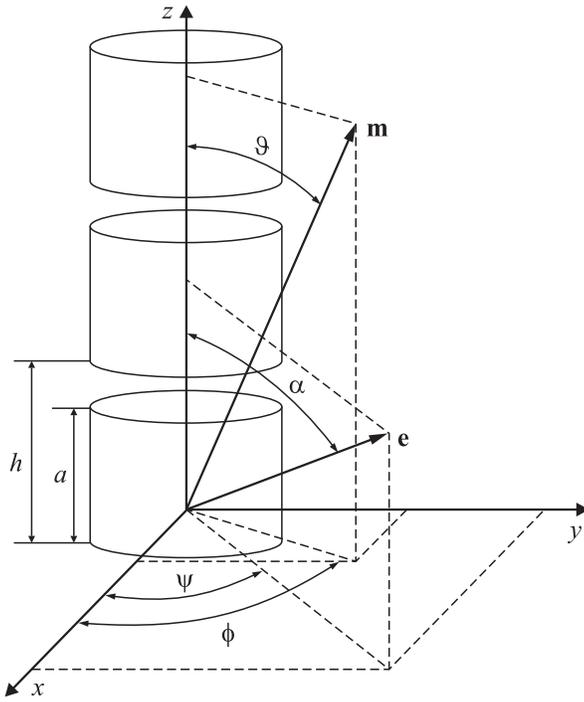


Рис. 1. Модель неоднородной проволоки.

одним углом [5,6]. Мы полагаем, что при таком подходе из рассмотрения исключается часть возможных равновесных конфигураций. В настоящей работе мы учитываем возможность произвольной ориентации магнитных моментов по сфере.

Существуют нанопроволоки из кристаллитов, пустоты или прослойки, между которыми ослабляют обменное взаимодействие [7–9]. Линейные размеры кристаллитов в составе таких проволок не превышают размер однодоменности. К таким объектам применима рассмотренная в [5] модель. Но для применения ее к нанопроволокам требуется учесть случайный характер кристаллографической анизотропии и, главное, собственные размагничивающие поля кристаллических зерен.

Используемая нами модель поликристаллической нанопроволоки (рис. 1) представляет собой одномерную цепочку кристаллитов цилиндрической формы. Ось  $z$  направлена вдоль оси нанопроволоки. Направление легких осей анизотропии (вектор  $\mathbf{e}$ ) задано двумя углами:  $\alpha$  — полярный угол,  $\psi$  — азимутальный угол. Направления вектора  $\mathbf{e}$  равномерно распределены по сфере. Поликристаллическая структура моделируется зависимостями  $\alpha(z)$  и  $\psi(z)$ . Функции  $\alpha(z)$  и  $\psi(z)$  представляют собой потоки синхронных случайных прямоугольных выбросов с периодом  $h$  и протяженностью  $a$ . Толщина немагнитной прослойки равна разности  $h - a$ . Каждый прямоугольный выброс рассматривается как кристаллит с размером  $a$  вдоль оси  $z$ .

Намагниченность (единичный вектор  $\mathbf{m}$ ) описывается полярным и азимутальным углами  $\vartheta(z)$  и  $\phi(z)$ . Линейные размеры кристаллитов много меньше  $\delta_0$  ( $a \ll \delta_0$ ),

здесь  $\delta_0 = \sqrt{A/K}$  — толщина доменной стенки массивного ферромагнетика,  $A, K$  — константы ферромагнитного обмена и кристаллографической анизотропии соответственно. Это приближение означает, что изменением намагниченности на протяжении одного кристаллита можно пренебречь.

В рассматриваемой ситуации учитываем кристаллографическую анизотропию (энергия  $W_K$ ), диполь-дипольное взаимодействие между кристаллитами (энергия  $W_{DD}$ ), взаимодействие с собственным размагничивающим полем (энергия  $W_{st}$ ) и взаимодействие с внешним магнитным полем (энергия  $W_H$ ). Энергию одного кристаллита с номером  $n$  представляем в виде

$$E_n = W_K + W_{DD} + W_{st} + W_H. \quad (1)$$

Энергия анизотропии кристаллита с номером  $n$  и объемом  $V$

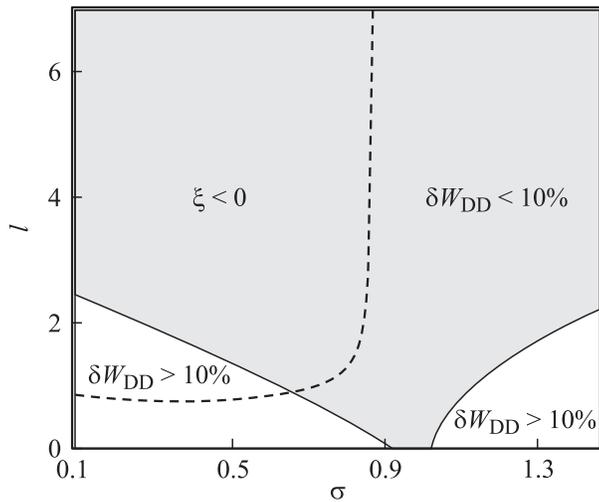
$$W_K = -KV(\mathbf{m}_n \mathbf{e}_n)^2 = -KV \left[ \sin(\alpha_n) \sin(\vartheta_n) \cos(\psi_n - \phi_n) + \cos(\alpha_n) \cos(\vartheta_n) \right]^2. \quad (2)$$

Энергия диполь-дипольного взаимодействия между кристаллитами в дипольном приближении

$$W_{DD} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 M_S^2 V^2}{4\pi} \times \sum_{m \neq n} \left( \frac{\mathbf{m}_n \mathbf{m}_m}{r_{nm}^3} - 3 \frac{(\mathbf{m}_n \mathbf{r}_{nm})(\mathbf{m}_m \mathbf{r}_{nm})}{r_{nm}^5} \right) = \frac{\mu_0 M_S^2 V^2}{8\pi} \times \sum_{m \neq n} \left[ \frac{\sin(\vartheta_n) \sin(\vartheta_m) \cos(\phi_n - \phi_m) - 2 \cos(\vartheta_n) \cos(\vartheta_m)}{|z_n - z_m|^3} \right], \quad (3)$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\mathbf{r}_{nm}$  — радиус-вектор, проведенный от кристаллита с номером  $n$  к кристаллиту с номером  $m$  (радиус-вектор коллинеарен оси  $z$ ),  $M_S$  — намагниченность насыщения,  $V$  — объем кристаллита.

Рассмотрим вопрос о границах применимости приближения (3) для кристаллитов в форме цилиндров. Для ответа на этот вопрос мы провели расчеты энергии взаимодействия двух однородно намагниченных цилиндров, расположенных соосно. Расчеты свелись к численному вычислению энергии взаимодействия магнитостатических поверхностных зарядов цилиндров. Полученные значения энергии сравнивались с расчетом в дипольном приближении для разного направления намагниченности цилиндров. Результаты сравнения приведены на рис. 2 в пространстве безразмерных параметров  $\{\sigma; l\}$ , где  $\sigma = a/d$  и  $l = (h - a)/d$  — безразмерные длины кристаллитов и толщины немагнитных прослоек соответственно,  $d$  — диаметр кристаллитов. Темная область ограничивает интервал значений размеров кристаллитов, где дипольное приближение дает удовлетворительный результат (относительная погрешность дипольного приближения  $\delta W_{DD}$  не превышает 10%).



**Рис. 2.** Диаграмма относительных погрешностей, допускаемых при использовании дипольного приближения, и область значений  $\{\sigma; l\}$ , при которых реализуется эффективная анизотропия типа „легкая плоскость“. Штриховая линия ограничивает область значений  $\{\sigma; l\}$ , соответствующих отрицательным величинам  $\xi$  (см. уравнение (14)).

Нами дополнительно вычислены погрешности для различных направлений намагниченности в цилиндрах, показанных на рис. 3. Во всех перечисленных случаях погрешность была одинакова, т.е. качество дипольного приближения не зависит от ориентации намагниченности в цилиндрических кристаллитах.

Можно предположить, что ошибка, допускаемая в дипольном приближении, зависит от длины нанопроволоки или числа кристаллитов в ее составе  $N$ . Был проведен анализ качества дипольного приближения при вычислении энергии взаимодействия трех и более кристаллитов для двух значений параметров  $l$  и  $\sigma$  из областей малой и большой погрешностей дипольного приближения. Результат показан на рис. 4. Из этих графиков видно, что погрешность расчета энергии с увеличением длины нанопроволоки незначительно убывает, поэтому интервал параметров  $l$  и  $\sigma$ , где справедливо дипольное приближение, расширяется.

Рассмотрим энергию кристаллитов в собственном размагничивающем поле. При однородной намагниченности зерна эту энергию можно представить в виде [10,11]

$$W_{st} = \frac{1}{2} V \mu_0 M_S^2 m_n \hat{N} m_n = \frac{1}{2} \mu_0 M_S^2 V \Delta N \cos^2(\vartheta_n). \quad (4)$$

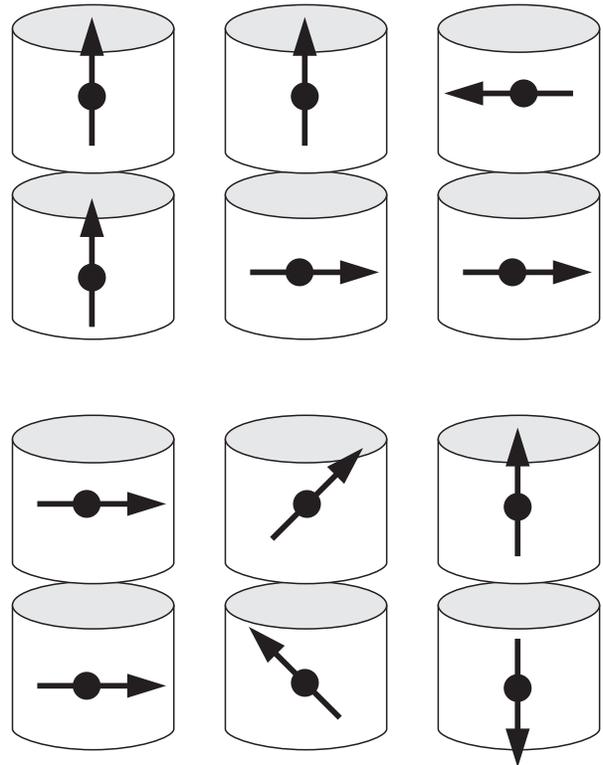
Здесь  $\hat{N}$  — тензор размагничивающих факторов,  $\Delta N = N_{\parallel} - N_{\perp}$ ,  $N_{\parallel}$  — размагничивающий фактор кристаллита вдоль оси  $z$ ,  $N_{\perp}$  — размагничивающий фактор поперек оси  $z$ .

Если направление внешнего поля  $\mathbf{H}$  задавать полярным углом  $\alpha_H$  и азимутальным углом  $\psi_H$ , то энергия во

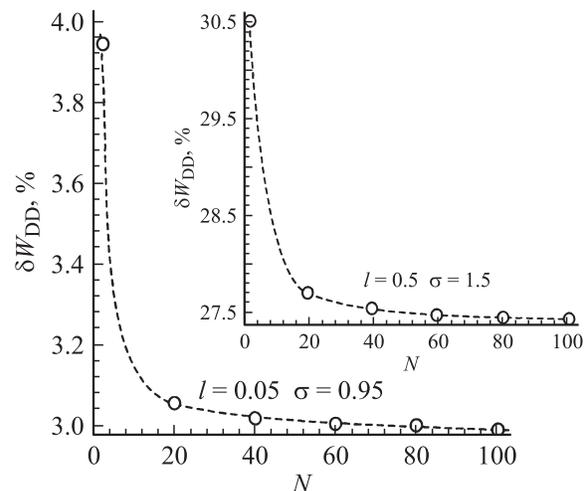
внешнем магнитном поле будет иметь следующий вид:

$$W_H = -\mathbf{H} m_n M_S^2 V = -H M_S^2 V [\sin(\alpha_H) \sin(\vartheta_n) \cos(\psi_H - \phi_n) + \cos(\alpha_H) \cos(\vartheta_n)]. \quad (5)$$

Первоначально проведем качественный анализ выражения диполь-дипольного взаимодействия (3). Весовой множитель  $|z_n - z_m|^{-3}$  выделяет слагаемые, описывающие взаимодействия с ближайшими соседями. Вклады



**Рис. 3.** Направления намагниченностей цилиндров, для которых проведен расчет погрешности дипольного приближения.



**Рис. 4.** Зависимость относительной погрешности дипольного приближения от числа кристаллитов в цепочке.

удаленных кристаллитов быстро убывают с расстоянием. Первое слагаемое в числителе суммы (3) принимает минимальное значение при разности  $\phi$  в соседних кристаллах, равной  $\pm\pi$ . Это обеспечивает антиферромагнитное упорядочение [4]. Полагая, что антиферромагнитное упорядочение реализуется через чередование азимутального угла, можем записать диполь-дипольный член как функцию только полярного угла:

$$W_{DD} = \frac{\mu_0 M_S^2 V^2}{8\pi} \sum_{m \neq n} \left( \frac{\sin(\vartheta_n) \sin(\vartheta_m) (-1)^{|n-m|}}{|z_n - z_m|^3} - 2 \frac{\cos(\vartheta_n) \cos(\vartheta_m)}{|z_n - z_m|^3} \right) = \frac{\mu_0 M_S^2 V^2}{16\pi} \sum_{m \neq n} \left( \frac{[(-1)^{|n-m|} - 2] \cos(\vartheta_n - \vartheta_m)}{|z_n - z_m|^3} - \frac{[(-1)^{|n-m|} + 2] \cos(\vartheta_n + \vartheta_m)}{|z_n - z_m|^3} \right). \quad (6)$$

Предположим, что зависимость полярного угла намагниченности от координаты  $\vartheta(z)$  является плавной функцией, что подтверждает компьютерный эксперимент. Тогда воспользуемся разложением

$$\begin{aligned} \cos(\vartheta_n - \vartheta_m) &\approx 1 - \frac{(\vartheta_n - \vartheta_m)^2}{2}, \\ \vartheta_m &\approx \vartheta_n + \frac{d\vartheta}{dz} (z_m - z_n), \\ \cos(\vartheta_n + \vartheta_m) &\approx 2 \cos^2(\vartheta_n) - 1. \end{aligned} \quad (7)$$

При неизменном зазоре между кристаллитами  $|z_m - z_n| = |m - n|h$ . С учетом (4) и (7) при отсутствующем внешнем поле для энергии (1) можно записать

$$E_n = \frac{\mu_0 M_S^2 V^2}{32\pi h} \left( \frac{d\vartheta_n}{dz} \right)^2 \sum_{m \neq n} \frac{2 - (-1)^{|n-m|}}{|n - m|} - \frac{1}{2} \mu_0 M_S^2 V \left( \frac{V}{4\pi h^3} \sum_{m \neq n} \frac{2 + (-1)^{|n-m|}}{|n - m|^3} - \Delta N \right) \cos^2(\vartheta_n). \quad (8)$$

Суммирование в (8) следует проводить по кристаллитам, удаленным от  $n$ -го не далее, чем ширина доменной стенки, так как вклад от остальных незначителен.

Для энергии всей проволоки можно записать

$$E = \sum_n E_n. \quad (9)$$

Здесь суммирование производится по всем кристаллитам, входящим в проволоку.

Первое слагаемое в (8) является „квaziобменным“ членом. Второе слагаемое выступает как „квaziанизотропия“. Удвоенные коэффициенты в квaziобменном и квaziанизотропных слагаемых играют роль эффективных констант обмена и анизотропии соответственно.

Квадратный корень из их отношения дает полуширину доменной стенки  $\delta_W$ . Оценим из этих соображений число кристаллитов  $N_W$ , входящих в состав стенки для случая  $\Delta N = 0$ :

$$\frac{1}{2} \delta_W = \frac{1}{2} h N_W = \left( \frac{\frac{\mu_0 M_S^2 V^2}{32\pi h} \sum_{m \neq n} \frac{2 - (-1)^{|n-m|}}{|n-m|}}{\frac{\mu_0 M_S^2 V^2}{8\pi h^3} \sum_{m \neq n} \frac{2 + (-1)^{|n-m|}}{|n-m|^3}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Это выражение является самосогласованным уравнением на неизвестную величину  $N_W$ , его решением является  $N_W \approx 2$ . С учетом этого для энергии (9) можно записать

$$E = \sum_{n=1}^N \left[ \frac{7\mu_0 M_S^2 V^2}{32\pi h} \left( \frac{d\vartheta_n}{dz} \right)^2 - \frac{\mu_0 M_S^2 V}{8\pi} \left( \frac{11}{4} \frac{V}{h^3} - 4\pi \Delta N \right) \cos^2(\vartheta_n) \right]. \quad (11)$$

Из выражения (11) следует, что магнитостатика создает два конкурирующих взаимодействия. Рассмотрим подробнее анизотропную часть энергии (11). Наведенная магнитостатикой анизотропия имеет константу вида

$$K_{\text{eff}} = \mu_0 M_S^2 \xi(V, a), \quad (12)$$

где

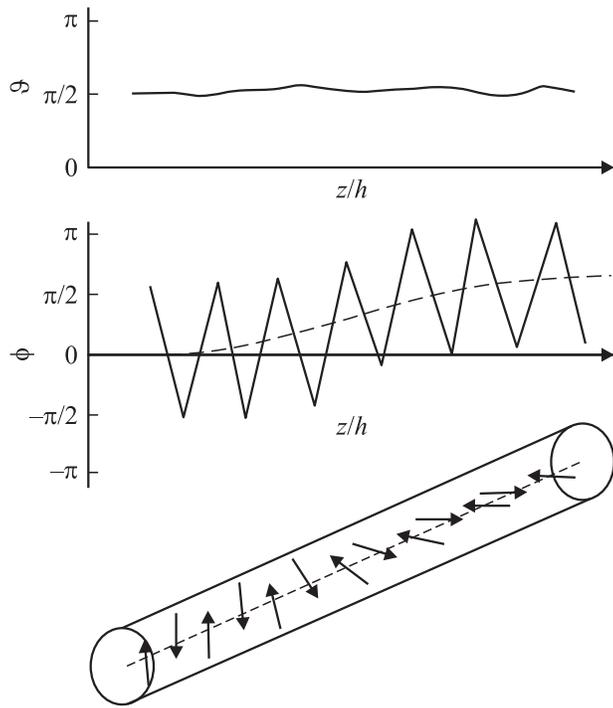
$$\xi(V, a) = \frac{11}{16\pi} \frac{V}{h^3} - \Delta N. \quad (13)$$

Объем одного зерна есть  $V = \pi a d^2 / 4$ . Подставим этот объем в (13). В результате получим

$$\xi(\sigma) = \frac{11}{64} \frac{\sigma}{(1 + \sigma)^3} - \Delta N(\sigma). \quad (14)$$

Разность в (14) указывает на потенциальную возможность смены знака эффективной константы при изменении формы зерен и расстояния между ними. При  $\xi > 0$  энергетически выгодным является однородное распределение намагниченности вдоль и против оси  $z$  ( $\vartheta = 0, \pi$ ). Здесь мы имеем наведенную анизотропию типа „легкая ось“. При  $\xi < 0$  намагниченности выгодно расположиться перпендикулярно оси проволоки („легкая плоскость“). На рис. 2 область значений  $l$  и  $\sigma$ , соответствующая отрицательным значениям  $\xi$ , ограничена штриховой линией. Размагничивающие факторы, входящие в выражение (14), вычислялись численно на основе идеологии магнитных зарядов, существующих на поверхности намагниченного цилиндра.

Рассмотрим случай  $\xi < 0$  подробнее. Действительно, существует такое отношение длины к толщине кристаллитов, при которой магнитным моментам энергетически выгодно располагаться перпендикулярно оси проволоки ( $\vartheta \approx \pi/2$ ), образуя антиферромагнитное упорядочение при чередовании разности значений азимутального



**Рис. 5.** Распределения полярного и азимутального углов намагниченности при  $\sigma = 0.5$ ,  $l = 1$  и соответствующие им направления магнитных моментов кристаллитов, показанные стрелками.

угла  $\pm\pi$ . Пример подобной структуры изображен на рис. 5, на котором представлен результат компьютерного моделирования цепочки ферромагнитных зерен методом поэтапной минимизации функционала [12]. Плавные повороты плоскости, в которой лежит намагниченность, вокруг оси  $z$  обусловлены стохастическим характером кристаллографической анизотропии. Образуются так называемые стохастические домены (магнитные блоки) антиферромагнитного типа.

На возможность изменения симметрии эффективной анизотропии нанопроволок было указано в [13]. В этой работе теоретически и численно решалась задача о соотношении между поверхностной анизотропией цилиндрических кристаллитов и их диполь-дипольным взаимодействием, при котором возможен переход легкая ось—легкая плоскость. Но в этой публикации детально не обсуждалась связь между константой поверхностной анизотропии и формой кристаллитов и не учитывался случайный характер поля анизотропии.

Зависимость константы наведенной анизотропии (12) от формы кристаллитов и переориентация намагниченности при изменении параметров  $l$  и  $\sigma$  качественно подтверждается в реальном эксперименте [8,9].

Так как магнитостатическое взаимодействие ответственно за наличие квазиобменного и квазианизотропного слагаемых в энергии проволоки, доменная структура возникает и в отсутствие однородной кристаллографической анизотропии. Как показывает компьютерный экс-

перимент, случайная кристаллографическая анизотропия отдельных ферромагнитных кристаллитов (Fe, Ni, Co) вызывает лишь незначительную рябь намагниченности на фоне плавного изменения  $\vartheta(z)$ . Варьируя (11) для случая  $\Delta N = 0$ , получим уравнение равновесия для продольной составляющей намагниченности следующего вида:

$$\frac{d^2\vartheta}{dz^2} - \frac{1}{1.3a^2} \sin(2\vartheta) = 0. \quad (15)$$

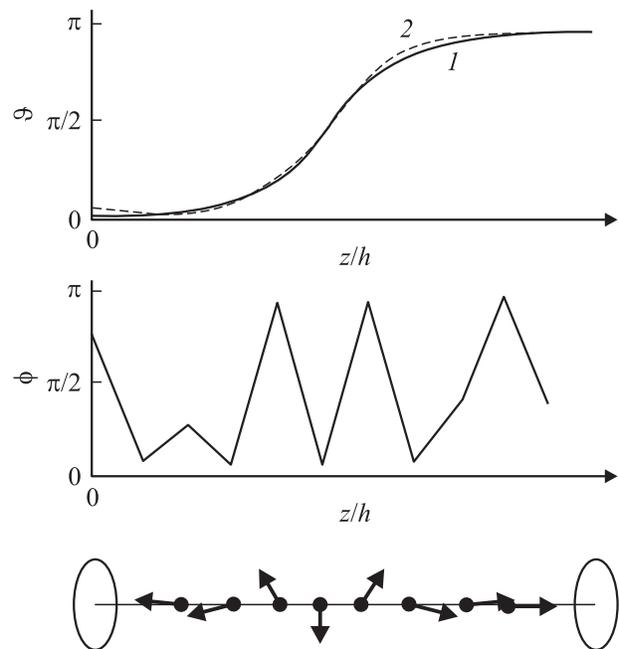
Это уравнение имеет тривиальное решение  $\vartheta = 0, \pi$ , что соответствует однородному распределению вдоль  $z$ . Но есть и решение Ландау–Лифшица в виде плавного изменения полярного угла, описывающего доменную стенку:  $\cos(\vartheta) = \text{th}(z/\delta_w)$  [14]. Здесь ширина доменной стенки

$$\delta_w \approx 2a, \quad (16)$$

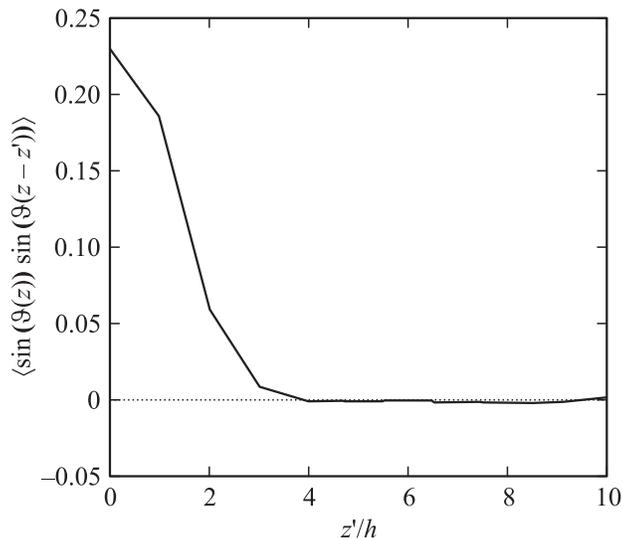
что хорошо согласуется с результатами моделирования (рис. 6) и результатами реального эксперимента [15].

В случае  $\xi > 0$  намагниченности соседних доменов ориентированы противоположно друг другу (рис. 6). Домены разделены  $180^\circ$  стенками, в которых намагниченность имеет смешанное упорядочение: гладкое распределение полярного угла типа Ландау–Лифшица и „антиферромагнитное“ упорядочение азимутального угла.

Представление магнитостатических слагаемых в виде (11) объясняет возникновение доменной структуры с соответствующей толщиной доменной стенки. Видно,



**Рис. 6.** Пример распределения полярного и азимутального углов намагниченности и направления магнитных моментов кристаллитов (показаны стрелками) в области доменной стенки для случая  $\mu_0 M_S^2 / K = 10$  и  $\sigma = 1$ . 1 — решение уравнения (15), 2 — результат численного моделирования.



**Рис. 7.** Корреляционная функция поперечной составляющей намагниченности цепочки кристаллитов при  $\sigma = 1$  по результатам численного моделирования.

что проявление магнитостатическим взаимодействием квазиобменного свойства имеет физическую природу.

Рассмотрим корреляционные свойства намагниченности такой нанопроволоки. Как показано в [16], для систем с размерностью менее 4 однородное состояние намагниченности в поле случайной анизотропии не является устойчивым даже в случае наличия ориентационной текстуры локальных осей кристаллитов. Намагниченность имеет блочную структуру (рябь намагниченности). В работе [12] было показано, что размер магнитного блока не зависит от наличия однородной составляющей магнитной анизотропии и определяется с помощью выражения

$$\delta_S = N_S h = \sqrt[3]{\frac{12}{h} \left(\frac{A_{\text{eff}}}{K}\right)^2}, \quad (17)$$

где  $N_S$  — число кристаллитов в составе блока. Константа  $A_{\text{eff}}$  — эффективная константа квазиобмена, которая, согласно (11), равна

$$A_{\text{eff}} = \frac{7\mu_0 M_S^2 V}{16\pi h}. \quad (18)$$

Отсюда для числа кристаллитов в блоке получим

$$N_S = \sqrt[3]{12} \left(\frac{7}{64} \frac{a d^2}{h^3} \frac{\mu_0 M_S^2}{K}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (19)$$

При  $a = d$  и  $h = 2a$  подстановка параметров железа в (19) дает  $\delta_S = N_S h \approx 2.5h$ . По результатам компьютерного моделирования была построена корреляционная функция поперечной составляющей намагниченности (рис. 7). Из рисунка видно, что корреляционный радиус (он же размер блока) равен примерно  $2h$ , что неплохо согласуется с (19).

Таким образом, в работе получены следующие результаты.

1) В численном эксперименте и аналитическими методами проиллюстрирована ситуация, в которой доменная структура возникает не как результат конкуренции взаимодействий, а как результат конкуренции двух проявлений одного и того же взаимодействия. Явно продемонстрирована двуединая роль диполь-дипольного взаимодействия в формировании магнитной структуры нанопроволоки.

2) Вычислена и подтверждена моделированием толщина доменной стенки в цепочке из взаимодействующих только магнитостатически изотропных нанокристаллитов в двухугловом приближении и с учетом их собственных размагничивающих полей.

3) Дано качественное объяснение смене симметрии эффективного поля анизотропии нанопроволоки при варьировании формы кристаллитов и расстояния между ними.

4) Вычислена корреляционная длина намагниченности (размер магнитного блока) в цепочке из кристаллитов со случайной анизотропией и отсутствием обменного взаимодействия между кристаллитами.

Авторы благодарны А.И. Морозову за конструктивные критические замечания и полезные обсуждения, способствующие повышению качества настоящей работы.

## Список литературы

- [1] К.Ю. Гуслиенко. ФММ **85**, 1, 19 (1998).
- [2] J.-G. Caputo, Y. Gaididei, V.P. Kravchuk, F.G. Mertenz, D.D. Sheka. Phys. Rev. B **76**, 174428 (2007).
- [3] П.И. Белобров, В.А. Воеводин, В.А. Игнатченко. ЖЭТФ **88**, 889 (1985).
- [4] П.И. Белобров, Р.С. Гехт, В.А. Игнатченко. ЖЭТФ **84**, 1097 (1983).
- [5] И.Р. Каретникова, И.М. Нефедов, М.В. Сапожников, А.А. Фраерман, И.А. Шерешевский. ФТТ **43**, 2030 (2001).
- [6] J.M. Speight, Y. Zolotaryuk. Nonlinearity **19**, 1365 (2006).
- [7] С.В. Комогорцев, Р.С. Исхаков, А.Д. Балаев, А.Г. Кудашев, А.В. Окотруб, С.И. Смирнов. ФТТ **49**, 700 (2007).
- [8] X.X. Zhang, G.H. Wen, S. Huang, L. Dai, R. Gao, Z.L. Wang. J. Magn. Magn. Mater. **231**, L9 (2001).
- [9] X.-T. Tang, G.-C. Wang, M. Shima. J. Magn. Magn. Mater. **309**, 188 (2007).
- [10] С. Тикадзуми. Физика ферромагнетика. Магнитные свойства вещества. Мир, М. (1983). 304 с.
- [11] Р. Бозорт. Ферромагнетизм. ИЛ, М. (1956). 874 с.
- [12] А.А. Иванов, В.А. Орлов, Г.О. Патрушев. ФММ **84**, 47 (1997).
- [13] M. Eisenbach, M. Dijkstra, V.L. Gyorffy. J. Magn. Magn. Mater. **208**, 137 (2000).
- [14] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. К теории дисперсии магнитной проницаемости. Л.Д. Ландау. Собрание трудов. Наука, М. (1969). Т. 1. 510 с.
- [15] Г.А. Такзей, И. Мирабо, Л.П. Гунько, И.И. Сыч, А.Б. Сурженко, С.В. Черепов, Ю.Н. Трощенко. ЖЭТФ **114**, 1848 (1998).
- [16] Y. Ymry, S.-K. Ma. Phys. Rev. Lett. **35**, 1399 (1975).