

05

Распространение осесимметричных волн на поверхности цилиндрической полости в упругой среде

© К.В. Грешневиков, Г.П. Жабко

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
E-mail: kgreshnevikov@yandex.ru

В окончательной редакции 16 августа 2013 г.

Описана незатухающая осесимметричная мода упругого цилиндрического волновода, представленного протяженной полостью кругового сечения в бесконечной однородной среде. Произведен анализ дисперсии, выявлены сходства и различия с другими упругими структурами с одной границей: бесконечным стержнем круглого сечения и поверхностью полупространства (волна Рэлея). Показано, что для осесимметричных волн на полости всегда есть зависящая от радиуса кривизны граничная частота, ниже которой волны являются нераспространяющимися. Дана физическая интерпретация полученных результатов.

Направленное распространение поверхностных упругих волн в протяженных телах исследуется давно. Волны, локализованные вблизи плоскости, были обнаружены и впервые описаны Рэлеем в 1885 г. В отсутствие потерь рэлеевские волны являются незатухающими, бездисперсионными и существуют во всем диапазоне частот. Уравнения колебаний на поверхности стержня кругового сечения получено Похгаммером, им же были проанализированы крайние случаи низкой ($\omega \rightarrow 0$) и высокой ($\omega \rightarrow \infty$) частоты [1].

С тех пор этим эффектам было посвящено множество работ, исследовались характеристики волн и в более сложных структурах [2], включая оболочки, а также в системах, заполненных средами с анизотропией [3].

Исследование цилиндрических волноводов затруднено наличием в их дисперсионных уравнениях специальных функций. Детальное изучение их модовой структуры началось лишь с 1950–1960-х годов, когда появилась возможность решать трансцендентные уравнения численно на ЭВМ [2,4]. Интерес даже к самым простым системам с осевой

симметрией не ослабевают до сих пор, о чем свидетельствуют, например, работы [5,6], где при рассмотрении сложного случая винтовых волн на цилиндрических поверхностях авторам понадобился мощный аппарат численного моделирования с использованием ресурсоемких вычислительных программ.

В данной работе рассмотрен важный частный случай осесимметричных собственных (нормальных) волн, локализованных вблизи поверхности заполненной вакуумом цилиндрической полости в бесконечной упругой среде. Факт распространения без затухания волн по поверхности цилиндрической полости упущен из виду в известных книгах [2,3,7]. Далее речь будет идти только о распространяющейся моде, краткое описание которой на полости дано лишь в книге [8] со ссылкой на статью [9], где она изучена экспериментально, но эффект отсечки описан лишь качественно, а уравнения даны без вывода. Вывод уравнений приведен в статье [10], являющейся первоисточником.

Задача решается для комплексной амплитуды вектора деформации \mathbf{U} ,

$$\mathbf{U} = u_\rho(\rho, z)\mathbf{e}_\rho + u_z(\rho, z)\mathbf{e}_z,$$

на основе уравнения, описывающего упругие волны в изотропном твердом теле [11]:

$$V^2 \text{grad div} \mathbf{U} - C^2 \text{rot rot} \mathbf{U} + \omega^2 \mathbf{U} = 0. \quad (1)$$

Здесь V , C — скорости распространения продольных и поперечных акустических волн в среде, ω — частота, \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_z — единичные орты цилиндрической системы координат.

Для разложения по коническим волнам выполняется преобразование Фурье:

$$\bar{u}_{\rho,z}(\rho, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\rho,z}(\rho, z) e^{-i\beta \cdot z} dz.$$

Общее решение векторного уравнения (1) для компонент \bar{u}_ρ и \bar{u}_z может быть представлено в виде суперпозиции двух пар цилиндрических функций: одна пара описывает продольную и поперечную составляющие конической волны \bar{u}_ρ , а другая — аналогичные составляющие конической волны \bar{u}_z . При этом \bar{u}_ρ описывает пара функций с индексом 1, а \bar{u}_z — пара функций того же семейства, но с индексом 0, и коэффициенты, стоящие при функциях с одинаковыми аргументами в выражениях

для \bar{u}_ρ и \bar{u}_z , жестко связаны между собой. Таким образом, остается два независимых амплитудных коэффициента — для продольных и для поперечных волн.

Если радиус цилиндрической поверхности равен R , то на единственной в системе границе упругая среда–вакуум при осевой симметрии должны выполняться условия [12]:

$$\sigma_{\rho\rho}(R) = 0; \quad \sigma_{\rho z}(R) = 0. \quad (2)$$

Равенство нулю определителя системы (2) дает дисперсионное уравнение, связывающее фазовую скорость поверхностной акустической волны (ПАВ) $V_{ph} = \omega/\beta$ вдоль оси системы с частотой ω :

$$2\eta_1(\eta_2^2 + \xi^2) - [(\eta_2^2 - \xi^2)^2\Psi(\eta_1) + 4\eta_1\eta_2\xi^2\Psi(\eta_2)] = 0, \quad (3)$$

где $\eta_{1,2} = \gamma_{1,2}R$, $\xi = \beta R$. Здесь $\gamma_{1,2} = \sqrt{k_{1,2}^2 - \beta^2}$, где $k_1 = \omega/V$, $k_2 = \omega/C$; β — постоянная распространения вдоль z . $\Psi(\eta)$ — отношение цилиндрических функций с индексами 0 и 1, в виде суперпозиции которых ищется решение для \mathbf{U} . В случае упругого стержня (выпуклая цилиндрическая поверхность) ввиду отсутствия особенности в нуле подходят функции Бесселя: $\Psi_J(\eta) = J_0(\eta)/J_1(\eta)$. Получается уравнение, известное как уравнение Похгаммера–Кри, приведенное в [1] и численно решенное для первых шести мод в [4]. Первая мода этого уравнения распространяется всегда, притом на сравнительно высоких частотах она более всего соответствует рэлеевской, а при уменьшении частоты переходит в „поршневые“ движения при $\omega \rightarrow 0$ [2]. При стремлении радиуса кривизны или частоты к бесконечности фазовые скорости всех мод монотонно убывают, стремясь к скорости рэлеевских волн на плоской поверхности среды из того же материала.

В случае цилиндрической полости (вогнутая цилиндрическая поверхность) волны должны убывать на бесконечности (условие Зоммерфельда), так что подходят функции Ханкеля 2 рода: $\Psi_{H2}(\eta) = H_0^{(2)}(\eta)/H_1^{(2)}(\eta)$. Решения уравнения (3), описывающие незатухающие волны, соответствуют вещественным β . При этом $\beta > k_2 > k_1$, а $V_{ph} < C < V$. Тогда $\gamma_{1,2}$ — мнимые, и возможен переход к функциям Макдональда $K_{0,1}$: $\Psi_{H2}(\eta) = H_0^{(2)}(\eta)/H_1^{(2)}(\eta) = -iK_0(|\eta|)/K_1(|\eta|) = -i\Psi_K(|\eta|)$, где $\Psi_K(x) = K_0(x)/K_1(x)$. Уравнение (3) в этом случае

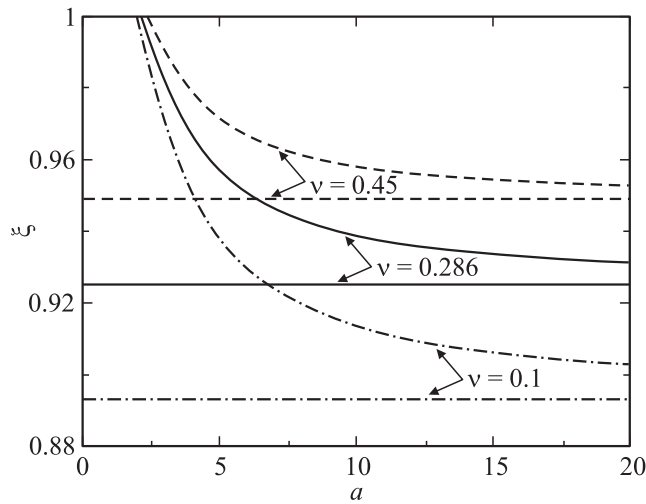


Рис. 1. Дисперсионные кривые для осесимметричной поверхностной упругой волны на цилиндрической полости при трех различных значениях коэффициента Пуассона ν . По оси абсцисс — безразмерный радиус кривизны, по оси ординат — нормированная фазовая скорость.

преобразуется к виду, схожему с приведенным в статье [9]:

$$2|\eta_1|(\xi^2 - |\eta_2|^2) - [(|\eta_2|^2 + \xi^2)^2 \Psi_K(|\eta_1|) - 4|\eta_1||\eta_2|\xi^2 \Psi_K(|\eta_2|)] = 0. \quad (4)$$

На рис. 1 приведено решение уравнения (4) в виде семейства кривых $\xi(a)$, параметром которого является коэффициент Пуассона ν . Здесь $\xi = V_{ph} \cdot C^{-1}$ — нормированная фазовая скорость, $a = R\omega \cdot C^{-1}$ — нормированный радиус кривизны. Критическое значение $a = a_{cr}$, ниже которого начинается запредельный режим, когда ни одна мода не может распространяться без затухания, зависит от ν , но фазовая скорость ПАВ, принимающая в этой точке максимальное значение, всегда равна C . Подстановка в (4) $\xi = 1$ дает уравнение для критического значения a_{cr} :

$$\Psi_K\left(\frac{a_{cr}}{\sqrt{2(1-\nu)}}\right) = \frac{a_{cr} \cdot \sqrt{1-\nu}}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

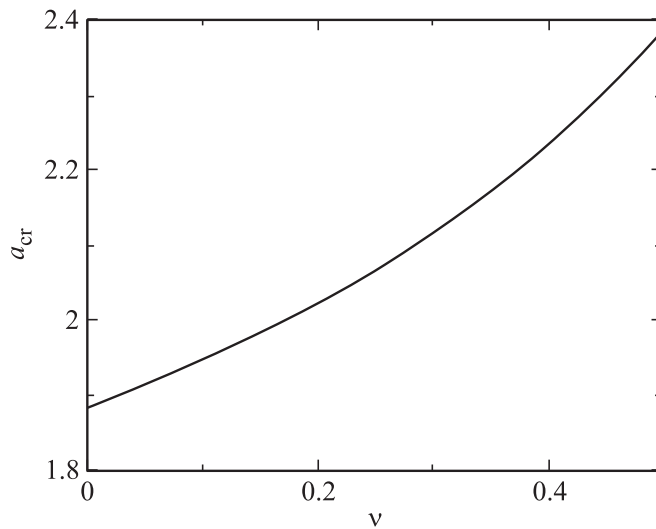


Рис. 2. Зависимость нормированного критического значения радиуса кривизны полости от коэффициента Пуассона материала среды, окружающей полость. По оси абсцисс — коэффициент Пуассона, по оси ординат — критическое значение безразмерного радиуса кривизны.

Численное решение этого уравнения в виде зависимости $a_{cr}(\nu)$ приведено на рис. 2. В [10] аналогичная кривая построена для радиусов кривизны, отложенных в длинах волн.

Любое из граничных условий (2) дает жесткую связь амплитудных коэффициентов при разных цилиндрических функциях в выражениях для \bar{u}_ρ и \bar{u}_z , и подстановка в них численного решения уравнения (4) позволяет получить зависимости $\bar{u}_\rho(h, a, \nu)$ и $\bar{u}_z(h, a, \nu)$, где $h = (\rho - R)\omega \cdot C^{-1}$ — безразмерная глубина, пропорциональная частоте. При любых $a > a_{cr}$ зависимости получаются быстро спадающими при удалении от границы, притом если для \bar{u}_ρ скорость спадаания с ростом ν уменьшается, то для \bar{u}_z она от ν не зависит. Это объясняется тем, что коэффициент Пуассона связан с относительной величиной поперечного сжатия элемента объема при его продольном растяжении, а компонента \bar{u}_z здесь является строго продольной, так как направлена вдоль оси полости.

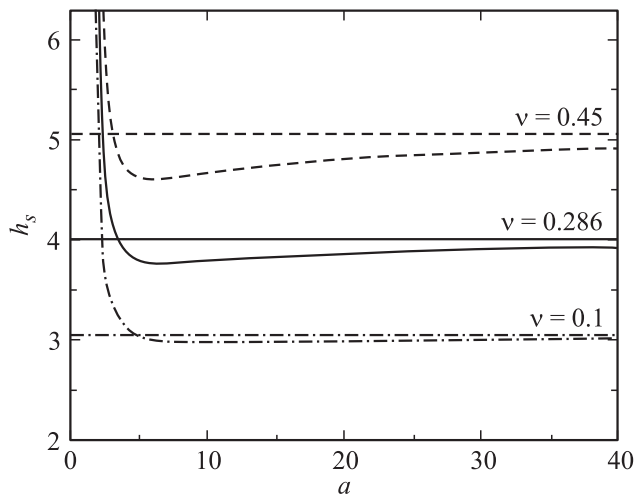


Рис. 3. Зависимости толщины скин-слоя от радиуса кривизны полости для трех значений ν , построенные в нормированных единицах, пропорциональных частоте. По оси абсцисс — безразмерный радиус кривизны, по оси ординат — безразмерная глубина, на которой полная амплитуда волны падает в e раз.

Приравнивание нормированной суммы компонент \bar{u}_ρ и \bar{u}_z некоторой величине (например, $1/e$) позволяет получить толщину скин-слоя $h_s(\nu, a)$ — глубину, на которой амплитуда волны падает в заданное (e) число раз, в зависимости от упругих свойств материала и геометрии поверхности (рис. 3). Видно, что для всех ν при $a \rightarrow a_{cr}$ $h_s \rightarrow \infty$, то есть при $a = a_{cr}$ скин-слой как таковой пропадает и ПАВ переходит в объемную сдвиговую волну. Особенно интересна критическая точка $a = a_{cr}$, $V_{ph} = C$, в которой наблюдается слияние ПАВ на цилиндрической полости и объемной цилиндрической сдвиговой волны в среде: длины этих волн становятся равными, и смещения всех точек получаются строго радиальными, то есть поперечными — как если бы никакой полости не было. Это может представлять интерес как способ возбуждения цилиндрической сдвиговой волны в сейсмике и в задачах зондирования околоскважинного пространства.

Асимптоты на рис. 3, как и на рис. 1, — аналогичные зависимости, рассчитанные для рэлеевской волны на плоской поверхности из того

же материала. Как и в случае стержня, кривые стремятся к ним при стремлении радиуса кривизны или частоты к бесконечности. Интересно отметить, что толщина скин-слоя стремится к плоскому случаю немонотонно: для каждого значения ν есть свой радиус кривизны минимального проникновения $a_{hs \min}$.

Составляющие \bar{u}_ρ и \bar{u}_z всегда находятся в квадратуре, и, таким образом, движение частиц в веществе при распространении осесимметричных волн по поверхности цилиндрической полости полностью аналогично движению частиц при распространении обычной рэлеевской волны [10]. Точки среды движутся по эллипсам, лежащим в так называемых сагиттальных плоскостях, которыми в данном случае являются все плоскости, проходящие через ось цилиндра. Несмотря на явный поверхностный характер, осесимметричные волны на поверхности цилиндрической полости отличаются от волн Рэлея на плоскости наличием дисперсии, а от волн в бесконечном упругом стержне — принципиальной однододовостью и наличием запределного режима. При этом, как и для ПАВ на плоскости, синфазные колебания полости невозможны. В случае же стержня к многомодовости приводит конечный размер поперечного сечения, образующий резонатор, имеющий характерные собственные частоты — нижние граничные частоты высших мод.

Список литературы

- [1] Мелешко В.В., Бондаренко А.А., Довгий С.А., Трофимчук А.Н., ван Хейст Г.Я.Ф. // Математические методы и физико-механические поля. 2008. 51. № 2. С. 86–104.
- [2] Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 283 с.
- [3] Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
- [4] Вовк А.Е., Гудков В.В. // Акустический журнал. 1967. Т. XIII. В. 3. С. 345–351.
- [5] Тютюкин В.В. // Акустический журнал. 2006. Т. 52. № 4. С. 549–555.
- [6] Сыресин Д.Е. Материалы VII Международной науч.-практ. конкурс-конференции „Геофизика 2009“. Санкт-Петербург, 2009. СПб.: Соло, 2010. С. 32–35.
- [7] Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 167 с.

- [8] *Оливер А.* Поверхностные акустические волны / Пер. с англ. под ред. И.С. Реза. М.: Мир, 1981. 383 с.
- [9] *Rosenberg L.R., Schmidt R.V., Coldren L.A.* // Appl. Phys. Lett. 1974. V. 25. N 6. P. 324–326.
- [10] *Biot M.A.* // J. Appl. Phys. 1952. V. 23. P. 997–1005.
- [11] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1979. 384 с.
- [12] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1965. 204 с.