

09.03.12

# Поляризационная зависимость резонансов Фано в примесной фотопроводимости квантовых ям, легированных мелкими донорами

© В.Я. Алёшкин, А.В. Антонов, М.С. Жолудев, В.Ю. Паневин, Л.Е. Воробьев,  
Д.А. Фирсов, А.П. Васильев, А.Е. Жуков

Институт физики микроструктур РАН,  
Нижний Новгород, Россия

E-mail: zholudev@ipm.sci-nnov.ru

(Поступила в Редакцию 18 октября 2010 г.)

Рассчитан спектр примесного фотопоглощения гетероструктуры с квантовыми ямами, легированными мелкими донорами, в области энергий, близких к энергии оптического фонона. Показано, что резонансная особенность фотопроводимости (резонанса Фано), обусловленная взаимодействием электронов с полярными оптическими фононами, сильно зависит от поляризации излучения в том случае, когда энергия резонансного состояния выше энергии дна второй подзоны размерного квантования. Указанная зависимость от поляризации была экспериментально обнаружена в спектре примесной фотопроводимости гетероструктуры AlGaAs/GaAs.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 10-02-00311, 09-02-01415, 08-02-01271), Linkage Grant of IB of BMBF at DLR (Германия), а также ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“.

## 1. Введение

В полупроводниках, легированных мелкими примесями, из-за взаимодействия с оптическими фононами возможно возникновение состояния, в котором электрон (дырка) находится на основном уровне примеси и в системе имеется еще оптический фонон [1] (см. также обзор [2]). Энергия этого состояния равна сумме энергий уровня примеси и оптического фонона. Если энергия этого состояния попадает в область непрерывного спектра, то оно становится резонансным (квазистационарным). В спектре поглощения света вблизи таких состояний возникает особенность, называемая резонансом Фано [3]. Так как электрон после взаимодействия со светом оказывается в состоянии непрерывного спектра, резонанс Фано проявляется и в спектрах фотопроводимости. Особенность резонансов Фано, обусловленных электрон-фононным взаимодействием, состоит в том, что в системе имеется очень большое количество резонансных состояний с одинаковой энергией (каждому волновому вектору оптического фонона соответствует одно состояние).

Резонанс Фано, обусловленный электрон-фононным взаимодействием, в объемном материале может быть описан как результат взаимодействия одного континуума с множеством локализованных состояний [2] с помощью теории, построенной в работе [3]. В квантовой яме возможна ситуация, когда резонансное состояние взаимодействует с несколькими подзонами квантования. Это случай взаимодействия нескольких локализованных состояний с несколькими континуумами, который не рассматривается в работе [3].

В работе [4] теория Фано обобщается для этого случая применительно к задачам рассеяния. В связи с этим

там используются некоторые предположения об асимптотике волновой функции резонансного состояния на бесконечности. В указанной работе не приведен способ вычисления этой функции в общем случае. В [5] предлагается рецепт вычисления волновых функций резонансного состояния, но не обсуждается вопрос о нормировке этих функций. Отдельно следует отметить работу [6], где рассмотрен метод расчета спектра поглощения света, не требующий вычисления волновых функций. Однако описанный там метод предполагает работу с матрицами, размерность которых равна количеству локализованных состояний, что делает его неудобным для описания резонансов, обусловленных электрон-фононным взаимодействием.

Настоящая работа посвящена исследованию зависимости параметров резонанса Фано в спектре примесной фотопроводимости гетероструктуры AlGaAs/GaAs с квантовыми ямами, легированными мелкими донорами, от поляризации падающего излучения. Параметры системы выбирались так, чтобы резонансное состояние оказывалось выше дна второй подзоны размерного квантования.

Для описания таких систем разработано обобщение теории Фано, которое позволяет вычислять волновые функции резонансных состояний (без каких-либо предположений об их асимптотике) и вероятности переходов в эти состояния. В отличие от [5] в настоящей работе предложен метод нахождения нормированных волновых функций континуума.

Отдельно рассматривается случай, когда поправкой к энергии резонанса за счет взаимодействия локализованных состояний с состояниями континуума можно пренебречь. Этот случай соответствует экспериментально наблюдаемым резонансам Фано в спектрах примесной

фотопроводимости структур с мелкими донорами. Оказалось, что расчет формы спектра для этого случая может быть существенно упрощен и спектр примесного поглощения света представляет собой сумму нескольких пиков, таких же как при простом резонансе Фано [3].

На основании обобщенной теории Фано был проведен расчет спектра примесного поглощения света в гетероструктуре AlGaAs/GaAs с квантовыми ямами. Показано, что резонансная особенность примесного поглощения (резонанс Фано), обусловленная взаимодействием электронов с фононами, сильно зависит от поляризации излучения в том случае, когда энергия резонансного состояния выше энергии дна второй подзоны размерного квантования. Эта зависимость была экспериментально обнаружена в спектрах примесной фотопроводимости в гетероструктуре AlGaAs/GaAs с квантовыми ямами, легированными мелкими донорами.

## 2. Обобщение теории Фано

В данном разделе предложен метод, позволяющий вычислить нормированные волновые функции и определить матричные элементы оператора перехода для любого числа взаимодействующих континуумов и локализованных состояний.

Рассмотрим квантовую систему, в которой имеется  $n$  невырожденных локализованных состояний и  $l$  невырожденных континуумов. Их волновые функции обозначим соответственно  $|^0i\rangle, \dots, |^0n\rangle$  и  $|^01, E\rangle, \dots, |^0l(E), E\rangle$ . Число континуумов  $l$  может зависеть от энергии  $E$ . Пусть части гамильтониана, соответствующие отдельно локализованным состояниям и континуумам, уже диагонализированы, т. е. матричные элементы гамильтониана имеют следующий вид:

$$\langle^0i|\hat{H}|^0j\rangle = E_i\delta_{ij}, \quad (1)$$

$$\langle^0\alpha, E|\hat{H}|^0i\rangle = V_{\alpha i}(E), \quad (2)$$

$$\langle^0\alpha, E|\hat{H}|^0\beta, E'\rangle = E\delta(E - E')\delta_{\alpha\beta}. \quad (3)$$

Для расчета спектра поглощения необходимо найти  $l(E)$  собственных состояний этой системы

$$|1, E\rangle, \dots, |l(E), E\rangle \quad (4)$$

для каждого значения энергии  $E$ , решив уравнение Шредингера

$$\hat{H}|\mu, E\rangle = E|\mu, E\rangle. \quad (5)$$

Полученные таким образом состояния должны удовлетворять условию нормировки

$$\langle\mu, E|v, E'\rangle = \delta_{\mu\nu}\delta(E - E'). \quad (6)$$

Представим собственное состояние системы в виде разложения по состояниям нулевого приближения

$$|\mu, E\rangle = \sum_{i=1}^n a_i^\mu(E)|^0i\rangle + \int \sum_{\alpha=1}^{l(E)} b_\alpha^\mu(E', E)|^0\alpha, E'\rangle dE', \quad (7)$$

где индекс  $\mu = 1, \dots, l(E)$  нумерует независимые решения. Подставляя выражение (7) в уравнение (5), с учетом (1)–(3) получаем

$$E_i a_i^\mu(E) + \int \sum_{\beta=1}^{l(E')} V_{\beta i}^*(E') b_\beta^\mu(E', E) dE' = E a_i^\mu(E), \quad (8a)$$

$$\sum_{j=1}^n V_{\alpha j}(E') a_j^\mu(E) + E' b_\alpha^\mu(E', E) = E b_\alpha^\mu(E', E). \quad (8b)$$

Коэффициент  $b_\alpha^\mu(E', E)$  можно выразить из уравнения (8b), однако здесь возникает трудность, связанная с обращением в нуль разности  $E - E'$ . Ее можно обойти аналогично тому, как это сделано в работе [3], записав  $b_\alpha^\mu(E', E)$  в виде

$$b_\alpha^\mu(E', E) = \left( \mathcal{P} \frac{1}{E - E'} + z^\mu(E)\delta(E - E') \right) \sum_{j=1}^n V_{\alpha j}(E') a_j^\mu(E). \quad (9)$$

Символ  $\mathcal{P}$  означает, что интеграл от дроби следует брать в смысле главного значения.

В работах [4] и [5] слагаемое, содержащее дельта-функцию, вынесено за скобки и имеет вид  $Z_\alpha^\mu(E)\delta(E - E')$ . В [4] матрица  $Z_\alpha^\mu(E)$  находится из предположения об асимптотике волновых функций. Здесь, для данного  $\mu$ ,  $z^\mu(E)$  — число, которое находится из условия нормировки (6) без использования каких-либо дополнительных предположений.

Подставляя выражение (9) в уравнение (8a), получаем уравнения для коэффициентов  $a_i^\mu(E)$

$$(E_i - E) a_i^\mu(E) + \sum_{j=1}^n F_{ij}(E) a_j^\mu(E) + z^\mu(E) \sum_{\beta=1}^{l(E)} V_{\beta i}^*(E) \sum_{j=1}^n V_{\beta j}(E) a_j^\mu(E) = 0, \quad (10)$$

где

$$F_{ij}(E) = \mathcal{P} \int \sum_{\beta=1}^{l(E')} \frac{V_{\beta i}^*(E') V_{\beta j}(E')}{E - E'} dE', \quad (11)$$

$\hat{F}(E)$  — эрмитова матрица размерности  $n \times n$ , характеризующая взаимодействие локализованных состояний через состояния континуума. Уравнение (10) можно переписать в матричном виде

$$[\hat{E} - \hat{I}E + \hat{F}(E) + z^\mu(E)\hat{V}^+(E)\hat{V}(E)]\mathbf{a}^\mu(E) = 0, \quad (12)$$

где  $\hat{E}$  — диагональная матрица размерности  $n \times n$  с элементами  $E_i\delta_{ij}$ ,  $\hat{I}$  — единичная матрица, размерность которой совпадает с размерностью матрицы

$\hat{E}$ ,  $\hat{V}(E)$  — матрица размерности  $l \times n$  с элементами  $[\hat{V}(E)]_{ai} = V_{ai}(E)$ ,  $\mathbf{a}^\mu(E)$  — вектор размерности  $n$  с компонентами  $a_i^\mu(E)$ .

Умножим уравнение (12) слева на следующую матрицу:

$$\hat{A}(E) = [\hat{I}E - \hat{E} - \hat{F}(E)]^{-1}. \quad (13)$$

Тогда оно примет вид

$$[\hat{A}(E)\hat{V}^+(E)\hat{V}(E)]\mathbf{a}^\mu(E) = \lambda^\mu(E)\mathbf{a}^\mu(E), \quad (14)$$

где  $\lambda^\mu(E) = 1/z^\mu(E)$ . Уравнение (14) — задача на собственные значения матрицы размерности  $n$ . Домножим его слева на матрицу  $\hat{V}(E)$  и введем обозначение

$$\mathbf{v}^\mu(E) = \hat{V}(E)\mathbf{a}^\mu(E). \quad (15)$$

В результате получаем задачу на собственные значения матрицы размерности  $l$

$$[\hat{V}(E)\hat{A}(E)\hat{V}^+(E)]\mathbf{v}^\mu(E) = \lambda^\mu(E)\mathbf{v}^\mu(E). \quad (16)$$

Она более удобна для отыскания коэффициентов разложения (7), так как количество собственных векторов этой матрицы равно количеству собственных состояний системы при заданной энергии  $E$ .

Из эрмитовости матрицы  $\hat{V}(E)\hat{A}(E)\hat{V}^+(E)$  следует, что ее собственные значения  $\lambda^\mu(E)$  вещественны, а векторы  $\mathbf{v}^\mu(E)$ , соответствующие разным  $\lambda^\mu(E)$ , ортогональны

$$(\mathbf{v}^\mu(E), \mathbf{v}^\nu(E)) = |\mathbf{v}^\mu(E)|^2 \delta_{\mu\nu}. \quad (17)$$

Выражение для нормы векторов  $\mathbf{v}$  получается из условия нормировки состояний системы (6) (см. Приложение А) и имеет вид

$$|\mathbf{v}^\mu(E)|^2 = \frac{[\lambda^\mu(E)]^2}{1 + [\pi\lambda^\mu(E)]^2}. \quad (18)$$

Уравнение (14) имеет  $n$  решений. Это означает, что при  $n > l$  из них нужно выбрать  $l$  решений, отвечающих состояниям системы, а при  $n < l$  отдельно рассмотреть еще  $l-n$  состояний, для которых разложение (7) не содержит уровней дискретного спектра (см. Приложение В).

Выразим коэффициенты разложения (7) через решения задачи (16). Используя выражение (14), получаем

$$\mathbf{a}^\mu(E) = \frac{1}{\lambda^\mu(E)} \hat{A}(E)\hat{V}^+(E)\mathbf{v}^\mu(E). \quad (19)$$

Подставив этот результат в (9) с учетом (16), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^\mu(E', E) = & \mathcal{P} \frac{1}{E - E'} \hat{V}(E')\hat{A}(E)\hat{V}^+(E) \frac{\mathbf{v}^\mu(E)}{\lambda^\mu(E)} \\ & + \delta(E - E') \frac{\mathbf{v}^\mu(E)}{\lambda^\mu(E)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $\mathbf{b}^\mu(E', E)$  — вектор размерности  $l(E)$  с компонентами  $b_\alpha^\mu(E', E)$ . Рассмотрим нормированные на единицу векторы  $\mathbf{w}^\mu(E)$ , такие, что

$$\mathbf{w}^\mu(E) = \frac{\lambda^\mu(E)}{\sqrt{1 + [\pi\lambda^\mu(E)]^2}} \mathbf{w}^\mu(E), \quad (21)$$

тогда выражения (19) и (20) запишутся в виде

$$\mathbf{a}^\mu(E) = \frac{1}{\sqrt{1 + [\pi\lambda^\mu(E)]^2}} \hat{A}(E)\hat{V}^+(E)\mathbf{w}^\mu(E), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^\mu(E', E) = & \frac{1}{\sqrt{1 + [\pi\lambda^\mu(E)]^2}} \\ & \times \left\{ \mathcal{P} \frac{1}{E - E'} \hat{V}(E')\hat{A}(E)\hat{V}^+(E)\mathbf{w}^\mu(E) + \delta(E - E')\mathbf{w}^\mu(E) \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, волновые функции резонансного состояния с энергией  $E$  полностью определяются решениями уравнения (16). Рецепт нахождения этих функций следующий. 1) найти  $l(E)$  собственных значений  $\lambda^\mu(E)$  и нормированных на единицу собственных векторов  $\mathbf{w}^\mu(E)$ , решая (16); 2) вычислить коэффициенты  $a_i^\mu(E)$  и  $b_\alpha^\mu(E', E)$  разложения (7) по формулам (22).

2.1. Форма спектра поглощения. Вероятность перехода из основного состояния  $|0\rangle$  в состояние  $|\mu, E\rangle$  под действием внешнего возмущения  $\hat{T}$  пропорциональна квадрату матричного элемента  $\langle 0|\hat{T}|\mu, E\rangle$ . Из ортогональности собственных состояний системы (6) следует, что вероятность перехода электрона из основного состояния в любое состояние с заданной энергией  $E$  пропорциональна функции

$$S(E) = \sum_{\mu=1}^{l(E)} |\langle 0|\hat{T}|\mu, E\rangle|^2. \quad (24)$$

Таким образом, для того чтобы определить форму спектра поглощения, необходимо вычислить матричные элементы оператора перехода  $\hat{T}$ , используя выражение для состояний  $|\mu, E\rangle$ .

Для упрощения последующих выражений введем вектор  $\mathbf{f}$  размерности  $n$  с компонентами  $f_i$  и вектор  $\mathbf{g}(E)$  размерности  $l(E)$  с компонентами  $g_\alpha(E)$ , где

$$f_i = \langle 0|\hat{T}|^0i\rangle,$$

$$g_\alpha(E) = \langle 0|\hat{T}|^0\alpha, E\rangle.$$

В данных обозначениях матричный элемент  $\langle 0|\hat{T}|\mu, E\rangle$  для разложения (7) принимает вид

$$\langle 0|\hat{T}|\mu, E\rangle = \mathbf{f}^T \mathbf{a}^\mu(E) + \int \mathbf{g}^T(E') \mathbf{b}^\mu(E', E) dE',$$

или с учетом формул (22) и (23)

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{T}|\mu, E\rangle = & \frac{1}{\sqrt{1 + [\pi\lambda^\mu(E)]^2}} \\ & \times \left\{ \mathbf{h}^T(E)\hat{A}(E)\hat{V}^+(E)\mathbf{w}^\mu(E) + \mathbf{g}^T(E)\mathbf{w}^\mu(E) \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\mathbf{h}(E) = \mathbf{f} + \mathcal{P} \int \frac{dE'}{E - E'} \hat{V}^T(E') \mathbf{g}(E'). \quad (26)$$

Эта формула дает точное решение поставленной задачи в общем случае. Она выражает матричные элементы оператора перехода через собственные значения  $\lambda^\mu(E)$  и нормированные на единицу собственные векторы  $\mathbf{w}^\mu(E)$  матрицы  $\hat{V} \hat{A} \hat{V}^+$ .

Полученное выражение не очень удобно для вычислений, однако для некоторых случаев его можно существенно упростить. Одним из таких случаев является рассматриваемый в настоящей работе резонанс Фано, обусловленный электрон-фононным взаимодействием, для которого энергии всех локализованных состояний совпадают.

**2.2. Совпадающие дискретные уровни.** Рассмотрим ситуацию, когда все резонансные состояния имеют одинаковую энергию  $E_i = E_r$ . Кроме того, будем считать, что  $F_{ij} = 0$ . Тогда матрица  $\hat{A}$  имеет вид

$$\hat{A} = \frac{\hat{I}}{E - E_r},$$

где  $\hat{I}$  — единичная матрица размерности  $n$ . Поскольку мы будем рассматривать энергии, близкие к  $E_r$ , все функции, плавно зависящие от  $E$ , в этой области можно считать константами (приняв в них  $E = E_r$ ). Тогда уравнение (16) запишется в виде

$$\frac{1}{E - E_r} \hat{V}(E_r) \hat{V}^+(E_r) \mathbf{w}^\mu(E) = \lambda^\mu(E) \mathbf{w}^\mu(E),$$

что при замене  $\lambda^\mu(E) = \gamma^\mu / (E - E_r)$  эквивалентно уравнению

$$\hat{V}(E_r) \hat{V}^+(E_r) \mathbf{w}^\mu = \gamma^\mu \mathbf{w}^\mu. \quad (27)$$

С учетом сделанных замечаний формула (25) после несложных преобразований принимает вид

$$\langle 0 | \hat{T} | \mu, E \rangle = C^\mu \frac{Q^\mu + \frac{E - E_r}{\pi \gamma^\mu}}{\sqrt{1 + \left[ \frac{E - E_r}{\pi \gamma^\mu} \right]^2}}, \quad (28)$$

где  $C^\mu$  и  $Q^\mu$  — параметры резонанса, вычисляемые по формулам

$$C^\mu = \mathbf{g}^T(E_r) \mathbf{w}^\mu, \quad (29)$$

$$Q^\mu = \frac{1}{\pi \gamma^\mu C^\mu} \mathbf{h}^T(E_r) \hat{V}^+(E_r) \mathbf{w}^\mu, \quad (30)$$

а  $\gamma^\mu$  и  $\mathbf{w}^\mu$  удовлетворяют уравнению (27).

Из формул (24) и (28) видно, что спектр поглощения представляет собой суперпозицию простых резонансов Фано [3], количество которых равно кратности вырождения континуума вблизи энергии  $E_r$ .

### 3. Расчет вероятности примесного поглощения света вблизи энергии оптического фонона для донора в квантовой яме

Рассмотрим квантовую яму с мелким донором. Пусть параметры ямы таковы, что резонансное состояние, возникающее благодаря электрон-фононному взаимодействию, располагается выше дна второй подзоны размерного квантования. Задача состоит в том, чтобы рассчитать спектр вероятности дипольных переходов с основного уровня донора в непрерывный спектр вблизи резонансного состояния.

Гамильтониан электронов в квантовой яме с донором, учитывающий взаимодействие с фононами, имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_e + \hat{H}_{e\text{-ph}} + \hat{H}_{\text{phon}},$$

где  $\hat{H}_e$  — гамильтониан электрона в квантовой яме с донором

$$\hat{H}_e = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e} + U(z) - \frac{e^2}{\kappa_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{imp}}|},$$

$\hat{H}_{e\text{-ph}}$  — гамильтониан, описывающий электрон-фононное взаимодействие

$$\hat{H}_{e\text{-ph}} = \sum_{\mathbf{q}} [\mathcal{V}(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{q}}^+ + \mathcal{V}^*(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \hat{b}_{\mathbf{q}}],$$

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \frac{ie}{q} \sqrt{\frac{2\pi \hbar \omega_{LO}}{V \bar{\kappa}}},$$

$\hat{H}_{\text{phon}}$  — гамильтониан системы фононов

$$\hat{H}_{\text{phon}} = \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{LO} [\hat{b}_{\mathbf{q}}^+ \hat{b}_{\mathbf{q}} + 1/2].$$

Здесь  $\hat{\mathbf{p}}$  — оператор квазиимпульса электрона,  $m_e$  — эффективная масса электрона в зоне проводимости,  $U(z)$  — потенциал квантовой ямы,  $e$  — абсолютная величина заряда электрона,  $\mathbf{r}_{\text{imp}} = (0, 0, z_{\text{imp}})$  — радиус-вектор примеси,  $\hat{b}_{\mathbf{q}}^+$  и  $\hat{b}_{\mathbf{q}}$  — операторы рождения и уничтожения продольного оптического фонона с волновым вектором  $\mathbf{q}$ ,  $\omega_{LO}$  — частота продольного оптического фонона,  $V$  — объем кристалла,  $\bar{\kappa} = \kappa_0 \kappa_\infty / (\kappa_0 - \kappa_\infty)$ ,  $\kappa_0$  и  $\kappa_\infty$  — диэлектрические проницаемости кристалла на нулевой частоте и на частоте большей частоты оптического фонона.

**3.1. Применение обобщенной теории Фано для расчета примесного поглощения.** Локализованные состояния  $|^0i\rangle$  в данной системе имеют следующую структуру: электрон находится на основном уровне донора и в системе имеется оптический фонон с волновым вектором  $\mathbf{q}$ . Далее волновые функции таких состояний обозначаются  $|1, 0, \mathbf{q}\rangle$ . Первый индекс соответствует главному квантовому числу, а второй — величине проекции момента импульса на

нормаль к квантовой яме. Энергия этих состояний равна  $E_\phi = E_{1,0} + \hbar\omega_{LO}$ .

Континуумы  $|\alpha, E\rangle$  характеризуются двумя квантовыми числами: номером подзоны размерного квантования  $\xi$  и проекцией момента импульса на ось  $z$ , равной  $m$ . Эти состояния далее обозначаются  $|\xi, m, E\rangle$ . Возбужденные состояния донора также относятся к состояниям континуума и обозначаются  $|n, m\rangle$ .

Далее будет рассматриваться излучение с фиксированной проекцией момента импульса фотона на ось  $z$ . Поэтому, согласно правилам отбора, квантовое число  $m$  для всех континуумов является одинаковым и фиксированным. Это означает, что континуумы следует нумеровать только числом  $\xi$ .

В данных обозначениях элементы матрицы  $\hat{V}$ , описывающей взаимодействие резонансных состояний с континуумами, вычисляются по формуле

$$V_{\xi q}(E) = \langle \xi, m, E | \hat{H}_{e-ph} | 1, 0, \mathbf{q} \rangle.$$

Подставляя сюда явное выражение для гамильтониана электрон-фононного взаимодействия, получаем

$$V_{\xi q}(E) = \mathcal{V}^*(q) \langle \xi, m, E | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | 1, 0 \rangle. \quad (31)$$

Для элементов произведения  $\hat{V}\hat{V}^+$  имеем следующее выражение:

$$[\hat{V}(E_1)\hat{V}^+(E_2)]_{\xi\xi} = \sum_{\mathbf{q}} V_{\xi q}(E_1)V_{\xi q}^*(E_2),$$

или

$$[\hat{V}(E_1)\hat{V}^+(E_2)]_{\xi\xi} = \int \frac{Vd^3q}{(2\pi)^3} |\mathcal{V}(q)|^2 \langle \xi, m, E_1 | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | 1, 0 \rangle \times \langle \xi, m, E_2 | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | 1, 0 \rangle^*. \quad (32)$$

В качестве возмущения, вызывающего переход, рассматривается оператор дипольного взаимодействия с электромагнитным излучением

$$\hat{T} = e\mathbf{r}\mathbf{E}, \quad (33)$$

где  $\mathbf{E}$  — амплитуда напряженности электрического поля волны. Расчеты проводились для двух поляризаций излучения. При  $s$ -поляризации вектор электрического поля лежит в плоскости квантовой ямы, а при  $z$ -поляризации поле перпендикулярно этой плоскости.

$$\mathbf{E}^s = \sqrt{1/2}(\mathcal{E}, -i\mathcal{E}, 0),$$

$$\mathbf{E}^z = (0, 0, \mathcal{E}).$$

Очевидно, что рассматриваемое возмущение не меняет состояние системы фононов. Поэтому  $\mathbf{f} = 0$  и формула (30) принимает следующий вид:

$$Q^\mu = \frac{1}{\pi\gamma^\mu C^\mu} \int \frac{dE'}{E_r - E'} \mathbf{g}^T(E') \hat{V}(E') \hat{V}^+(E_r) \mathbf{w}^\mu. \quad (34)$$

При расчетах следует учитывать, что для возбужденных состояний примеси ( $E' < E_1$ ) интеграл в этой формуле

следует заменить суммой. Кроме того, размерность матрицы  $\hat{V}(E')\hat{V}^+(E_r)$  равна единице при  $E_1 < E' < E_2$  и двум при  $E_2 < E' < E_3$ . Здесь  $E_s$  — дно  $s$ -й подзоны размерного квантования.

3.2. Волновые функции невозмущенных состояний. Волновые функции состояний  $|\xi, m, E\rangle$  и  $|n, m\rangle$  являются собственными функциями гамильтониана (3). Будем искать их в виде

$$\Psi_{mE}(\rho, \phi, z) = e^{im\phi} \sum_{s=1}^N \psi_{smE}(\rho) \varphi_s(z), \quad (35)$$

где  $\rho, \phi$  и  $z$  — цилиндрические координаты,  $N$  — количество подзон размерного квантования, которое учитывается при расчетах;  $\varphi_s(z)$  — собственные функции квантовой ямы, удовлетворяющие следующему уравнению:

$$\left( \frac{\hat{p}_z^2}{2m_e} + U(z) \right) \varphi_s(z) = E_s \varphi_s(z). \quad (36)$$

Подставляя разложение (35) в уравнение Шредингера с гамильтонианом (3), с учетом (36) получаем следующие уравнения для функций  $\psi_s(\rho)$  при заданных энергии  $E$  и моменте  $m$ :

$$\frac{d^2\psi_s}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\psi_s}{d\rho} + \left[ \frac{2m_e}{\hbar^2} (E - E_s) - \frac{m^2}{\rho^2} \right] \psi_s + \frac{2m_e e^2}{\kappa_0 \hbar^2} \sum_{t=1}^N W_{st}(\rho) \psi_t = 0, \quad (37)$$

где

$$W_{st}(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_s(z)\varphi_t(z)}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_{\text{imp}})^2}} dz.$$

Система уравнений (37) решалась численно для функций  $f_s(\rho) = \psi_s(\rho)\rho^{-m}$ , которые имеют ненулевые граничные условия при  $\rho = 0$  для любого  $m$

$$f_{smE}(\rho) = A_s(m, E), \quad f'_{smE}(\rho) = 0. \quad (38)$$

Здесь  $A_s(m, E)$  — константы, определяемые из условия нормировки.

Волновые функции рассчитывались в трех областях:  $E < E_1$  (дискретный спектр),  $E_1 < E < E_2$  (невыврожденный непрерывный спектр) и  $E_2 < E < E_3$  (вырожденный непрерывный спектр). Для этих областей отличаются граничные условия на бесконечности (на расстоянии много больше боровского радиуса  $r_B$  от примесного центра). При этом было выбрано  $N = 3$ , что позволило учесть влияние резонансных состояний примеси, связанных к третьей подзоне размерного квантования. В области непрерывного спектра использовался переменный шаг по энергии для того, чтобы более точно учесть эффекты, связанные с резонансными состояниями примеси.

В области дискретного спектра ( $E < E_1$ ) все радиальные функции  $\psi_s(\rho)$  локализованы, поэтому граничные условия на бесконечности имеют вид

$$f_{1,2,3}(\rho \rightarrow \infty) = 0.$$

Для расчета уровней дискретного спектра применялась аппроксимация уравнений линейной алгебраической системой. Полученные волновые функции нормировались на единицу

$$2\pi \sum_{s=1}^3 \int_0^\infty \rho |\psi_s(\rho)|^2 d\rho = 1.$$

При расчете состояний непрерывного спектра использовался метод Булирша–Стоера. Полученные волновые функции электронов нормировались на дельта-функцию, а в области вырожденного спектра выбирались ортогональные решения

$$\langle \xi, m, E | \zeta, m, E' \rangle = \delta_{\xi\zeta} \delta(E - E'). \quad (39)$$

Для того чтобы найти функции, удовлетворяющие этому условию, использовалась их асимптотика на бесконечности. При  $\rho \gg r_B$  можно пренебречь кулоновским потенциалом, в результате чего уравнение (37) превращается в уравнение Бесселя. Это означает, что при больших  $\rho$  мы можем записать

$$\psi_{smE}(\rho \rightarrow \infty) = B_{smE} J_m(k_s \rho) + D_{smE} Y_m(k_s \rho), \quad (40)$$

где  $k_s = \sqrt{E - E_s}$ , а  $J_m$  и  $Y_m$  — функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Определение коэффициентов  $B_{smE}$  и  $D_{smE}$  для известной функции не составляет труда. Используя выражение (40) и разложение (35), можно переписать условие (39) в виде

$$\sum_s \{ [B_{smE}^\xi]^* B_{smE}^\xi + [D_{smE}^\xi]^* D_{smE}^\xi \} = \frac{1}{4\pi} \delta_{\xi\xi}, \quad (41)$$

где суммирование производится по нелокализованным радиальным функциям, т.е. по функциям, связанным с подзонами размерного квантования, дно которых лежит ниже энергии  $E$ . Вывод соотношения (41) приведен в Приложении С.

В области невырожденного непрерывного спектра ( $E_1 < E < E_2$ ) граничные условия на бесконечности имеют вид

$$f_{2,3}(\rho \rightarrow \infty) = 0.$$

Этим условиям удовлетворяет единственное решение системы уравнений (37) с начальными условиями (38), которое нормируется с помощью соотношения (41).

В области двукратно вырожденного непрерывного спектра ( $E_2 < E < E_3$ ) на бесконечности требуем

$$f_3(\rho \rightarrow \infty) = 0.$$

Этому условию удовлетворяют два линейно независимых решения. При помощи соотношения (41) из них строится ортонормированный базис.

3.3. Результаты расчетов. Расчеты проводились для структуры с квантовыми ямами GaAs/Al<sub>0.3</sub>Ga<sub>0.7</sub>As шириной 288 Å (рис. 1), подробное описание которой приведено в разделе 4. При этом использовались

следующие параметры GaAs:  $m_e = 0.067m_0$ ,  $\kappa_0 = 12.46$ ,  $\kappa_\infty = 10.58$ ,  $\hbar\omega_{LO} = 36.588$  meV.

Расчеты показывают, что энергии первых трех уровней размерного квантования равны 5.5, 22 и 49 meV. Энергия ионизации основного состояния примеси, рас-

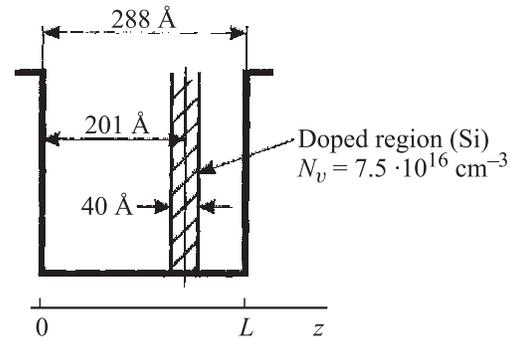


Рис. 1. Схема легирования квантовой ямы.

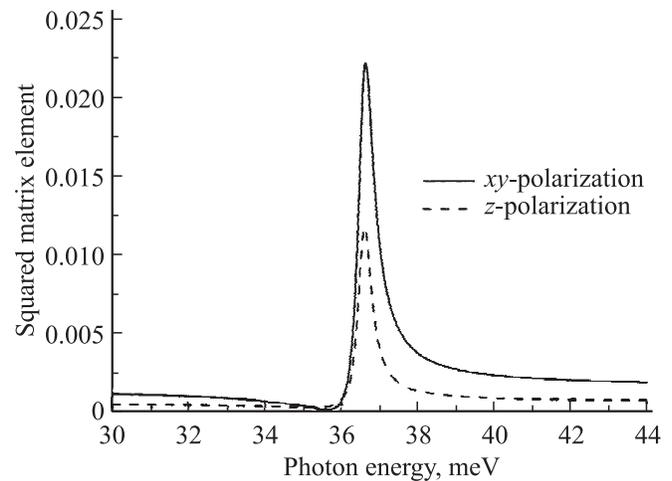


Рис. 2. Рассчитанные квадраты матричных элементов оператора дипольных переходов в дельта-легированной квантовой яме. Примесь располагается на расстоянии 0.7 ширины квантовой ямы от одного из ее краев.

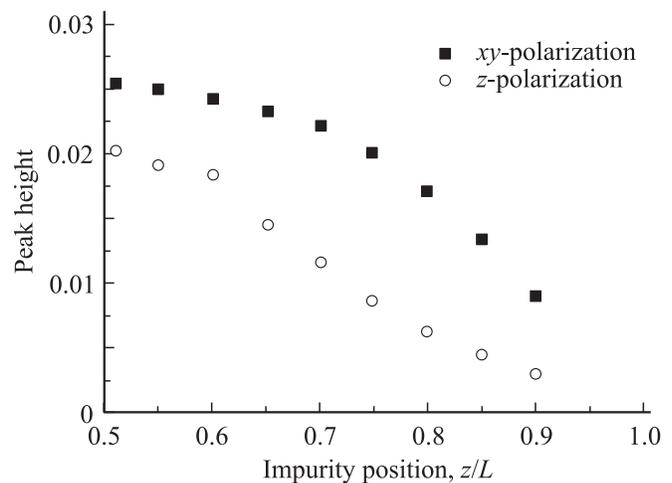


Рис. 3. Рассчитанная зависимость высоты резонансного пика в дельта-легированной квантовой яме от положения примеси.

положенной в центре легированной области, равна 8 meV. На рис. 2 представлены результаты расчетов для квадрата матричного элемента оператора дипольных переходов для различных поляризаций падающего излучения. Предполагается, что примесь находится в центре легированной области (на расстоянии 0.7 ширины ямы от одного из ее краев). Видно, что интенсивность пика для  $xy$ -поляризации выше, чем для  $z$ -поляризации. На рис. 3 показана зависимость высоты пика от положения примеси. Из рисунка видно, что высота пика падает по мере приближения примеси к краю квантовой ямы. Происходит это потому, что при приближении примеси к краю квантовой ямы уменьшается энергия ионизации и, следовательно, увеличивается отношение энергии конечного состояния к энергии ионизации. Это в свою очередь приводит к уменьшению матричных элементов перехода с основного состояния в невозмущенный континуум аналогично тому, как это происходит в обычном атоме водорода при увеличении отношения энергии конечного состояния к энергии ионизации.

#### 4. Эксперимент

Экспериментально исследовался спектр фотопроводимости структуры, выращенной методом молекулярно-пучковой эпитаксии, которая содержала 50 квантовых ям GaAs, разделенных барьерами  $\text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}$ . Квантовые ямы легированы донорами (Si). Ширина легированной области составляет 40 Å, ее расположение показано на рис. 1. Сверху был выращен покрывающий слой GaAs толщиной 200 Å. По данным рентгенографического анализа ширина ямы составляет  $288 \pm 3$  Å, ширина барьера —  $63 \pm 3$  Å.

Спектральные зависимости фототока изучались с помощью Фурье-спектрометра фирмы Bruker, модель Vertex 80v, работающего в режиме непрерывного сканирования. В качестве источника терагерцового излучения использовалась ртутная лампа, интенсивность ее излучения монотонно зависит от энергии фотона в исследуемом диапазоне спектра от 5 до 50 meV. На штатном месте для образца в Фурье-спектрометре было установлено зеркало, которое направляло свет в световод. Световод, представляющий собой металлическую трубку с полированной внутренней поверхностью, доставлял свет к образцу, помещенному в гелиевый транспортный сосуд Дьюара. На конце световода был установлен конус, фокусирующий свет на образец. Между конусом и образцом устанавливался поляризатор. В качестве поляризатора использовалась полиэтиленовая пленка с напыленной алюминиевой решеткой (1200 lines/mm). Образец и часть волновода находились в жидком гелии, что позволяло исследовать спектры фотопроводимости при температуре 4.2 K. Остальная часть волновода была заполнена газообразным гелием. Образец был закреплен под углом  $45^\circ$  к оптической оси волновода (рис. 4). В зависимости от ориентации поляризатора такая геометрия

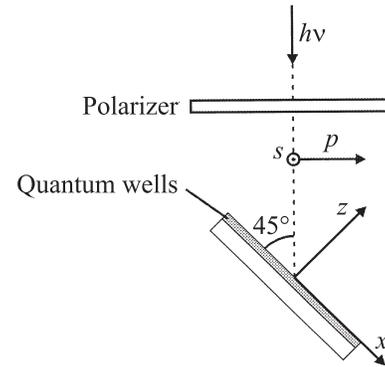


Рис. 4. Схема эксперимента.

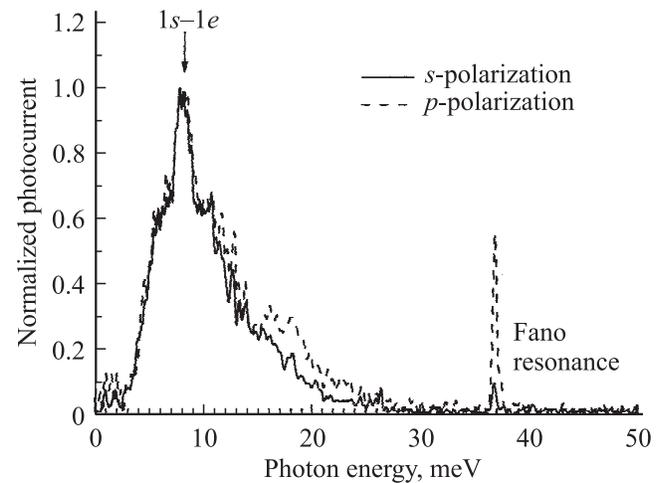


Рис. 5. Спектр фотопроводимости для различных поляризаций падающего излучения. Кривые нормированы на максимум, связанный с переходами электронов с основного состояния донора на дно первой подзоны размерного квантования (расчетная энергия перехода показана стрелкой).

эксперимента позволила возбуждать образец светом  $s$ - и  $p$ -поляризации (в первом случае свет был поляризован в плоскости структуры, во втором — вектор поляризации, наряду с  $xy$ -компонентной, содержал  $z$ -компоненту, ось  $z$  соответствует направлению роста структуры). Электрические контакты к образцу изготавливались путем вжигания индия на поверхности структуры. Электрическое поле к образцу прикладывалось вдоль слоев квантовых ям.

Результаты измерений, представленные на рис. 5, нормированы на пик, связанный с переходами с основного состояния донора на край первой подзоны размерного квантования. Видно, что высота резонанса Фано намного больше в случае, когда в излучении присутствует  $z$ -поляризованная компонента. Это связано с тем, что для  $z$ -поляризации вероятность перехода в первую подзону определяется замешиванием подзон под действием кулоновского потенциала донора, и ее величина много меньше вероятности перехода для  $xy$ -поляризации.

При размещении примеси точно в центре квантовой ямы переходы с  $z$ -поляризацией запрещены. В связи с этим нормировочный множитель для  $z$ -поляризации оказывается очень большим, что и приводит к большей интенсивности соответствующего пика при выбранной нормировке.

Теперь покажем, как из отношения пиков резонанса Фано для разных поляризаций можно получить оценку величины затухания поперечного оптического фонона. Пусть  $I_{xy}$  и  $I_z$  — интенсивности  $xy$ - и  $z$ -поляризованных компонент излучения внутри образца,  $\alpha$  — отношение вероятностей перехода на край первой подзоны для  $xy$ - и  $z$ -поляризаций,  $f$  — отношение высоты резонанса Фано для  $xy$ - и  $z$ -поляризаций. Тогда высота пика  $I$  в нормированном спектре равна

$$I = \frac{fI_{xy} + I_z}{\alpha I_{xy} + I_z}.$$

Отношение интенсивностей пиков для  $p$ - и  $s$ -поляризации равно

$$I_p/I_s = \frac{1 + (1/f - 1)x_p}{1 + (1/\alpha - 1)x_p},$$

где  $x_p$  — доля  $z$ -поляризованного света для  $p$ -поляризации

$$x_p = \frac{I_z}{I_{xy} + I_z}.$$

Расчеты показывают, что в центре легированной области  $f = 48$ ,  $\alpha = 2$ . В экспериментальных спектрах  $I_p/I_s \approx 5.5$ . Эти значения соответствуют  $x_p \sim 0.92$ .

Доля  $z$ -поляризованного света может быть выражена через показатель преломления образца при помощи закона Снеллиуса. Для угла падения  $45^\circ$  она равна

$$x_p = \frac{1}{2n^2}. \quad (42)$$

Показатель преломления равен [7]

$$n(\omega) = \Re \left[ \kappa_\infty + \frac{\kappa_0 - \kappa_\infty}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_T^2}\right) - i\omega\gamma} \right], \quad (43)$$

где  $\omega_T$  — частота поперечного оптического фонона, а  $\gamma$  — коэффициент затухания поперечного оптического фонона. Значение коэффициента затухания, полученное из формул (42) и (43), равно 0.015, что по порядку величины совпадает с характерным значением  $\gamma \leq 0.01$ , приведенным в [7].

На спектре фотопроводимости для излучения, содержащего  $z$ -поляризацию, в области 15–20 meV видна полоса переходов в резонансные состояния примеси, связанные со второй подзоной размерного квантования. В идеальном случае она должна представлять собой набор отдельных резонансов Фано, каждый из которых связан с одним резонансным состоянием. В реальном

эксперименте эти пики размываются из-за неоднородности энергии ионизации донора, которая сильно зависит от положения примеси в квантовой яме.

Энергия резонансного состояния, обусловленного электрон-фононным взаимодействием, всегда превышает энергию основного уровня донора (с которого осуществляется переход) на энергию оптического фонона. Поэтому пик сохраняет свое положение в спектре независимо от энергии ионизации примеси.

## 5. Заключение

В работе проведено обобщение теории Фано на случай произвольного числа взаимодействующих резонансных состояний и континуумов. С использованием развитого подхода было показано, что имеется существенная зависимость величины пика резонанса Фано в спектрах примесной фотопроводимости гетероструктуры с квантовыми ямами от поляризации излучения. Проведено экспериментальное наблюдение этих зависимостей.

Авторы выражают благодарность Ю.Н. Дроздову за рентгенодифракционные исследования структуры.

## Приложение А. Нормировка состояний

Получим выражение (18) из условия нормировки (6). Для этого подставим в произведение  $\langle \mu, E | \nu, E' \rangle$  функции вида (7) и воспользуемся выражением (9). В результате в векторной форме получаем

$$\begin{aligned} \langle \mu, E | \nu, E' \rangle &= (\mathbf{a}^\mu(E), \mathbf{a}^\nu(E')) \\ &+ \int \left[ \mathcal{P} \frac{1}{E - E_1} + z^\mu(E) \delta(E - E_1) \right]^* \\ &\times \left[ \mathcal{P} \frac{1}{E' - E_2} + z^\nu(E') \delta(E' - E_2) \right] \\ &\times (\hat{V}(E_1) \mathbf{a}^\mu(E), \hat{V}(E_2) \mathbf{a}^\nu(E')) \delta(E_1 - E_2) dE_1 dE_2. \quad (44) \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся следующей формулой, вывод которой можно найти в работе Фано:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(E - E_1)(E' - E_1)} &= \frac{1}{E - E'} \left( \frac{1}{E' - E_1} - \frac{1}{E - E_1} \right) \\ &+ \pi^2 \delta(E' - E) \delta \left[ E_1 - \frac{1}{2}(E + E') \right]. \quad (45) \end{aligned}$$

Использование (11), (15) и (45) в (44) дает

$$\begin{aligned} \langle \mu, E | \nu, E' \rangle &= \mathcal{P} \frac{1}{E - E'} \\ &\times \left\{ (\mathbf{a}^\mu(E), \hat{M}^\nu(E') \mathbf{a}^\nu(E')) - (\hat{M}^\mu(E) \mathbf{a}^\mu(E), \mathbf{a}^\nu(E')) \right\} \\ &+ [z^{\mu*}(E) z^\nu(E) + \pi^2] (\mathbf{v}^\mu(E), \mathbf{v}^\nu(E)) \delta(E - E'), \quad (46) \end{aligned}$$

где

$$\hat{M}^\mu(E) = \hat{F}(E) + z^\mu(E)\hat{V}^+(E)\hat{V}(E). \quad (47)$$

Из уравнения (12) следует что

$$\hat{M}^\mu(E)\mathbf{a}^\mu(E) = [E - \hat{E}]\mathbf{a}^\mu(E),$$

где  $(\hat{E})_{ij} = E_i\delta_{ij}$ . Поэтому выражение в фигурных скобках в формуле (46) равно нулю.

Далее, используя свойства собственных векторов эрмитовой матрицы  $\hat{V}\hat{A}\hat{V}^+$ , получаем

$$\langle \mu, E | \nu, E' \rangle = (|x^\mu(E)|^2 + \pi^2)|\mathbf{v}^\mu(E)|^2\delta_{\mu\nu}\delta(E - E'). \quad (48)$$

Подстановка соотношения (48) в условие нормировки (6) с учетом того, что  $\lambda = 1/z$ , дает выражение (18).

## Приложение В. Соотношение между количеством локализованных состояний и континуумов

В данном приложении обсуждается связь решений уравнений (14) и (16).

Пусть  $n > l$ , т.е. количество локализованных состояний больше количества континуумов. Тогда существует  $n-l$  линейно независимых векторов  $\mathbf{a}^k(E)$ , для которых  $\hat{V}(E)\mathbf{a}^k(E) = 0$ . Очевидно, что все эти векторы соответствуют нулевому собственному значению матрицы  $\hat{A}(E)\hat{V}^+(E)\hat{V}(E)$ . Остальные  $l$  векторов  $\mathbf{a}^\mu(E)$  соответствуют ненулевым собственным значениям и дают  $l$  векторов  $\mathbf{w}^\mu(E)$ , которые отвечают решениям задачи.

Теперь пусть  $n < l$ . В этом случае существует  $l-n$  векторов  $\mathbf{w}^\mu(E)$ , которым отвечают  $\mathbf{a}^\mu(E) = 0$ . Используя выражения (19) и (21), можно получить следующую формулу:

$$\mathbf{a}^\mu(E) = \frac{1}{\sqrt{1 + [\pi\lambda^\mu(E)]^2}}\hat{A}(E)\hat{V}^+(E)\mathbf{w}^\mu(E),$$

из которой следует, что если  $\mathbf{a}^\mu(E) = 0$ , то  $\hat{A}(E)\hat{V}^+(E)\mathbf{w}^\mu(E) = 0$ . Это означает, что эти векторы отвечают нулевому собственному значению матрицы  $\hat{V}(E)\hat{A}(E)\hat{V}^+(E)$ . Эти решения не содержат в разложении (7) локализованных состояний.

## Приложение С. Нормировка и ортогональность волновых функций непрерывного спектра

Используя разложение (35), можно записать

$$\langle \xi, m, E | \xi, m, E' \rangle = 2\pi \sum_{s=1}^N \langle \psi_{smE}^\xi(\rho) | \psi_{smE'}^\xi(\rho) \rangle_\rho, \quad (49)$$

где

$$\langle a | b \rangle_\rho = \int_0^\infty \rho a^* b d\rho.$$

Подстановка (40) в (49) дает

$$\begin{aligned} \langle \xi, m, E | \xi, m, E' \rangle &= 2\pi \\ &\times \sum_{s=1}^N \left\{ [B_{smE}^\xi]^* B_{smE'}^\xi \langle J_m(k_s\rho) | J_m(k'_s\rho) \rangle_\rho \right. \\ &+ [B_{smE}^\xi]^* D_{smE'}^\xi \langle J_m(k_s\rho) | Y_m(k'_s\rho) \rangle_\rho \\ &+ [D_{smE}^\xi]^* B_{smE'}^\xi \langle Y_m(k_s\rho) | J_m(k'_s\rho) \rangle_\rho \\ &\left. + [D_{smE}^\xi]^* D_{smE'}^\xi \langle Y_m(k_s\rho) | Y_m(k'_s\rho) \rangle_\rho \right\}. \quad (50) \end{aligned}$$

Теперь нам потребуется выражения для скалярных произведений функций Бесселя. Асимптотика функций Бесселя на бесконечности имеет вид

$$J_m(k\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \cos\left(k\rho - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$Y_m(k\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \cos\left(k\rho - \frac{\pi m}{2} - \frac{3\pi}{4}\right).$$

Поэтому скалярное произведение сводится к следующему интегралу:

$$\int_0^\infty \cos(k\rho - \theta) \cos(k'\rho - \theta') d\rho.$$

Он равен нулю при  $E \neq E'$  и стремится к бесконечности при  $E = E'$ . Это значит, что он равен функции  $K\delta(E - E')$ . Очевидно, что

$$K = \int_{E-\delta}^{E+\delta} \int_0^\infty \cos(k\rho - \theta) \cos(k'\rho - \theta') dE' d\rho. \quad (51)$$

Для близких  $E$  и  $E'$  справедливо следующее выражение:

$$k_s - k'_s \approx \frac{E - E'}{2k_s},$$

поэтому

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{\delta} d\varepsilon \int_0^\infty d\rho \cos\left[\frac{\varepsilon}{2k}\rho + \theta' - \theta\right] \\ &= \frac{1}{2} \cos(\theta' - \theta) \int_0^\infty \frac{4k}{\rho} \sin\left(\frac{\rho\delta}{2k}\right) d\rho. \end{aligned}$$

Для взятия интеграла по  $d\rho$  воспользуемся известной формулой

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

В результате получаем

$$K = \pi k \cos(\theta' - \theta),$$

или

$$\int_0^\infty \cos(k\rho - \theta) \cos(k'\rho - \theta') d\rho = \pi k \cos(\theta' - \theta) \delta(E - E').$$

Отсюда легко получить следующие выражения:

$$\begin{aligned}\langle J_m(k\rho) | J_m(k'\rho) \rangle_\rho &= 2\delta(E - E'), \\ \langle J_m(k\rho) | Y_m(k'\rho) \rangle_\rho &= 0, \\ \langle Y_m(k\rho) | Y_m(k'\rho) \rangle_\rho &= 2\delta(E - E').\end{aligned}\quad (52)$$

Подстановка (52) в (50) дает

$$\begin{aligned}\langle \xi, m, E | \zeta, m, E' \rangle &= 4\pi \sum_{s=1}^N \left\{ [B_{smE}^\xi]^* B_{smE'}^\xi + [D_{smE}^\xi]^* D_{smE'}^\xi \right\} \\ &\times \delta(E - E').\end{aligned}$$

Отсюда следует условие (41).

## Список литературы

- [1] G.D. Watkins, W.B. Fowler. Phys. Rev. B **16**, 4524 (1977).
- [2] В.Я. Алешкин, Л.В. Гавриленко, М.А. Одноблюдов, И.Н. Яс-  
сиевич. ФТП **42**, 8, 899 (2008).
- [3] U. Fano. Phys. Rev. **124**, 1866 (1961).
- [4] F.H. Mies. Phys. Rev. **175**, 164 (1968).
- [5] A.F. Starace. Phys. Rev. B **5**, 1773 (1972).
- [6] S. Glutsch. Phys. Rev. B **66**, 075 310 (2002).
- [7] П.Ю., М. Кардона. Основы физики полупроводников. Физ-  
матлит, М. (2002). 560 с.