

01.3;11

Экспериментальное исследование эволюции вероятностного распределения в автогенераторах с аддитивным шумом

© В.В. Семенов, Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко

Саратовский государственный университет
E-mail: vадивасовате@yandex.ru

Поступило в Редакцию 31 января 2013 г.

Экспериментально исследуется разрушение вероятностного распределения, характерного для режима зашумленных автоколебаний, в генераторах с одной и полутора степенями свободы при увеличении интенсивности аддитивного шумового воздействия.

Стохастические бифуркации, т.е. бифуркации в системах с шумом, обычно связывают с качественными изменениями вероятностного распределения [1,2]. Одной из наиболее важных бифуркаций в динамических системах является бифуркация Андронова–Хопфа, приводящая к режиму автогенерации. В детерминированном случае возникновение автоколебаний связано с рождением устойчивого предельного цикла. Стохастическая бифуркация Андронова–Хопфа состоит в образовании характерного для зашумленных автоколебаний вероятностного распределения, имеющего форму замкнутого кратера. Эта бифуркация исследовалась в ряде работ при различной статистике шума [3–6]. Было показано, что стохастическая бифуркация Андронова–Хопфа происходит не в одной точке, а в так называемом бифуркационном интервале, соответствующем постепенной перестройке вероятностного распределения [3,4]. Ширина этого интервала растет с ростом интенсивности шума. При фиксированном значении управляющего параметра, соответствующем режиму генерации, рост интенсивности шума приводит к переходу внутрь бифуркационного интервала. Кратерообразная форма вероятностного распределения нарушается, что можно трактовать как разрушение автоколебаний. При значительном шуме приближенные аналитические методы расчета стационарной плотности вероятности могут приводить к заметным ошибкам. Численное

интегрирование стохастических уравнений также не является надежным методом исследования, так как точность численных алгоритмов с ростом шума сильно ухудшается. Чтобы с полной уверенностью сделать вывод о существовании бифуркационного интервала и разрушении режима генерации, необходимо сопоставить аналитические результаты и компьютерные расчеты с результатами натуральных экспериментов. Насколько нам известно, экспериментальное подтверждение существования бифуркационного интервала при стохастической бифуркации Андронова–Хопфа было дано только в работе [7] для аналоговой модели брусслейатора. Однако полученные результаты могли быть связаны со спецификой шума, который в [7] являлся параметрическим и узкополосным. Целью данной работы является экспериментальное исследование разрушения автоколебательного режима в осцилляторе Ван дер Поля при аддитивном широкополосном шуме и сравнение результатов с выводами теории [3]. Кроме того, результаты, полученные для генератора Ван дер Поля, сопоставляются с данными экспериментов, проведенных для более сложной системы — хаотического генератора Анищенко–Астахова.

Уравнения осциллятора Ван дер Поля имеют вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} - (\varepsilon - x^2)y + x = \sqrt{2D}n(t), \quad (1)$$

где переменные x , y и время t являются безразмерными величинами, $n(t)$ — источник нормированного гауссова белого шума, D — константа, задающая интенсивность шума. Анализ модели (1) в квазигармоническом приближении показывает, что характер стохастической бифуркации и бифуркационное значение параметра $\varepsilon = 0$ не зависят от интенсивности шума D . Однако квазигармоническое приближение корректно при $D \ll \varepsilon^2$ и вблизи значения $\varepsilon = 0$ при конечной интенсивности шума может приводить к ошибочным результатам. Из теоретических результатов, представленных в [3], для системы (1) вытекает следующая картина стохастической бифуркации: при $\varepsilon < -3D/2$ распределение $p(x, y)$ имеет единственный максимум в начале координат, что соответствует зашумленному состоянию устойчивого равновесия при $x = 0$, $y = 0$. Область $-3D/2 < \varepsilon < 3D/2$ представляет собой бифуркационный интервал. На левой границе интервала $\varepsilon = -3D/2$ в точках $x_{1,2} = \pm\sqrt{(2\varepsilon + 3D)}$, $y_{1,2} = \pm\sqrt{(2\varepsilon + 3D)}$ возникают два максимума. При $\varepsilon = 3D/2$ образуется замкнутый кратер вокруг минимума распределения в начале координат.

В рамках данной работы были проведены численные расчеты и натурные эксперименты, направленные на исследование влияния аддитивного шума на режим автогенерации. Была создана установка, представляющая собой аналоговую модель системы (1), схема которой представлена на рис. 1. Уравнения, описывающие эту схему в физических переменных, имеют вид

$$R_0 C \dot{x} = y, \quad R_0 C \dot{y} = (\varepsilon - f(x))y - x + \xi(t), \quad (2)$$

где x, y — напряжения, снимаемые с соответствующих выходов установки, функция $f(x)$ задает нелинейность системы. Она была выбрана близкой к квадратичной зависимости: $f(x) = x^2$. Параметры схемы подбирались таким образом, чтобы имело место количественное совпадение безразмерных переменных в (1) и соответствующих величин в (2). Таким образом, уравнения (1) и (2) отличаются только масштабом времени, который в (2) задается параметрами $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$ и $C = 10 \text{ nF}$. Для моделирования случайного воздействия $\xi(t)$ использовался широкополосный генератор гауссова шума Г2-59, спектральная плотность которого практически постоянна в полосе частот 0–100 kHz. Можно положить $\xi(t) = \sqrt{2D'}n(t)$, где $n(t)$ — нормированный источник с единичной спектральной плотностью. Измеряя экспериментально спектральную плотность сигнала на выходе генератора шума, можно определить интенсивность D' , которая связана с интенсивностью шума D в уравнении (1) соотношением: $D = D'/R_0C$. При проведении натурных экспериментов снимались реализации переменных $x(t)$ и $y(t)$, которые оцифровывались с помощью АЦП (NI PCI-6133) и обрабатывались на компьютере.

На рис. 2, *a* представлена экспериментальная диаграмма режимов автогенератора (2) на плоскости параметров $D, \varepsilon > 0$. Затонированная область 2 на диаграмме соответствует переходу между областью зашумленной автогенерации (область 3) и областью, в которой $p(x, y)$ имеет два максимума (область 1). Пунктирной линией отмечена правая граница бифуркационного интервала $D = 2\varepsilon/3$, в соответствии с [3]. При небольших значениях ε теоретическая бифуркационная линия попадает в заштрихованную область, т.е. имеется соответствие эксперимента с теоретическими результатами. С ростом параметра ε наблюдается нелинейный рост бифуркационных значений интенсивности шума D . Эволюция плотности вероятности $p(x, y)$ с ростом интенсивности шума проиллюстрирована на рис. 2, *b*. Кратерообразное распределение в

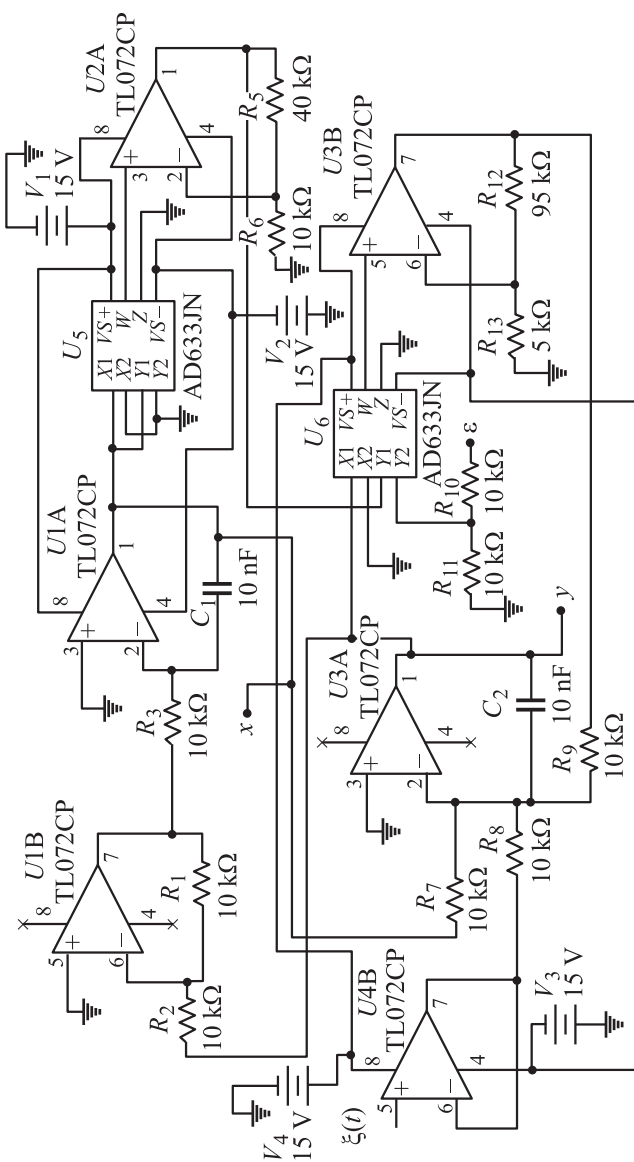


Рис. 1. Принципиальная схема экспериментальной модели генератора Ван дер Поля.

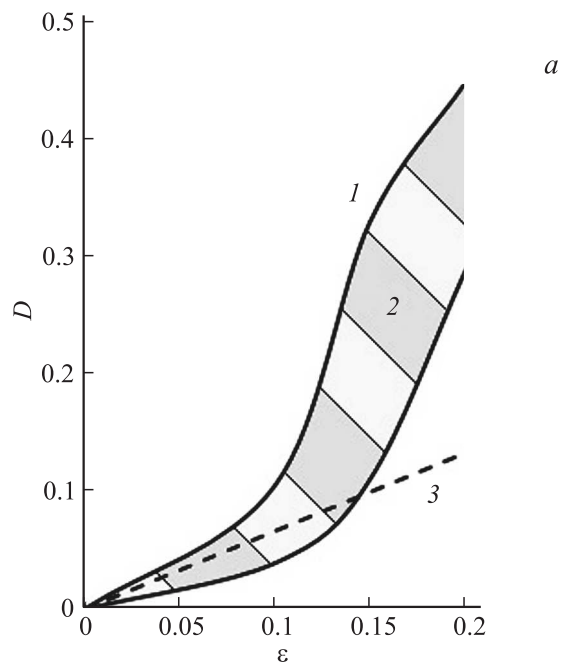


Рис. 2. Результаты экспериментального исследования осциллятора Ван дер Поля при воздействии аддитивного белого гауссова шума: *a* — диаграмма режимов на плоскости параметров (ε, D) . Затонированная область 2 соответствует наблюдаемому в эксперименте бифуркационному переходу из области зашумленных автоколебаний 3 в область 1, в которой вероятностное распределение имеет два максимума. Пунктиром обозначена теоретическая линия бифуркации; *b* — вид плотности вероятности в различных областях диаграммы при $\varepsilon = 0.15$.

области 3 не обладает радиальной симметрией. Кроме того, в отличие от теории, отсутствует симметрия относительно подстановки $x \rightarrow -y$. Последняя особенность объясняется неполным соответствием нелинейности в экспериментальной модели (2) и в уравнениях (1). В связи с этим разрушение кратера распределения в натурном эксперименте несколько отличалось от того, что предсказывает теория: сначала разрушается один участок кратера (затонированная область 2), затем

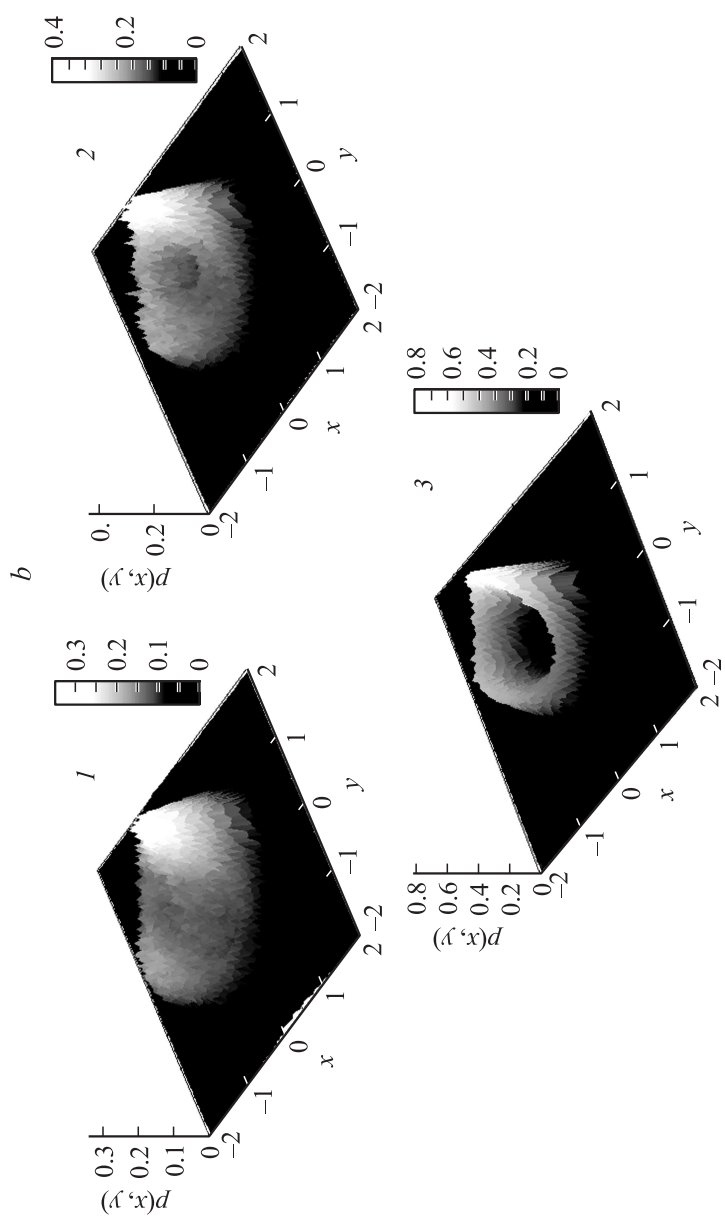


Рис. 2 (продолжение).

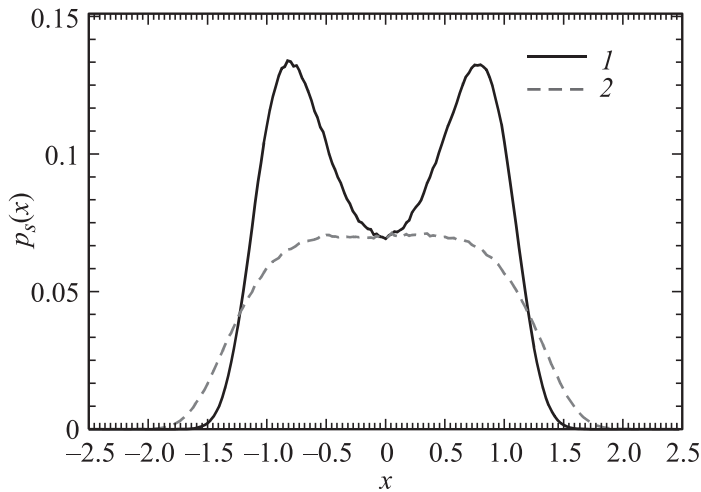


Рис. 3. Сечения двумерной поверхности $p(x, y)$ плоскостями $x = -y$ (кривая 1) и $x = y$ (кривая 2), полученные в результате численного интегрирования системы (1) при $\varepsilon = 0.2$, $D = 0.41$.

второй участок (область 1), а возникающие пики имеют заметное различие в высоте.

Уравнения (1) исследовались численно с использованием схемы интегрирования Гюна с учетом аддитивного белого гауссова шума [8]. Шаг интегрирования полагался малым (не более чем 0.001). По результатам интегрирования на достаточно большом интервале времени строилось распределение $p(x, y)$. Эволюция распределения с ростом интенсивности шума полностью соответствует выводам теории и натуральных экспериментов. На рис. 3 представлены два различных сечения поверхности $p(x, y)$, построенные с применением численного интегрирования системы (1) при $\varepsilon = 0.2$ и $D = 0.41$. В двух сечениях можно наблюдать различную картину экстремумов.

Можно предположить, что конкретный характер перестройки вероятностного распределения с ростом шума зависит от свойств динамической системы, однако с ростом шума кратерообразная форма вероятностного распределения, соответствующая зашумленному предельному циклу, должна разрушаться. В целях проверки данного предположения

экспериментально была исследована аналоговая модель генератора Анищенко–Астахова, имеющего трехмерное фазовое пространство [9].

Аналоговая модель генератора, разработанная для проведения экспериментов, описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} R_0 C \dot{x} &= mx + y - xz + \xi(t), \\ R_0 C \dot{y} &= -x, \\ R_0 C \dot{z} &= -g(z - F(x)), \quad F(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

где x, y, z — напряжения, снимаемые с соответствующих выходов схемы, m, g — управляющие параметры, $\xi(t)$ — напряжение, подаваемое с генератора широкополосного гауссова шума. Можно считать, что $\xi(t) = \sqrt{2R_0CD}n(t)$, где $n(t)$ — нормированный источник шума, D — интенсивность шума с учетом нормировки времени, $R_0 = 10k\Omega$ и $C = 10nF$. При экспериментальном исследовании модели (3) строились распределения только двух из трех переменных: x и y , поскольку на плоскости этих переменных происходит вращение фазовых траекторий вокруг неустойчивой точки равновесия. Эксперименты показали, что в (3) также наблюдается разрушение кратерообразной формы распределения при увеличении интенсивности шума D . Причем разрушение кратера происходит только с одной стороны.

Таким образом, экспериментально подтверждено, что не только мультипликативный шум, но и аддитивный шум при достаточно сильной интенсивности приводит к качественной перестройке вероятностного распределения, которая может свидетельствовать о разрушении режима генерации. Данный вывод находится в согласии с теорией, изложенной в [3]. Эффект разрушения вероятностного распределения, соответствующего зашумленному предельному циклу, под действием шума носит общий характер и наблюдается в различных автоколебательных системах. При этом конкретный вид эволюции вероятностного распределения зависит от свойств автогенератора.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России (2009–2013 годы)“ (контракты № 14.740.11.0074 и 14.В37.21.0751).

Список литературы

- [1] Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
- [2] Arnold L. Random Dynamical System. Berlin: Springer, 2003.
- [3] Ebeling W., Herzel H., Richert W., Schimansky-Geier L. // Zeitschrift für angewandte Vathematik und Mechanik (ZAMM). 1986. V. 66. P. 141.
- [4] Lefevre R., Turner J. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 1631.
- [5] Arnold L., Sri Namachshivaya N., Schenk-Yoppé K.R. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1996. V. 6. P. 1947.
- [6] Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H. // Chaos, Solitons, and Fractals. 2009. V. 39. P. 7.
- [7] Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F. // Phys. Rev. F. 1987. V. 36. P. 834.
- [8] Kloeden P.E., Platen E., Schurz H. // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1991. V. 1. P. 227.
- [9] Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. 2-е изд. М.: УРСС, 2009.