01;09

Мера синхронности многомерных хаотических последовательностей на основе их символьного представления

© А.В. Макаренко

Научно-исследовательская группа „Конструктивная Кибернетика“, Москва
E-mail: avm.science@mail.ru

Поступило в Редакцию 12 марта 2012 г.

Изложен новый подход к рассмотрению синхронизации хаотических колебаний двух и более связанных осцилляторов, позволяющий обнаруживать факт перестройки структуры аттракторов и перемежаемое поведение. Метод основан на предложенном ранее автором символическом анализе в пространстве „скорость–кривизна“ многомерных последовательностей и отображений. Проведено тестирование метода на примере системы Лоренца. Показана информативность анализатора и исследованы особенности перестройки структуры аттрактора трехкомпонентной системы тестового примера.

Синхронизация хаотических колебаний [1,2] — одно из самых фундаментальных понятий теории нелинейной динамики и теории хаоса — может осуществляться несколькими способами: полная [3], частотная [4], фазовая [5], обобщенная [6], с запаздыванием [7], через временны́е масштабы [8], противофазная [9]. В настоящий момент проводятся исследования, направленные как на рассмотрение разных видов синхронизации с единых позиций, так и поиск новых видов синхронного поведения.

Ранее, в работе автора [10], был предложен новый метод символического анализа через конечное разбиение пространства „скорость–кривизна“ и введен в рассмотрение минимальный алфавит. При кодировании последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^{K}$, $\mathbf{s} \in \mathrm{S} \subset \mathbb{R}^N$, $k \in \mathrm{K} \subseteq \mathbb{N}$, $K \geqslant 3$, для каждой ее n-й компоненты $(n = \overline{1, N})$ формируется соответствующая последовательность термов $\{T_k^{\alpha\varphi}|_n\}_{k=1}^{K}$ [10]. Данный метод позволяет детально изучать форму (структуру геометрии) траекторий $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^{K}$ в пространстве $\mathrm{S} \times \mathrm{K}$ (о важности этой характеристики см. [11–13] и

Замена терма $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ при инвертировании отсчета $s_k^{(n)} \to -1 \cdot s_k^{(n)}$

+1	T0	T1	T2	T3N	T3P	T4N	T4P	T5N	T5P	T6	T7
−1	T0	T2	T1	T5P	T5N	T4P	T4N	T3P	T3N	T7	T6

приведенные там ссылки). В данной работе конструируется инструментарий для анализа межкомпонентной синхронности многомерных последовательностей в аспекте форм их траекторий в пространстве $\mathrm{S} \times \mathrm{K}$.

Будем считать k-й отсчет последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ полностью синхронным, в алфавитном представлении $T^{\alpha\varphi}$, если выполняется условие

$$J_{sym}^{\alpha\varphi}[T_k^{\alpha\varphi}] \equiv 1, \text{ где } J_{sym}^{\alpha\varphi}[T_k^{\alpha\varphi}] = \begin{cases} 1 & T_k^{\alpha\varphi}|_1 = \dots = T_k^{\alpha\varphi}|_N; \\ 0 & \text{иначе}. \end{cases} \qquad (1)$$

Принимая во внимание возможность наличия противофазной синхронизации [9], будем также рассматривать вариант инвертирования исходной последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$:

$$\{\bar{\mathbf{s}}\}|_m = [v_{m,1}s_1, \dots, v_{m,n}s_n, \dots, v_{m,N}s_N]^{\mathrm{T}},$$

$$v_{m,1} = +1, \; v_{m,n'} = \pm 1, \; n' = \overline{2, N}, \qquad (2)$$

где $\circ^{\mathrm{T}}$ — символ транспортирования. Введем соответствие: $\{\bar{\mathbf{s}}_k\}_{k=1}^K|_m \Rightarrow \{T_k^{\alpha\varphi}\}_{k=1}^K|_m$ [10]. Замена символов $T^{\alpha\varphi}$ при инвертировании отсчетов $\bar{\mathbf{s}}_k$ осуществляется по таблице.

Тогда интегральный коэффициент синхронности компонент последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$, в алфавитном представлении $T^{\alpha\varphi}$, с учетом (1) и (2) есть ($\delta^{\alpha\varphi} \in [0, 1]$):

$$\delta^{\alpha\varphi} = \max_m \delta_m^{\alpha\varphi}, \; \delta_m^{\alpha\varphi} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K J_{sym}^{\alpha\varphi}\big[\{T_k^{\alpha\varphi}\}|_m\big]. \qquad (3)$$

Таким образом, из (1)–(3) следует, что предложенный анализатор синхронности для последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ оценивает уровень полной синхронизации [3] именно в алфавитном представлении $T^{\alpha\varphi}$, т. е. полная синхронизация на уровне термов $\{T^{\alpha\varphi_k}\}_{k=1}^{K}$ не есть полная синхронизация на уровне самой последовательности $\{\mathbf{s}\}_{k=1}^{K}$. Это открывает потенциальную возможность конструктивного применения предложенного анализатора к вопросам изучения обобщенной синхронизации [6]. Кроме того, если ввести оператор сдвига при $K \to \infty$: $\mathrm{H}_{\mathbf{h}}\{T_k^{\alpha\varphi}|_1 \to T_{k+h_1}^{\alpha\varphi}|_1, \ldots, T_k^{\alpha\varphi}|_N \to T_{k+h_N}^{\alpha\varphi}|_1\}$, $h_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $h_n \ll K$ и потребовать выполнения условия

$$\delta_m^{\alpha\varphi} = \max_{\mathbf{h}} \frac{1}{K^* + 1 - k^*} \sum_{k=k^*}^{K^*} J_{sym}^{\alpha\varphi}\big[\mathrm{H}_{\mathbf{h}}(\{T_k^{\alpha\varphi}\})|_m)\big],$$

$$k^* = 1 + \max(h_1, \ldots, h_N), \ K^* = K + \min(h_1, \ldots, h_N), \tag{4}$$

то $\delta^{\alpha\varphi}$ будет способна обнаружить также и лаг-синхронизацию [7]. При этом $\mathbf{h}^0 = \arg\limits_{\mathbf{h}|m} \max\limits_{\mathrm{m}|\mathbf{h}} \max\limits_{\mathbf{h}} \delta_m^{\alpha\varphi}$ — отвечает эффективным сдвигам в последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^{K}$. Отметим, что изучение этих вопросов — предмет наших дальнейших иследований.

Введенная через (3) величина $\delta^{\alpha\varphi}$ характеризует синхронность компонент $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^{K}$ в среднем. Однако усреднение и основанные на нем выводы имеют свои пределы адекватности. Поэтому синтезируем характеристики, позволяющие анализировать именно временну́ю структуру синхронности компонент $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^{K}$ в алфавитном представлении $T^{\alpha\varphi}$. Под структурой будем понимать всплески синхронного поведения компонент $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^{K}$, в промежутках между которыми уровень синхронности характеризуется малой величиной, т. е. перемежаемое поведение [12,13].

Таким образом, синхронный домен SD есть совокупность отсчетов $T_k^{\alpha\varphi}$ из числа $\{T^{\alpha\varphi_k}\}_{k=1}^{K}$, для которых справедливо условие

$$SD_r : J_{sym}^{\alpha\varphi}[T_{sym}^{\alpha\varphi}] \equiv 1, J_{sym}^{\alpha\varphi}[T_{k''}^{\alpha\varphi}] \equiv 0 \vee k'' = 0,$$

$$J_{sym}^{\alpha\varphi}[T_{k''}^{\alpha,\varphi}] \equiv 0 \vee k^m = K + 1, \mathrm{SD} \ni SD_r, \tag{5}$$

где $k' = \overline{b_r^{SD}, b_r^{SD} + L_r^{SD}}$, $k'' = b_r^{SD} - 1$, $k^m = b_r^{SD} + L_r^{SD} + 1$. Домен SD_r будем характеризовать: b_r^{SD} — моментом появления и L_r^{SD} — длиной в пространстве K; r — номер SD, $r = \overline{1, R^{SD}}$.

Определим функции доменной и поддоменной спектральных плотностей:

$$H^{SD}[L^{SD}] = \sum_{r=1}^{R^{SD}} \delta[L^{SD}, L^{SD}], H^{SS}[L^{SD}] = \sum_{j=L^{SD}}^{K} (j - L^{SD} + 1) H^{SD}[j],$$

$$L^{SD} = \overline{1, K}, \tag{6}$$

где $\delta[\circ, \circ]$ — символ Кронекера. Они несут информацию о качественной структуре синхронизма компонент последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^{K}$ в алфавитном представлении $T^{\alpha\varphi}$.

Рассмотрим опорную последовательность $\xi_{uw} = \{T_k^{\alpha\varphi}\}_{k=1}^{\infty}$, у которой компоненты $\{T_k^{\alpha\varphi}|_{n1}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{T_k^{\alpha\varphi}|_{n2}\}_{k=1}^{\infty}$ независимы между собой, а $n1 \neq n2$ и $n1, n2 = \overline{1, N}$. При этом каждая из компонент имеет равные вероятности реализации каждой из допустимых траекторий длины K. Сформулируем основную гипотезу $\mathscr{H}_0$: величина $H^{SD}[L^{SD}]$ является не следствием синхронного поведения систем, а определяется случайным совпадением подпоследовательностей у независимых компонент анализируемой последовательности на уровне значимости α — допустимой вероятности ошибки первого рода [14]. Тогда возможно определить ряд величин, позволяющих с ошибкой α выявлять наличие синхронизации в изучаемых последовательностях.

Введем в рассмотрение карты синхронизации, полную и фильтрованную:

$$M_k^{SD} = \begin{cases} L_r^{SD} & k \in [b_r^{SD}, b_r^{SD} + L_r^{SD}], \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}, M_{\alpha k}^{SD} = \begin{cases} M_k^{SD} & M_k^{SD} > L_\alpha^{SD}, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \tag{7}$$

где L_α^{SD} — такой граничный размер синхронного домена, при котором вероятность хотя бы однократного появления более длинных доменов в опорной последовательности ξ_{uw} длины K не превосходит уровня значимости α. Отметим, что карты M^{SD} и M_α^{SD} осуществляют переход от представления структуры синхронизма в SD непосредственно в пространство K. В случае последовательностей с сильными статистическими свойствами и определенными над $\mathbb{R}^N \times \mathbb{N}$ и/или с вырожденным набором термов $T^{\alpha\varphi}$, переходов $Q^{\alpha\varphi}$ (для примера см. [10]) требуется видоизменение опорной последовательности, относительно которой рассчитываются параметры тех или иных статистических гипотез [14], связанных с анализом синхронизма.

Предложенный подход к определению уровня межкомпонентной синхронизации был применен для исследования колебаний системы Лоренца [15–18]:

$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -\beta z + xy,$$
$$\mathbf{s}(t) = \left[x(t), y(t), z(t)\right]^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

При этом анализ характеристик символьной синхронизации между компонентами траектории $\mathbf{s}(t)$ возможно трактовать двояко: либо как изучение формы аттрактора системы (8), либо как исследование синхронизации связанных структурно-неидентичных систем [2] (рис. 1, a). В эксперименте параметры $\sigma = 10$ и $\beta = 8/3$ были зафиксированы, а параметр r варьировался на интервале $r \in [20, 300]$ с $\Delta r = 0.5$. Численное интегрирование (8) проводилось методом RADAU5 на интервале $T = [0, 300]$, с $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$. Для каждого значения r рассчитывалось 60 траекторий с начальными условиями (НУ): $x_0 = \xi_1 \in [-10, 10]$, $y_0 = \xi_2 \in [-10, 10]$, $z_0 = \xi_3 \in [0, 10]$, где ξ_{1-3} — некоррелированные равномерно распределенные случайные величины. Это позволило свести к минимуму эффект памяти на траекториях $\mathbf{s}(t)$, индуцированный НУ. Для каждой $\mathbf{s}(t)$ на интервале $T' = [250, 300]$ порождалась $\{T_k^{\alpha\varphi}\}_{k=1}^{K}$ длиной $K = 2 \times 10^4$, посредством стробоскопического преобразования Пуанкаре [15]. Подобный сдвиг от $t = 0$ объясняется необходимостью нейтрализации паразитного влияния переходного процесса. Отметим, что исследуемый интервал параметра r включает в себя также два типа аттрактора [15,16]: $r_a = 28$ — квазигиперболический и $r_b = 210$ — негиперболический. Из рис. 1, b–d видно, что зависимость $\delta^{\alpha\varphi}$ от параметра r существенно зависит от рассматриваемых наборов компонент $\mathbf{s}(t)$. Так, для пары x, y уровень $\delta^{\alpha\varphi}$ достигает максимума при $r = 23.5$, а затем монотонно снижается. Для пары x, z величина $\delta^{\alpha\varphi}$, наоборот, растет с увеличением r. Для этих двух пар, впрочем, как и для тройки x, y, z, значения $\delta^{\alpha\varphi}$, лежащие в доверительном интервале, существенно превосходят таковые для опорной последовательности ξ_{uw}^{Te}, что указывает на неслучайность синхронизации между компонентами $\mathbf{s}(t)$ в исследуемой системе (8). Наименьшее значение $\delta^{\alpha\varphi}$ демонстрирует пара y, z при $r < r_{ew2}$, $\mathrm{M}[\delta^{\alpha\varphi}(y, z)] < M_{\xi 2}$. Следует выделить два окна $[r_{bw1}, r_{ew}]$ и $[r_{bw2}, r_{ew2}]$, в которых $\delta^{\alpha\varphi}$ для наборов x, y, x, z и x, y, z (см. рис. 1, b и d) стабилизируется и существенно уменьшается ее дисперсия, что прямо указывает на грубость синхронизации относительно смены НУ.

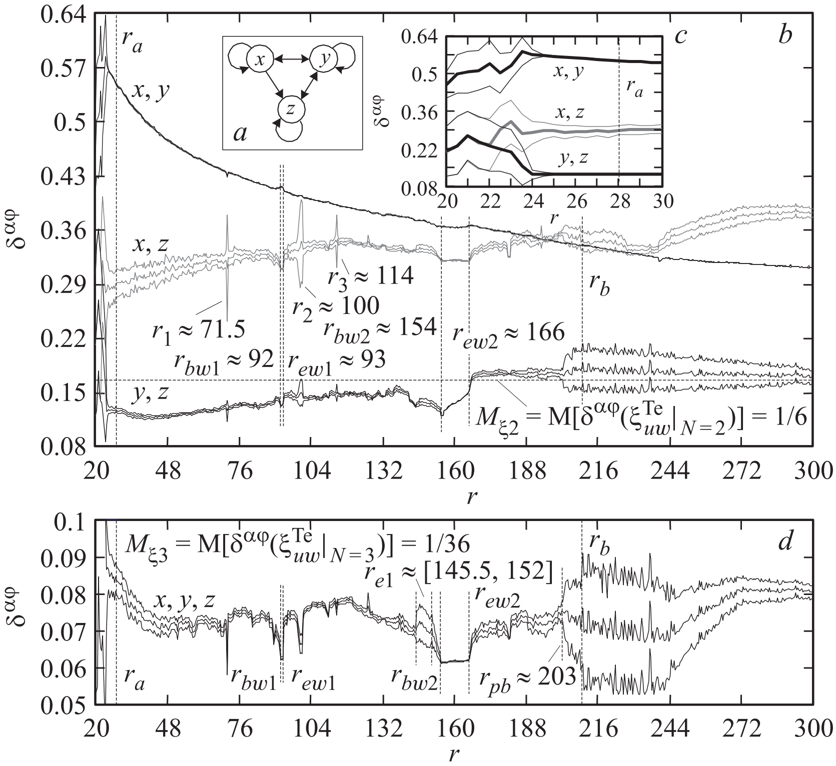

Рис. 1. a — схема связи переменных в системе (8); зависимость $\delta^{\alpha\varphi}$ от параметра r, для наборов $\mathbf{s}(t)$: b, c — 2 компоненты и d — 3 компоненты; доверительные интервалы указаны для вероятности $1 - \alpha$, $\alpha = 10^{-3}$; опорная последовательность ξ_{uw}^{Te} формировалась в алфавите $T_e^{\alpha\varphi} = \{$T3N, T3P, T5N, T5P, T6, T7$\}$, см. [10].

Есть также точки и интервалы r, в которых $\mathrm{D}[\delta^{\alpha\varphi}]$ существенно возрастает относительно других $r \in [r_a, r_b]$, например r_{1-3}, r_{e1}, $[r_{pb}, r_b]$.

При изменении параметра r в общем случае изменяется и вид синхронизирующейся конфигурации $\mathbf{s}(t)$ (при отборе на множестве НУ), что подтвердило важность анализа противофазной синхронизации [9]. При этом наборы фазовых переменных x, z и y, z представлены достаточно регулярной сменой конфигураций $xz \leftrightarrow x\overline{z}$ и $yz \leftrightarrow y\overline{z}$, а

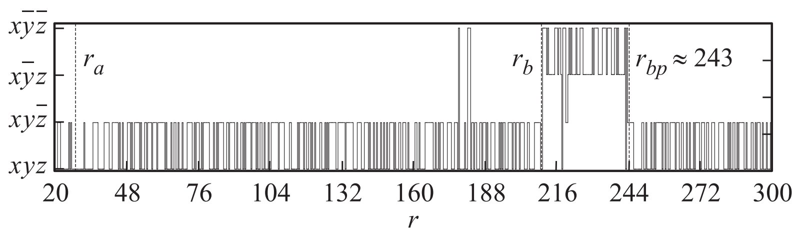

Рис. 2. Вид синхронизирующейся конфигурации для набора x, y, z в зависимости от параметра r; компонента (2), у которой $v_{m,n} = -1$, обозначается штрихом.

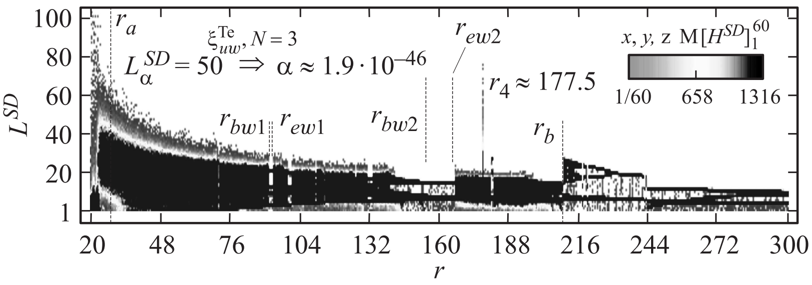

Рис. 3. Карта $L^{SD}: H^{SD}[L^{SD}] > 0$ в зависимости от параметра r; $L^{SD}_{\alpha} = 6$ для ξ^{Te}_{uw} при $\alpha = 10^{-3}$ и $K = 2 \times 10^4$.

набор x, y инвариантен к изменению r и представлен исключительно конфигурацией xy. Для набора 3 компонент диаграмма приведена на рис. 2. Здесь явно выделяется окно $[r_b, r_{bp}]$.

Из рис. 3 видно, что доменная структура синхронизации (8) для набора x, y, z нетривиальна и содержит для L^{SD}: выбросы (см., например, при r_4); уширения ($[r_b, r_{bp}]$); запрещенные значения ($[r_{bw}, r_{ew1}]$). Анализ также показывает, что в синхронизации компонент $\mathbf{s}(t)$ перемежаемость [12,13] выражена очень существенно.

Итак, в представленной работе предложен новый подход к количественному оцениванию уровня и параметров синхронизации хаотических колебаний двух и более связанных осцилляторов, позволяющий обнаруживать факт перестройки структуры аттракторов и перемежаемое поведение. Синхронизация оценивается с позиций формы (структуры геометрии) траекторий в пространстве $\mathrm{S} \times \mathrm{K}$, т. е. в определенном смысле изучается топологическая синхронность динамических систем. Проведено тестирование метода на примере системы Лоренца. Продемонстрирована информативность инструментария и исследованы особенности перестройки структуры аттрактора трехкомпонентной системы тестового примера. Полученные результаты планируется проверить при других значениях Δt и связать их со структурными и размерностными свойствами аттракторов (8). В дальнейшем предполагается расширить аналитические возможности предложенного подхода.

Список литературы

[1] *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization. Camb. Univ. Press, 2001.
[2] *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V.* et al. // Phys. Rep. 2002. V. 366. P. 1.
[3] *Pecora L.M., Caroll T.L.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 821.
[4] *Анищенко В.С., Постнов Д.Э.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. В. 6. С. 569.
[5] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* // Int. J. of Bifurc. and Chaos. 2000. V. 10. P. 2291.
[6] *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. 45 280.
[7] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 4193.
[8] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. В. 14. С. 29.
[9] *Liu W., Qian X., Yang J., Xiao J.* // Phys. Lett. A. 2006. V. 354. P. 119.
[10] *Макаренко А.В.* // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. В. 4. С. 1.
[11] *Лоскутов А.Ю.* // УФН. 2010. Т. 180. С. 1305.
[12] *Безручко Б.П., Смирнов Д.А.* Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: ГосУНЦ „Колледж“, 2005.
[13] *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А.* и др. // УФН. 1987. Т. 152. С. 3.
[14] *Леман Э.Л.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979. (*Lehmann E.L.* Testing statistical hypotheses. Wiley and Sons, 1970).
[15] *Кузнецов С.П.* // УФН. 2011. Т. 181. С. 121.
[16] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А.* и др. // УФН. 2005. Т. 175. С. 163.
[17] *Lorenz E.N.* // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130.
[18] *Tucker W.* // Found. Comput. Math. 2002. V. 2. P. 53.