01

Построение ядер $G_{l,0}^{l}$ нелинейного интеграла столкновений уравнения Больцмана для произвольных l

© *А.Я. Эндер, И.А. Эндер, Л.А. Бакалейников, Е.Ю. Флегонтова*

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: andrei.ender@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 11 января 2012 г.

В [1] показано, что связь между ядрами $L_l(v, v_1)$ линейного интеграла столкновений и ядрами $G_{l,0}^{l}(v, v_1, v_2)$ нелинейного интеграла столкновений сводится к преобразованию Лапласа. В данной статье для моделей твердых шаров и псевдомаксвелловских молекул с использованием аппарата преобразований Лапласа построены аналитические выражения для нелинейных ядер $G_{l,0}^{+l}(v, v_1, v_2)$ для произвольных l.

При разложении по сферическим гармоникам функции распределения (ФР) частиц газа по скоростям уравнение Больцмана переходит в систему интегро-дифференциальных уравнений. При этом интеграл столкновений, представляющий собой пятикратный интеграл со сложной областью интегрирования, заменяется набором существенно более простых интегральных операторов [2,3]. Проблема построения ядер $G_{l_1,l_2}^{+l}(v, v_1, v_2)$ этих операторов весьма сложна. Достаточно сказать, что явные выражения для ядер даже линеаризованного интеграла столкновений были известны ранее только для случая твердых шаров [4,5]. В последнее время удалось построить аналогичные ядра для газа из максвелловских молекул [6].

Использование ядер значительно упрощает процедуру решения уравнения Больцмана. Переход к ядрам дал возможность получить ряд интересных результатов для граничных линейных задач в динамике разреженного газа [7,8].

Свойство инвариантности интеграла столкновений относительно скорости системы отсчета, в которой проводится разложение ФР, приводит к рекуррентным связям для нелинейных ядер $G_{l_1,l_2}^{l}(v, v_1, v_2)$

при произвольных сечениях взаимодействия частиц [9]. При построении ядер с помощью рекуррентной процедуры стартовыми являются ядра $G^0_{0,0}(v, v_1, v_2)$. Рекуррентные процедуры значительно упрощаются, если известно подмножество ядер $G^l_{l,0}(v, v_1, v_2)$.

Данная статья тесно связана с работой [1], в которой показано, что нелинейные ядра $G^l_{l,0}(v, v_1, v_2)$ выражаются через линейные ядра $L_l(v, v_1)$ с помощью обратного преобразования Лапласа. Это позволило для газа из твердых шаров и псевдомаксвелловских молекул найти аналитические выражения для двух нелинейных ядер, $G^0_{0,0}(v, v_1, v_2)$ и $G^1_{1,0}(v, v_1, v_2)$.

Ядра $L_l(v, v_1)$, построенные в [5,6], содержат квадратуры, что создает сложности при расчете ядер $G^l_{l,0}(v, v_1, v_2)$. В данной работе за счет изменения порядка интегрирования и обращения преобразования Лапласа для тех же моделей взаимодействия удалось получить аналитические выражения для подмножества ядер $G^l_{l,0}(v, v_1, v_2)$ с произвольным l.

Рассмотрим нелинейный интеграл столкновений в уравнении Больцмана. В [2,3] показано, что при разложении ФР по сферическим гармоникам интеграл столкновений всегда можно представить через ядра осесимметричной задачи $G^l_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$:

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial t}\right)\bigg|_{col} = \iint G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2$$
$$= \sum_{l,m,i} Y^i_{lm}(\Theta, \varphi) \sum_{l_1,m_1,i_1} \sum_{l_2,m_2,i_2} Z^{lmi}_{l_1 m_1 i_1, l_2 m_2 i_2}$$
$$\times \left(\int_0^\infty \int_0^\infty G^l_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2) f^i_{l_1,m_1}(v_1) f^i_{l_2,m_2}(v_2) v_1^2 v_2^2 dv_1 dv_2 \right), \tag{1}$$

где $f^i_{l,m}(v)$ — коэффициенты разложения функции распределения $f(\mathbf{v})$ по сферическим гармоникам $Y^i_{lm}(\Theta, \varphi)$, а $Z^{lmi}_{l_1 m_1 i_1, l_2 m_2 i_2}$ — не зависящие от сечения рассеяния универсальные числовые коэффициенты, легко выражающиеся через коэффициенты Клебша–Гордана (см. [2], с. 190–191). Для осесимметричных задач $Z^{lmi}_{l_1 m_1 i_1, l_2 m_2 i_2} = 1$. Кроме того, $Z^{lmi}_{l_1 m_1 i_1, l_2 m_2 i_2}$ могут отличаться от нуля, только если $|l_1 - l_2| \leqslant l \leqslant l_1 + l_2$, $l + l_1 + l_2$ — четное число, $m = m_1 \pm m_2$ и $i + i_1 + i_2$ — четное число (обобщенная теорема Гекке [10]). Если l_1, m_1 или l_2, m_2 равны нулю, то также $Z = 1$ и соответственно либо $(l_2, m_2) = (l, m)$, либо $(l_1, m_1) = (l, m)$. Подчеркнем, что ядра $G^l_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$ зависят только от величин скоростей.

Часто в интеграле столкновений (1) можно выделить части, соответствующие обратным (gain term) и прямым (loss term) столкновениям. В дальнейшем нас будут интересовать ядра интеграла обратных столкновений G^+. При малых отклонениях от равновесия или при рассеянии примеси на равновесном фоновом газе уравнение Больцмана становится линейным. Ядра линеного и нелинейного интегралов столкновений связаны соотношением (более подробно см. [3])

$$L^+_l(v, v_1; \alpha) = \int\limits_0^\infty G^{+l}_{l,0}(v, v_1, v_2) M(v_2, \alpha) v_2^2 dv_2. \tag{2}$$

Здесь $M(v, \alpha) = (\alpha/\pi)^{3/2} \exp(-\alpha v^2)$ — максвеллиан, $\alpha = m/2kT = 1/v_T^2$, T — фоновая температура, v_T — тепловая скорость. Отметим, что в (2) входят только нелинейные ядра с индексами $l = l_1$, $l_2 = 0$. Вводя новые переменные

$$w = v^2, \quad w_1 = v_1^2, \quad t = v_2^2, \tag{3}$$

из (2) получаем

$$2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} L^+_l\left(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}; \alpha\right) = \int\limits_0^\infty G^{+l}_{l,0}\left(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t}\right) \exp(-\alpha t) t^{1/2} dt. \tag{4}$$

Интеграл, стоящий в правой части уравнения (4), можно рассматривать как преобразование Лапласа $\hat{\mathfrak{L}}_{\alpha,t}$ от переменной t к переменной α [1]. Если функция $L^+_l(\sqrt{w}, \sqrt{w}_1; \alpha)$ известна, то нелинейное ядро $G^{+l}_{l,0}\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t})$ может быть получено с помощью обратного перобразования Лапласа $\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}$. В [1] показано, что в случае степенных потенциалов ($V \sim 1/r^\kappa$) связь между нелинейными и линейными ядрами может быть представлена в форме

$$G^{+l}_{l,0}\left(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t}\right) = \mathfrak{C}_\mu \frac{2\pi^{3/2}}{t^{1/2}} \hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t} \left[\frac{1}{\alpha^\mu} \tilde{L}^+_l\left(\sqrt{\alpha w}, \sqrt{\alpha w_1}\right)\right]. \tag{5}$$

Здесь $\mu = (\kappa - 4)/2\kappa$. Размерная константа $\mathfrak{C}_\mu$ не зависит от α, а безразмерное линейное ядро $\tilde{L}^+_l(\sqrt{\alpha w}, \sqrt{\alpha w_1})$ зависит от α только в комбинациях $\sqrt{\alpha w}$ и $\sqrt{\alpha w_1}$.

В случае псевдомаксвелловских молекул ($\mu = 0$), когда сечение рассеяния обратно пропорционально относительной скорости сталкивающихся частиц и не зависит от угла, в [6] получено следующее выражение для линейного ядра $\tilde{L}^+_l$:

$$\tilde{L}^+_l(\sqrt{\alpha w}, \sqrt{\alpha w_1}) = 2\int\limits_0^1 Q_l \alpha^l \exp(-c\alpha) f(\alpha) ds.$$

Здесь $Q_l, c, f(\alpha)$ зависят от s:

$$Q_1 = \frac{2^{-2l}(1-s^2)^l P_l(s)}{(ww_1)^{l/2+1/2} s^l \sqrt{1-s^2}} \frac{1}{\pi^{1/2}\Gamma(l+1)},$$

$$f(\alpha) = \pi^{1/2}\Gamma(\nu + 1/2)\exp(-b\alpha/2)(b/\alpha)^\nu I_\nu(b\alpha/2),$$

$$b = \frac{4\sqrt{ww_1}\, s}{1-s^2}, \qquad c = \frac{(\sqrt{w} - s\sqrt{w_1})^2}{1-s},$$

$I_\nu(x)$ $(\nu = l + 1/2)$ — функции Бесселя, $P_l(s)$ — полиномы Лежандра. Вычисление $C^{+l}_{l,0}$ непосредственно по формуле (5) затруднительно, однако эти ядра можно найти, если сначала под знаком интеграла выполнить обратное преобразование Лапласа, а затем провести интегрирование.

Как показано в [11], при преобразовании Лапласа изображению $f(\alpha)$ соответствует оригинал

$$F(t) = (bt - t^2)^{\nu - 1/2}\big(\Theta(t) - \Theta(t-b)\big),$$

где $\Theta(t)$ — функция скачка Хевисайда. Умножению изображения на α^l отвечает l-я производная от оригинала. Нетрудно показать, что в нашем случае

$$\frac{d^l F(t)}{dt^l} = \Theta(b-t)\Theta(t)(-1)^l l! \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k}^2 t^{l-k}(t-b)^k. \tag{6}$$

Используя полученный вид оригинала и соотношение (5) при $\mu = 0$, для произвольного l получаем

$$G_{l,0}^{+l}(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t}) = \mathfrak{C}_0 \frac{4\pi}{2^{2l}(ww_1)^{l/2+1/2}t^{1/2}}(-1)^l$$

$$\times \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k}^2 \int_0^1 \big(g_1(s)\big)^{l-k} \big(g_2(s)\big)^k \frac{P_l(s)}{s^l\sqrt{1-s^2}}\, \Theta\big(g_1(s)\big)\Theta\big(-g_2(s)\big)ds, \tag{7}$$

где

$$g_1(s) = -(t+w_1)s^2 + 2s\sqrt{ww_1} + t - w,$$
$$g_2(s) = -(t+w_1)s^2 - 2s\sqrt{ww_1} + t - w.$$

В [3] и [1] показано, что степенные потенциалы обладают свойством подобия, которое позволяет представить ядра в виде

$$G_{l_1,l_2}^{l}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{C}_\mu \frac{1}{d^{3-2\mu}}\, \Psi_{l_1,l_2}^{l}(x, y). \tag{8}$$

Здесь $d = \sqrt{v^2 + v_1^2 + v_2^2}$, $x = v/d$, $y = v_1/d$, а $v_2/d = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Возвращаясь в (7) к переменным $v = \sqrt{w}$, $v_1 = \sqrt{w_1}$, $v_2 = \sqrt{t}$ и пользуясь представлением (8), можно записать (7) в форме

$$G_{l,0}^{+l}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{C}_0 \frac{1}{d^3}\, \Psi_{l,0}^{+l}(x, y), \tag{9}$$

где приведенные ядра $\Psi_{l,0}^{l}(x, y)$ зависят от двух переменных и имеют вид

$$\Psi_{l,0}^{+l}(x, y) = \frac{4\pi(-1)^l}{2^{2l}(xy)^{l+1}\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\times \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k}^2 \int_{s_1}^{s_2} \big(g_1(s)\big)^{l-k} \big(g_2(s)\big)^k \frac{P_l(s)}{s^l\sqrt{1-s^2}}\, ds. \tag{10}$$

Здесь

$$s_1 = \left| \frac{xy - \sqrt{1-x^2-y^2}\sqrt{1-2x^2}}{1-x^2} \right|, \quad s_2 = \frac{xy + \sqrt{1-x^2-y^2}\sqrt{1-2x^2}}{1-x^2}. \tag{11}$$

При любом фиксированном l интегралы в (10) при условии (11) берутся аналитически и выражаются через простые элементарные функции.

Перейдем к построению ядер $G^{+l}_{l,0}(v, v_1, v_2)$ для газа из твердых шаров. Линейное ядро для этой модели было построено в [5]. В наших обозначениях оно имеет вид

$$\tilde{L}^+_l\big(\sqrt{\alpha w}, \sqrt{\alpha w_1}\big) = \frac{4\exp(-\alpha w)}{\sqrt{\pi}} \frac{m_v}{\sqrt{w w_1}} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}(2l+1)} \frac{m_v^{l-1/2}}{(w w_1)^{l/2}} \right.$$

$$\left. + \sqrt{\pi} \int\limits_0^1 z \exp(z^2 \alpha m_v) \Phi\big(z\sqrt{\alpha m_v}\big) P_l\big(z\sqrt{m_v}/\sqrt{w}\big) P_l\big(z\sqrt{m_v}/\sqrt{w_1}\big) dz \right), \tag{12}$$

где $m_v = \min(w, w_1)$. В случае модели твердых шаров ($\mu = 0.5$) из (5) имеем

$$G^{+l}_{l,0}\big(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t}\big) = \mathfrak{C}_{0.5} \frac{2\pi^{3/2}}{t^{1/2}} \hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t} \left[\frac{\tilde{L}^+_l(\sqrt{\alpha w}, \sqrt{\alpha w_1})}{\sqrt{\alpha}} \right]. \tag{13}$$

Из [11] (формула 5.12(10), 237) получаем

$$\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t} \left[\exp(-\alpha w) \frac{\exp(\alpha z^2 m_v)\Phi(z\sqrt{\alpha m_v})}{\alpha^{1/2}} \right] = \frac{\Theta(w-t)\Theta(t-w+z^2 m_v)}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-w+z^2 m_v}}. \tag{14}$$

Кроме того,

$$\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t} \left[\frac{\exp(-\alpha w)}{\alpha} \right] = \Theta(t-w). \tag{15}$$

Из (12) и (13) с учетом (14) и (15) получаем

$$G^{+l}_{l,0}\big(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t}\big) = \mathfrak{C}_{0.5} \frac{8\pi}{t^{1/2}} \frac{m_v}{\sqrt{w w_1}} \left(\frac{\Theta(t-w)}{(2l+1)} \frac{m_v^{l-1/2}}{(w w_1)^{l/2}} \right.$$

$$\left. + \Theta(w-t) \int\limits_0^1 \frac{z\Theta(z^2 m_v - (w-t))}{\sqrt{z^2 m_v - (w-t)}} P_l\left(\frac{z\sqrt{m_v}}{\sqrt{w}}\right) P_l\left(\frac{z\sqrt{m_v}}{\sqrt{w_1}}\right) dz. \right) \tag{16}$$

Как и в случае псевдомаксвелловских молекул, вновь перейдем в (16) к переменным $v = \sqrt{w}$, $v_1 = \sqrt{w_1}$, $v_2 = \sqrt{t}$ и опять, пользуясь свойством

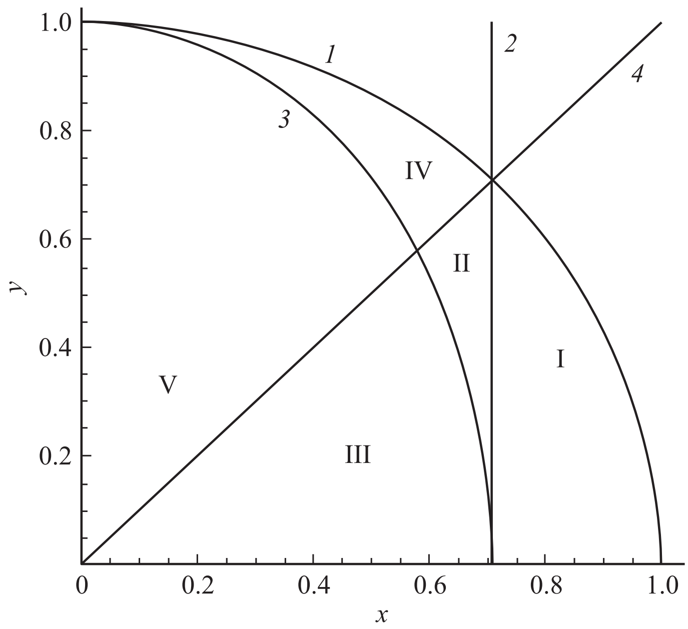

Рис. 1. Структура области определения приведенных нелинейных ядер $\Psi^{+l}_{l_1,l_2}(x,y)$. Границы подобластей: $x^2+y^2=1$ (*1*), $x=\sqrt{2}$ (*2*), $y=\sqrt{1-2x^2}$ (*3*), $y=x$ (*4*).

подобия, представим нелинейные ядра в виде произведений (8), где

$$\Psi^{+l}_{l,0}(x,y)=\frac{8\pi}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{m_x}{xy}\Bigg(\frac{\Theta(1-2x^2-y^2)}{(2l+1)}\frac{m_x^{2l}}{(xy)^l}$$

$$+\Theta(2x^2+y^2-1)\Theta(1-2x^2-y^2+m_x)$$

$$\times\int\limits_{\sqrt{\frac{2x^2+y^2-1}{m_x^2}}}^{1}\frac{zP_l(zm_x/x)P_l(zm_x/y)}{\sqrt{z^2-(2x^2+y^2-1)/m_x^2}}dz\Bigg). \qquad (17)$$

Здесь $m_x=\min(x,y)$. Как и для псевдомаксвелловских молекул, в случае твердых шаров при любом фиксированном l интегралы в (17)

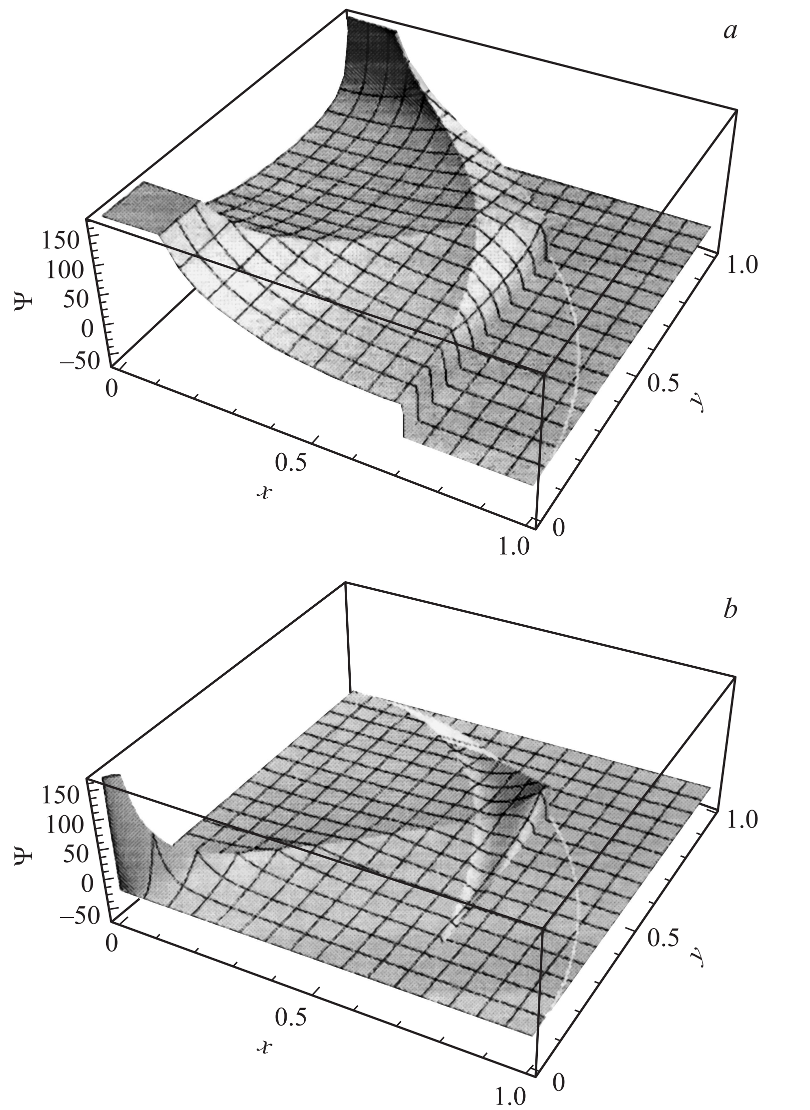

Рис. 2. Приведенные нелинейные ядра $\Psi_{0,0}^{+0}(x, y)$ (a) и $\Psi_{2,0}^{+2}(x, y)$ (b) для газа из твердых шаров.

берутся аналитически. Проверено, что для обеих моделей при $l = 0$ и $l = 1$ выражения для соответствующих ядер совпадают с результатами [1].

Проанализируем структуру найденных ядер. Оказалось, что независимо от модели взаимодействия и индекса l область задания разбивается на пять подобластей (рис. 1), на границах которых ядра непрерывны, а частные производные испытывают разрыв. В плоскости xy значения аргументов меняются в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Кроме того, как видно из (10), (11), (17), ядра отличны от нуля только при условии $x < \sqrt{2}$. Это соответствует условию $v_1^2 + v_2^2 > v^2$ и отражает закон сохранения энергии. На рис. 2 приведена функция $\Psi^{+2}_{2.0}(x, y)$ для твердых шаров. Следует отметить, что функции $\Psi^{+l}_{l,0}(x, y)$ для псевдомаксвелловских молекул похожи по форме на соответствующие функции для твердых шаров. Мы провели дополнительное исследование и убедились, что при $\mu = 0$ функции Ψ сильно меняются при изменении угловой зависимости сечения рассеяния.

Работа поддержана грантом РФФИ № 09.08.01017.

Список литературы

[1] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. В. 6. С. 1–8.
[2] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* Интеграл столкновений уравнения Больцмана и моментный метод. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003. 224 с.
[3] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. В. 10. С. 12–21.
[4] *Hilbert D.* // Math. Ann. 1912. Bd. 72. S. 562–577.
[5] *Hecke E.* // Math. Zs. 1922. Bd. 12. S. 274–286.
[6] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. В. 5. С. 9–14.
[7] *Loyalka S.K.* // Phys. Fluids. A. 1989. V. 1. N 2. P. 403–408.
[8] *Garcia R.D.M., Siewert C.E.* // Eur. J. Mech. B. Fluids. 2007. V. 26. P. 749–778.
[9] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А.* // ДАН. 2011. Т. 437. В. 5. С. 621–623.
[10] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* // ЖТФ. 2003. Т. 83. В. 2. С. 6–12.
[11] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. I. М.: Наука, 1969. 344 с.