

12,05

# Спин-волновая спектроскопия и применение ее методов к гетероструктурам диоксида кремния с наночастицами Co на подложке GaAs

© Л.В. Луцев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: l\_lutsev@mail.ru

(Поступила в Редакцию в окончательном виде 25 октября 2010 г.)

Развит метод нахождения магнитных и электрических характеристик пленочных наноструктур, содержащих магнитные наночастицы, из дисперсионных зависимостей поверхностных спиновых волн, распространяющихся в этих наноструктурах. Дисперсионные зависимости спиновых волн определяются динамикой спиновой составляющей, описываемой обобщенными уравнениями Ландау–Лифшица, и переменным электромагнитным полем, образованным спиновой волной. Так как спиновые волны очень чувствительны к неоднородности магнитных параметров, разупорядоченности спинов и проводимости того объекта, вблизи или внутри которого они распространяются, их можно использовать для определения магнитных и электрических характеристик исследуемых объектов. Развитый метод расчета, который может быть применен как в спинволновой спектроскопии, так и для анализа дисперсионных кривых, полученных другими методами, использован для нахождения параметров гетероструктур, состоящих из пленки  $\text{SiO}_2$  с наночастицами Co на подложке GaAs. Из формы дисперсионных кривых поверхностных спиновых волн найдено, что в пленке около интерфейса спины наночастиц близки к ферромагнитному упорядочению, а около свободной поверхности их спиновая ориентация является более хаотической. Обнаружено, что в GaAs образуется проводящий слой и пленка  $\text{SiO}_2(\text{Co})$  около интерфейса имеет повышенную проводимость.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-02-00516).

## 1. Введение

Нахождение характеристик спиновых волн в неупорядоченных магнитных структурах представляет важную проблему, до сих пор не решенную в полной мере. Дисперсионные зависимости спиновых волн определяются не только спиновой составляющей, но и переменным электромагнитным полем, которое возбуждается спиновой волной. Спиновые возбуждения в неупорядоченных магнитных структурах могут иметь оптические, ротонные и акустические ветви, локализованные состояния [1–4]. Несмотря на то, что при описании оптических ветвей и локализованных состояний можно пренебречь переменными магнитным и электрическим полями спиновых возбуждений и ограничиться обменным взаимодействием между спинами, теория этих спиновых волн требует привлечения сложного математического аппарата. В противоположность этому для акустической ветви спиновых возбуждений порождаемое ими электромагнитное поле существенно влияет на вид дисперсионных зависимостей, так что этим полем нельзя пренебречь. Однако для спиновых волн акустической ветви с большой длиной волны возможно значительное упрощение задачи. Дисперсионные кривые можно найти после усреднения по объему, содержащему большое количество спинов и имеющему размер много меньше длины волны. Погрешность определения дисперсионных кривых зависит от ячейки усреднения и характера спиновой разупорядоченности. Одной из целей

настоящей работы является нахождение дисперсионных зависимостей длинноволновых спиновых волн акустической ветви в неупорядоченных магнитных системах. Экспериментально такие длинноволновые спиновые волны (магнитостатические волны) наблюдались в пленках железиттриевого граната  $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  (YIG) при наличии доменной структуры в малых магнитных полях [5,6] и в пленках двуоксида кремния с наночастицами кобальта  $\text{SiO}_2(\text{Co})$  на подложке GaAs [7–9]. В последнем случае дисперсионные зависимости спиновых волн получены с помощью техники бриллюэновского рассеяния.

Взаимодействие переменного магнитного поля спиновой волны с носителями тока и дальнедействующее взаимодействие между спинами через магнитное поле приводят к тому, что дисперсионные зависимости спиновых волн этой ветви становятся зависящими от формы образца, наличия магнитных неоднородностей и электрической проводимости. В последнем случае переменное магнитное поле, возбуждаемое спиновой волной, приводит к появлению электрического поля, взаимодействующего с электронами, и к генерации вихревых токов в проводящих структурах, расположенных в области распространения спиновых волн. Вихревые токи в свою очередь действуют на спиновые волны и изменяют их характеристики. Разное влияние проводимости, неоднородности магнитных параметров и разупорядоченности спинов на форму дисперсионных кривых спиновых волн акустической ветви дает возможность характеристики свойств исследуемых структур, т.е. позволяет решить

обратную задачу — определить их магнитные и электрические характеристики из дисперсионных кривых спиновых волн. Метод, использующий возбужденные спиновые волны, распространяющиеся в исследуемой структуре, и позволяющий получать информацию о ее свойствах из дисперсионных характеристик спиновых волн, может быть назван методом спин-волновой спектроскопии. Использование этого метода является особенно актуальным для бесконтактной характеристики наноструктур. В [10–13] исследовались спиновые волны в системе наноструктурный объект/пленка YIG. Переменное магнитное поле спиновой волны, распространяющейся в пленке YIG, взаимодействовало с исследуемым объектом, что приводило к изменениям дисперсионной кривой, групповой скорости и затухания спиновой волны. Возбуждение и прием спиновых волн в пленке YIG осуществлялись микрополосковыми антеннами. Изменение дисперсионных кривых определялось по изменениям амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик СВЧ-тракта при разных частотах. В [7–9] с помощью техники бриллюэновского рассеяния исследовались дисперсионные зависимости спиновых волн, распространяющихся непосредственно в изучаемых образцах — пленках SiO<sub>2</sub> с наночастицами Co. Возбуждение спиновых волн осуществлялось термически и падающим светом. Исходя из изложенного выше второй целью работы является вывод алгоритма численного решения обратной задачи для пленочных магнитных наноструктур — определение магнитных и электрических характеристик из спинволновых дисперсионных зависимостей.

В разделе 2 рассмотрена динамика спиновой составляющей в неупорядоченных магнитных системах. Рассмотрение ведется на основе обобщенных уравнений Ландау–Лифшица, выведенных в рамках модели Гейзенберга с магнитным дипольным и обменным взаимодействиями между спинами [14,15]. Путем усреднения уравнений Ландау–Лифшица получен обобщенный тензор магнитной восприимчивости. Полюса тензора магнитной восприимчивости определяют дисперсионные соотношения спиновых волн в бесполовом приближении, т.е. в этом приближении не принимаются во внимание переменные магнитные и электрические поля, которые окружают спиновую систему. Переменное электромагнитное поле, которое необходимо учитывать в теории длинноволновых спиновых возбуждений, рассмотрено в разделе 3. В этом разделе выведены уравнения, определяющие дисперсионные кривые спиновых волн в неоднородной проводящей среде, содержащей магнитные наночастицы с неупорядоченной спиновой ориентацией. Учет переменных электромагнитных полей, возбуждаемых спиновой волной, приводит к тому, что акустическая ветвь спиновых волн разбивается на моды, дисперсионные кривые которых зависят от формы образца, проводимости и неоднородности магнитных параметров. В связи с этим рассмотрение проведено для конкретной пленочной структуры, состоящей из двух слоев с различными магнитными и электрическими параметрами. Исследовано влияние проводимости, неоднородности магнитных

параметров и разупорядоченности спинов на дисперсионные зависимости поверхностной моды спиновых волн, которая обычно используется в экспериментальных работах. В разделе 4 рассмотрен алгоритм нахождения численного решения обратной задачи для поверхностных спиновых волн. Эта задача не имеет точного аналитического решения. Для разрешения проблемы ее вычислительной устойчивости, возникающей в задачах подобного типа [16,17], были рассмотрены первые члены ряда Тейлора разложения тех параметров, которые имеют наибольшее влияние на дисперсионную кривую поверхностной спиновой волны. Применение развитой теоретической модели к эксперименту на гетероструктурах, состоящих из пленки двуоксида кремния с наночастицами кобальта на подложке GaAs, рассмотрено в разделе 5. Актуальность исследования этих гетероструктур заключается в том, что в них наблюдается эффект инжекционного магнитосопротивления [18–20]. Найдены величины проводимости обогащенного электронного слоя в GaAs и пленки SiO<sub>2</sub>(Co), а также определены параметры разупорядоченности спинов около свободной поверхности пленки SiO<sub>2</sub>(Co) и около интерфейса с GaAs.

## 2. Уравнения Ландау–Лифшица и спиновая динамика длинноволновых возбуждений в неупорядоченных магнитных системах

2.1. Гамильтониан. Рассмотрим спиновую динамику в неупорядоченных магнитных системах на основе модели Гейзенберга и выведенных из этой модели обобщенных уравнений Ландау–Лифшица [14,15,21]. Спины системы могут являться спинами атомов или наночастиц. Гамильтониан модели Гейзенберга имеет вид

$$\mathcal{H} = -g\mu_B \sum_{\mathbf{r}} \mathbf{H}S(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') S^{\mu}(\mathbf{r}) S^{\nu}(\mathbf{r}'), \quad (1)$$

где  $\mathbf{H}$  — внешнее магнитное поле,  $\mu, \nu = -, +, z$ . Мы будем предполагать, что суммирование в (1) и во всех последующих соотношениях производится по всем повторяющимся индексам  $\mu, \nu$ . Суммирование по пространственным переменным  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  производится по объему  $V$  магнитного образца.  $g$  и  $\mu_B$  — соответственно фактор Ланде и магнетон Бора,  $S^{\mu}(\mathbf{r})$  — спиновые операторы,  $J_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = J_{\nu\mu}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  — взаимодействие между спинами, являющееся суммой обменного  $I_{\mu\nu}$  и магнитного дипольного взаимодействий

$$J_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = I_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + (g\mu_B)^2 \nabla_{\mu} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla'_{\nu},$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} &= \{\nabla_{-}, \nabla_{+}, \nabla_z\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial z} \right\}. \end{aligned}$$

Согласно диаграммному разложению спиновых функций Грина, первое приближение — это приближение самосогласованного поля, в рамках которого находится эффективное поле, действующее на спин, и учитывается влияние соседних спинов [14,15,21]. Второе приближение является приближением эффективных функций Грина и взаимодействий (ЭФГВ). В этом приближении определяются полюсы матрицы ЭФГВ, выводятся обобщенные уравнения Ландау–Лифшица, описывающие спин-волновые возбуждения, и находятся дисперсионные кривые. Следующие члены диаграммного разложения определяют мнимые и действительные поправки к полюсам матрицы ЭФГВ. Мнимые части полюсов дают параметры релаксации спиновых возбуждений, действительные части определяют поправки к дисперсионным кривым. Для описания динамики длинноволновых возбуждений в неупорядоченных магнитных системах и нахождения обобщенного тензора магнитной восприимчивости мы рассмотрим первые два приближения диаграммного разложения — приближение самосогласованного поля и приближение ЭФГВ, в рамках которого выведены уравнения Ландау–Лифшица.

2.2. Приближение самосогласованного поля. Рассмотрим поле, действующее на спин магнитной наночастицы. Приближение самосогласованного поля эквивалентно перегруппировке членов в гамильтониане  $\mathcal{H}$  (1). К магнитному полю  $\mathbf{H}$  прибавляются поле обменного взаимодействия и магнитное дипольное поле

$$H_{\mu}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}) = (\mathbf{g}\mu_{\text{B}})^{-1} \sum_{\mathbf{r}'} \mathbf{I}_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \langle \mathbf{S}^{\nu}(\mathbf{r}') \rangle \rangle,$$

$$H_{\mu}^{(\text{dip})}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}\mu_{\text{B}} \nabla_{\mu} \sum_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla'_{\nu} \langle \langle \mathbf{S}^{\nu}(\mathbf{r}') \rangle \rangle,$$

где  $\langle \langle \mathbf{S}^{\nu}(\mathbf{r}) \rangle \rangle$  — статистически средний спин. Магнитное дипольное поле может быть записано в форме

$$H_{\mu}^{(\text{dip})}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mu} \int_{\mathbf{V}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla'_{\nu} M^{\nu}(\mathbf{r}') d^3 r' + H_{\mu}^{(a)}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где первый член является размагничивающим полем  $H_{\mu}^{(\text{demag})}(\mathbf{r})$  образца, который рассматривается как непрерывная среда,  $M^{\nu}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}\mu_{\text{B}} \langle \langle \mathbf{S}^{\nu}(\mathbf{r}) \rangle \rangle / V_a$  — вектор плотности магнитного момента, определяемый усреднением по атомному объему  $V_a$ ,

$$H_{\mu}^{(a)}(\mathbf{r}) = V_a \nabla_{\mu} \sum_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla'_{\nu} M^{\nu}(\mathbf{r}') - \nabla_{\mu} \int_{\mathbf{V}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla'_{\nu} M^{\nu}(\mathbf{r}') d^3 r'$$

— поле анизотропии, которое равно магнитному полю от соседних спинов за вычетом размагничивающего фактора  $H_{\mu}^{(\text{demag})}(\mathbf{r})$ . Поле анизотропии зависит от взаимного расположения спинов друг относительно друга (или типа решетки, если рассматривается кристаллическая решетка ферромагнетика) и размера образца. В случае образца ферромагнитного кристалла с кубической решеткой с размерами много большими, чем постоянная решетки  $a$ ,

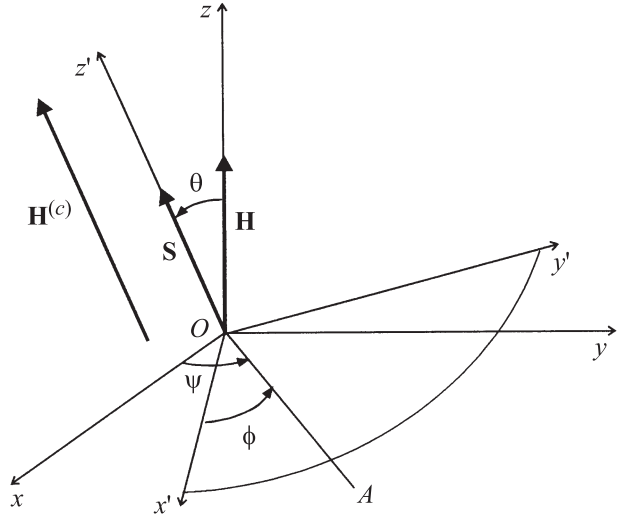


Рис. 1. Переход от локального базиса  $(x', y', z')$  к глобальному базису  $(x, y, z)$ . Ось  $OA$  лежит в плоскости  $xOy$ .

поле анизотропии  $H_{\mu}^{(a)}(\mathbf{r})$  равно нулю [22]. Учитывая дальнейшее применение теоретической модели к композитным структурам с магнитными наночастицами, которые являются магнитомягкими (рисдел 5), мы будем полагать  $H_{\mu}^{(a)}(\mathbf{r}) = 0$ .

В рамках диаграммного разложения перегруппировка членов в гамильтониане  $\mathcal{H}$  соответствует суммированию всех диаграмм, которые могут быть разрезаны на две части по линии взаимодействия. При этом одна из частей не должна иметь внешних вершин (так называемые однохвостовые диаграммы) [23]. Суммирование однохвостовых частей дает суммарное поле, действующее на спин,  $\mathbf{H}^{(c)} = \mathbf{H} + \mathbf{H}^{(\text{ex})} + \mathbf{H}^{(\text{dip})}$ . Магнитное дипольное поле  $H_{\mu}^{(\text{dip})}(\mathbf{r})$  (2) зависит от формы образца (через размагничивающее поле  $H_{\mu}^{(\text{demag})}(\mathbf{r})$ ). Если образец имеет форму эллипсоида, размагничивающее поле  $H_{\mu}^{(\text{demag})}(\mathbf{r})$  является однородным по объему образца [24]. Выберем локальный базис  $(x', y', z')$ , такой, чтобы ось  $Oz'$  была параллельна самосогласованному полю  $\mathbf{H}^{(c)} = \mathbf{H} + \mathbf{H}^{(\text{ex})} + \mathbf{H}^{(\text{dip})}$  (рис. 1). В отсутствие переменного магнитного поля в точке  $\mathbf{r}$  среднее значение спина  $\langle \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle \rangle$  параллельно полю  $\mathbf{H}^{(c)}$ . При этой спиновой ориентации достигается минимум энергии. Так как в неупорядоченной магнитной системе поле  $\mathbf{H}^{(\text{ex})} + \mathbf{H}^{(\text{dip})}$ , действующее на  $\langle \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle \rangle$  со стороны соседних спинов, имеет разную величину и ориентацию, зависящую от  $\mathbf{r}$ , в общем случае направление спина  $\langle \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle \rangle$  будет зависеть от  $\mathbf{r}$ . Спины будут разориентированы в соответствии с разориентацией  $\mathbf{H}^{(c)}$ . После того, как мы нашли самосогласованное поле и равновесную спиновую ориентацию, рассмотрим динамику спиновых возбуждений, описываемых уравнениями Ландау–Лифшица.

2.3. Обобщенные уравнения Ландау–Лифшица и нахождение тензора магнитной восприимчивости. Обобщенные уравнения Ландау–

Лифшица получаются в приближении ЭФГВ при учете обменного взаимодействия [14,21]. Мы будем полагать, что обменное взаимодействие изотропно,  $2I_{-+}^{(0)} = 2I_{+-}^{(0)} = I_{zz}^{(0)} = I^{(0)}$ . Тогда, если на спины действует переменное магнитное поле  $h_v(\mathbf{r}, \omega)$ , уравнения Ландау-Лифшица в локальном базисе  $(x', y', z')$  дадут соотношения между малыми изменениями плотности магнитного момента  $m_v(\mathbf{r}, \omega) = g\mu_B \delta \langle \langle S_v(\mathbf{r}, \omega) \rangle \rangle / V_a$  и полем  $h_v(\mathbf{r}, \omega)$

$$m_{\pm}(\mathbf{r}, \omega) = 2\gamma \hat{E}_{\pm}^{-1} M(\mathbf{r}) h_{\mp}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3)$$

$$m_z(\mathbf{r}, \omega) = \gamma \hat{E}_z^{-1} \frac{B^{[1]}(p)}{B(p)} M(\mathbf{r}) h_z(\mathbf{r}, \omega), \quad (4)$$

где  $h_{\pm} = 1/2(h_x \mp ih_y)$ ,  $\omega$  — частота,  $\delta \langle \langle S_v(\mathbf{r}, \omega) \rangle \rangle$  — вариация статистически среднего спина  $\langle \langle S_v(\mathbf{r}) \rangle \rangle$  и  $\gamma = g\mu_B/\hbar$  — гиромагнитное отношение,  $\hat{E}_{\pm}, \hat{E}_z$  — операторы Ландау-Лифшица, которые в общем случае являются псевдодифференциальными [25]. Функции

$$B(p) = SB_S(Sp),$$

$$B^{[1]}(p) = S \frac{\partial B_S(Sp)}{\partial p}$$

выражаются через функцию Бриллюэна  $B_S$  для спина  $S$ :  $B_S(x) = (1 + 1/2S) \coth[(1 + 1/2S)x] - (1/2S) \coth(x/2S)$ ,  $p = \beta g\mu_B H_z^{(c)}(\mathbf{r})$ ,  $\beta = 1/kT$ ,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура. При низких температурах производная функции Бриллюэна  $B^{[1]}(p)$  стремится к нулю, и изменение намагниченности  $m_z$  в уравнении (4) становится пренебрежимо малым. Операторы Ландау-Лифшица имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\pm} m_{\pm}(\mathbf{r}, \omega) &= [\gamma H^{(\text{mag})}(\mathbf{r}) \pm \omega] m_{\pm}(\mathbf{r}, \omega) \\ &+ \frac{4\pi\gamma\alpha M(\mathbf{r})}{V_b} \sum_{\mathbf{r}'} \int_{V_b} k^2 \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] m_{\pm}(\mathbf{r}', \omega) d^3k, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\hat{E}_z m_z(\mathbf{r}, \omega) = \omega m_z(\mathbf{r}, \omega), \quad (6)$$

где  $H^{(\text{mag})} = |\mathbf{H} + \mathbf{H}^{(\text{dip})}|$  — сумма внешнего магнитного поля и дипольного магнитного поля, действующего на спин  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ ,  $V_b = (2\pi)^3/V_a$ ,  $\alpha = wV_a/4\pi(g\mu_B)^2$  — обменная константа и  $w$  — коэффициент в разложении Фурье обменного взаимодействия вблизи локального минимума энергии:  $\tilde{I}^{(0)}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{r}} I^{(0)}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) = \tilde{I}^{(0)}(0) - wk^2$ .

Уравнение Ландау-Лифшица (4) рассматривается в линейном приближении относительно  $B^{[1]}(p)/B(p)$ , вследствие чего в операторе  $\hat{E}_z$  (6) мы оставили основной член  $\omega$  и опустили член, пропорциональный  $B^{[1]}(p)$ . Для упрощения обозначений будем записывать уравнения Ландау-Лифшица (3), (4) в локальном базисе в форме

$$m_v(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\chi}_{v\mu}^{(\text{loc})} h_{\mu}(\mathbf{r}, \omega),$$

где  $\hat{\chi}^{(\text{loc})} = \|\hat{\chi}_{v\mu}^{(\text{loc})}\|$  — псевдодифференциальный тензорный оператор. Если длина спиновой волны  $\lambda$  много больше расстояния между частицами, то операторы

Ландау-Лифшица  $\hat{E}_{\pm}$  переходят из псевдодифференциальной формы в дифференциальную. В этом случае после преобразования Фурье по  $\omega$  и перехода к временной переменной  $t$  уравнение (3) принимает обычный дифференциальный вид уравнений Ландау-Лифшица [26]. Их линейаризованная форма получается из

$$\frac{\partial (M\mathbf{i}_z + \mathbf{m})}{\partial t} = \gamma [\{ (H^{(\text{mag})} + 4\pi\alpha M\Delta)\mathbf{i}_z + \mathbf{h} \} \times (M\mathbf{i}_z + \mathbf{m})],$$

где  $\mathbf{i}_z$  — единичный вектор по оси  $z'$ . Граничные условия для дифференциального вида уравнений Ландау-Лифшица получаются из требования существования обратного оператора  $\hat{E}_{\pm}^{-1}$  или, что эквивалентно, требования ортогональности решений к пространству собственных функций оператора  $\hat{E}_{\pm}$  с нулевыми собственными значениями,  $\text{Ker } \hat{E}_{\pm}$  [14].

Рассмотрим случай, когда в модели, описываемой уравнениями Ландау-Лифшица (3), (4), случайными величинами являются ориентации спинов. Тогда для нахождения тензора магнитной восприимчивости мы должны произвести преобразование от локальных базисов  $(x', y', z')$ , связанных со спинами, к глобальному базису  $(x, y, z)$  (рис. 1) и усреднить псевдодифференциальный тензорный оператор  $\hat{\chi}_{v\mu}^{(\text{loc})}$  по углам  $\theta, \psi, \phi$ . Усреднение производится по малому объему  $\delta V$  неупорядоченной системы. Объем  $\delta V \gg V_a$  должен содержать достаточно большое количество спинов, но его размер должен быть существенно меньше объема образца. Матрица перехода  $U$  между базисами  $(x', y', z')$  и  $(x, y, z)$  выражается через углы Эйлера  $\theta, \psi$  и  $\phi$  [27]. Без потери общности угол Эйлера  $\phi$  мы можем положить равным нулю. Тогда в глобальном базисе  $(x, y, z)$  усредненный тензорный оператор  $\hat{\chi}_{ij}^{(av)}$ , который определяет соотношение между  $m_i$  и  $h_j$ ,  $m_i(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\chi}_{ij}^{(av)} h_j(\mathbf{r}, \omega)$ , имеет вид

$$\hat{\chi}_{ij}^{(av)} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} U_{iv}^{-1} \hat{\chi}_{v\mu}^{(\text{loc})} U_{\mu j} g(\theta, \psi) \sin \theta d\theta d\psi, \quad (7)$$

где индексы  $i, j$  принадлежат  $(x, y, z)$ , индексы  $v, \mu$  принадлежат  $(x', y', z')$  и  $g(\theta, \psi) = f(\theta)\rho(\psi)$  является функцией распределения в объеме  $\delta V$ . Углы  $\theta, \psi$  будем полагать независимыми случайными величинами. Распределения нормализованы соотношениями

$$\int_0^{\pi} f(\theta) \sin \theta d\theta = 1,$$

$$\int_0^{2\pi} \rho(\psi) d\psi = 1.$$

Рассмотрим случай, когда угол  $\psi$  является случайной переменной с распределением  $\rho(\psi) = (2\pi)^{-1}$ . Тогда,

исходя из уравнений (3), (4) с операторами Ландау–Лифшица (5), (6), учитывая известную зависимость матрицы перехода  $U$  от углов Эйлера [27]

$$U = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

и интегрируя по  $\psi$  в соотношении (7), получим усредненный тензорный оператор — тензор магнитной восприимчивости неупорядоченной системы

$$\hat{\chi}^{(av)} = \begin{pmatrix} F\xi + D\eta & G\xi & 0 \\ -G\xi & F\xi + D\eta & 0 \\ 0 & 0 & 2F\eta + D(1 - 2\eta) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где

$$F = -\frac{1}{2}\gamma(\hat{E}_+^{-1} + \hat{E}_-^{-1})M(\mathbf{r}),$$

$$G = \frac{i}{2}\gamma(\hat{E}_+^{-1} - \hat{E}_-^{-1})M(\mathbf{r}),$$

$$D = \gamma\hat{E}_z^{-1} \frac{B^{[1]}(p)}{B(p)} M(\mathbf{r})$$

с параметрами разупорядоченности спинов

$$\xi = \frac{1}{2} \int_0^\pi f(\theta)(1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta,$$

$$\eta = 1 - \xi,$$

$$\xi = \int_0^\pi f(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

Параметр  $\xi$  есть сумма нулевого момента, который определяется условием нормировки распределения  $f(\theta)$ , и второго начального момента случайной величины  $\cos \theta$  [28]. Параметр  $\xi$  представляет собой первый момент данной случайной величины (математическое ожидание). При ферромагнитном упорядочивании параметры порядка  $\xi = \xi = 1$ , при полной разориентации спинов  $\xi = 0$ ,  $\xi = 2/3$ . Полюса тензора магнитной восприимчивости  $\hat{\chi}^{(av)}$  определяют дисперсионные соотношения спиновых волн с длиной волны  $\lambda \gg (\delta V)^{1/3}$ . В этих дисперсионных соотношениях не учитываются собственные переменные магнитные и электрические поля спиновой волны, которые существенно изменяют ее дисперсионные характеристики. Учет переменных полей будет произведен в разделе 3. Следует заметить, что в приближении ЭФГВ среднее значение плотности магнитного момента дается выражением

$$M^{(av)}(\mathbf{r}) = M(\mathbf{r})\xi, \quad (9)$$

где в функции плотности момента  $M^{(av)}(\mathbf{r})$  вектор  $\mathbf{r}$  является центром малого объема усреднения  $\delta V$ . Магнитный момент ориентирован по оси  $Oz$ . При полной разориентации спинов параметры порядка  $\xi = 0$ ,  $\xi = 2/3$

и, следовательно,  $M^{(av)}(\mathbf{r}) = 0$ . При полной разупорядоченности спинов при нулевой средней намагниченности образца акустическая ветвь пропадает. В то же время тензор магнитной восприимчивости  $\hat{\chi}^{(av)}$  (8) принимает диагональный вид и не стремится к нулю.

Следует заметить, что тензор магнитной восприимчивости  $\hat{\chi}^{(av)}$  (8) и плотность магнитного момента  $M^{(av)}$  (9) получены усреднением по бесконечному числу спинов. Конечность объема ячейки усреднения  $\delta V$  приводит к погрешности рассматриваемого метода, определяя условия его применимости. Погрешность  $\delta$  дается отношением среднего квадратичного отклонения вектора плотности магнитного момента  $\sigma(\mathbf{M})$  ячейки  $\delta V$  к плотности магнитного момента, определяемой усреднением по атомному объему  $M$ , и состоит из суммы продольного  $M_z$  и поперечного  $M_\perp$  отклонений. Эти отклонения выражаются через квадратичные отклонения углов  $\theta$  и  $\psi$ :  $M_z \propto \sigma(\cos \theta)$  и  $M_\perp \propto \sigma(\sin \theta)\sigma(\sin \psi)$  и приводят к

$$\delta = \frac{\sigma(\mathbf{M})}{NM} = \frac{1}{N} [\sigma^2(\cos \theta) + \sigma^2(\sin \theta)\sigma^2(\sin \psi)]^{1/2},$$

где  $N$  — количество спинов в ячейке  $\delta V$ . При  $N \rightarrow \infty$  вследствие закона больших чисел погрешность  $\delta \rightarrow 0$  [28]. Учитывая, что квадратичное отклонение случайной величины  $A$  выражается через дисперсию

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \mathcal{D}(A)^{1/2} \\ &= \left[ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (A^2 - \langle A \rangle^2) g(\theta, \psi) \sin \theta d\theta d\psi \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

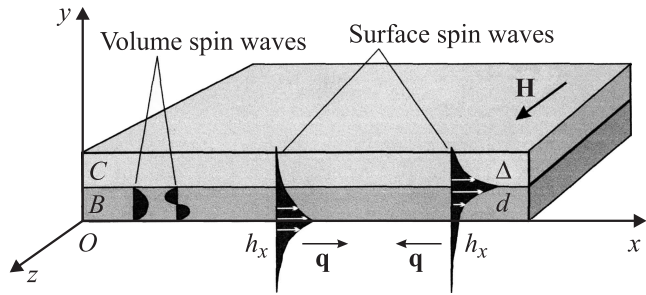
получаем окончательное выражение  $\delta$  через параметры разупорядоченности спинов

$$\delta = \frac{(\xi - \xi^2)^{1/2}}{N}.$$

В частном случае ферромагнитного порядка  $\delta = 0$  и рассматриваемая модель применима для спиновых волн со сколь угодно малой длиной волны.

### 3. Дисперсионные зависимости спиновых возбуждений с учетом собственных переменных электромагнитных полей

Переменное электромагнитное поле, возбуждаемое спиновой волной, существенно изменяет дисперсионные кривые спиновых возбуждений акустической ветви. Акустическая ветвь спиновых волн разбивается на моды, и дисперсионные кривые становятся зависящими от формы образца. В связи с этим рассмотрим спиновые волны в структуре, имеющей определенную форму. Выведем уравнения, описывающие электромагнитное поле



**Рис. 2.** Геометрия гетероструктуры, состоящей из двух пленок  $B$  и  $C$  и содержащей неупорядоченные магнитные наночастицы.  $\mathbf{q}$  — волновой вектор спиновой волны.  $h_x$  — распределение переменного магнитного поля.

спиновой волны, распространяющейся в гетероструктуре, состоящей из двух пленок  $B$  и  $C$ , одна из которых содержит неупорядоченные магнитные наночастицы (рис. 2). Будем полагать, что внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}$  касательно к структуре, спиновая волна распространяется в пленке  $B$  вдоль оси  $Ox$  и волновой вектор  $\mathbf{q}$  спиновой волны ортогонален полю  $\mathbf{H}$  (геометрия Деймона–Эшбаха, или DE-геометрия). Будем рассматривать спиновые волны, длина волны которых много больше расстояний между наночастицами и их размеров. Это дает основание использовать усредненный тензор магнитной восприимчивости (8). В первом варианте пленкой  $B$  может быть исследуемый гранулированный объект. Переменное магнитное поле спиновой волны взаимодействует с пленкой  $C$  толщиной  $\Delta$ . Во втором случае пленкой  $B$  является пленка YIG в структуре исследуемый объект (пленка  $C$ )/пленка YIG. Будем полагать, что пленки  $B$  и  $C$  являются проводящими и имеют неоднородные по толщине магнитные и электрические характеристики. Поскольку энергия спиновой волны и энергия электронов, возбуждаемых индуцируемыми вихревыми токами, малы, мы можем пренебречь квантовыми эффектами и рассматривать переменное электромагнитное поле спиновой волны в классическом приближении, которое описывается уравнением Максвелла [29]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{e} &= -\frac{\partial \mathbf{b}}{c \partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{b} &= 0, \\ \operatorname{div}(\varepsilon(y) \mathbf{e}) &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{h} &= \frac{4\pi\sigma(y) \mathbf{e}}{c} + \frac{\partial(\varepsilon(y) \mathbf{r})}{c \partial t}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\mathbf{h} = \mathbf{h}(y) \exp(i\omega t + iqx)$  — переменное магнитное поле спиновой волны,  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(y) \exp(i\omega t + iqx)$  — переменная часть индукции,  $\mathbf{e} = \mathbf{e}(y) \exp(i\omega t + iqx)$  — переменное электрическое поле, которое индуцируется переменным полем  $\mathbf{h}$ ,  $\omega$  — круговая частота,  $\varepsilon(y)$  — диэлектрическая проницаемость гетероструктуры, являющаяся функцией от  $y$ ,  $\sigma(y)$  — проводимость,  $c$  — скорость света. Индукция  $\mathbf{b}$  связана с полем  $\mathbf{h}$  соотношением  $\mathbf{b} = \hat{\mu} \mathbf{h}$ ,

где  $\hat{\mu} = \|\hat{\mu}_{ij}\| = \|\delta_{ij} + 4\pi\hat{\chi}_{ij}^{(B,C)}\|$  — тензор магнитной проницаемости структуры, который выражается через тензоры магнитной восприимчивости  $\hat{\chi}^{(B,C)}$  пленок  $B$  и  $C$ . Тензоры  $\hat{\chi}^{(B,C)}$  даются соотношением (8) и являются тензорными псевдодифференциальными операторами.

Если  $\sigma = \varepsilon = 0$ , то из последнего уравнения (10) следует, что  $\mathbf{h} = -\nabla\varphi$ , где  $\varphi$  — магнитоэлектрический потенциал. В этом случае спиновые волны носят название магнитоэлектрических спиновых волн [26,30,31].

После подстановки Фурье-компонент переменного магнитного поля, индукции и переменного электрического поля в уравнения (10) получим уравнения, описывающие магнитное поле поперечных и продольных колебаний спиновых возмущений

$$q^2 h_z + \kappa \left[ -b_z + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial h_z}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} q\mu_{xx} h_x - i \frac{\partial \mu_{yx} h_x}{\partial y} \\ - i q \mu_{xy} (q^2 + \kappa \mu_{yy})^{-1} \left( q \frac{\partial h_x}{\partial y} - i \kappa \mu_{yx} h_x \right) \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_{yy} (q^2 + \kappa \mu_{yy})^{-1} \left( q \frac{\partial h_x}{\partial y} - i \kappa \mu_{yx} h_x \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\kappa(y) = \omega[4\pi i \sigma(y) - \varepsilon(y)\omega]/c^2$ ,  $h_y = -i(q^2 + \kappa \mu_{yy})^{-1} \times [q(\partial h_x / \partial y) - i \kappa \mu_{yx} h_x]$ . Компоненты электрического поля выражаются через магнитное поле с помощью соотношений

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{-i\omega}{c\kappa} \frac{\partial h_z}{\partial y}, \\ e_y &= \frac{\omega}{cq} b_z - \frac{\omega}{c\kappa q} \frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2}, \\ e_z &= \frac{-\omega}{cq} b_y. \end{aligned}$$

Уравнение (11) описывает переменное поле  $h_z$ , связанное с продольными колебаниями намагниченности  $m_z$ . Уравнение (12) определяет поле  $h_x$  поперечных колебаний намагниченности  $m_x, m_y$ .

Получим в общем виде дисперсионные соотношения спиновых волн, описываемых уравнением (12). К уравнению (12) необходимо добавить граничные условия, проистекающие из непрерывности  $h_x$  и нормальной составляющей индукции  $b_y$

$$h_x(y)|_{+\partial} = h_x(y)|_{-\partial},$$

$$\mu_{yx} h_x(y) + \mu_{yy} h_y(y)|_{+\partial} = \mu_{yx} h_x(y) + \mu_{yy} h_y(y)|_{-\partial}, \quad (13)$$

где  $\partial$  — обозначение границы (знаки плюс и минус указывают на противоположные стороны границы).

Уравнение (12) с граничными условиями (13), описывающее поперечные колебания, имеет решения в виде объемных и поверхностных мод (рис. 2). Объемные моды вырождаются при обменной константе  $\alpha = 0$

и  $\kappa = 0$ . Поверхностные моды более пригодны для спин-волновой спектроскопии, так как дисперсионные ветви этих мод более чувствительны к изменениям магнитных и электрических параметров пленочной структуры. Найдём дисперсионные зависимости поверхностной спиновой волны. Будем искать решение в виде

$$h_x(y) = \begin{cases} A \exp(|q|y), & y \leq 0, \\ B_1 \psi_1^{(B)}(y) + B_2 \psi_2^{(B)}(y), & y \in [0, d], \\ C_1 \psi_1^{(C)}(y) + C_2 \psi_2^{(C)}(y), & y \in [d, d + \Delta], \\ D \exp(-|q|y), & y \geq d + \Delta, \end{cases} \quad (14)$$

где  $\psi_i^{(B)}(y), \psi_i^{(C)}(y)$  — собственные функции уравнения (12) в слоях  $B$  и  $C$  соответственно. Сшивая решения на границах, получим дисперсионное соотношение

$$\frac{W_1^{(B)}(\omega, q)}{W_2^{(B)}(\omega, q)} = \frac{W_1^{(C)}(\omega, q)}{W_2^{(C)}(\omega, q)}, \quad (15)$$

где

$$W_1^{(B)}(\omega, q) = \psi_1^{(B)}(d)[ivq^2 f^{(A)}(0)\psi_2^{(B)}(0) + \Upsilon_2^{(B)}(0)] - \psi_2^{(B)}(d)[ivq^2 f^{(A)}(0)\psi_1^{(B)}(0) + \Upsilon_1^{(B)}(0)],$$

$$W_2^{(B)}(\omega, q) = \Upsilon_1^{(B)}(d)[ivq^2 f^{(A)}(0)\psi_2^{(B)}(0) + \Upsilon_2^{(B)}(0)] - \Upsilon_2^{(B)}(d)[ivq^2 f^{(A)}(0)\psi_1^{(B)}(0) + \Upsilon_1^{(B)}(0)],$$

$$W_1^{(C)}(\omega, q) = \psi_1^{(C)}(d)[-ivq^2 f^{(D)}(d + \Delta)\psi_2^{(C)}(d + \Delta) + \Upsilon_2^{(C)}(d + \Delta)] - \psi_2^{(C)}(d)[-ivq^2 f^{(D)}(d + \Delta)\psi_1^{(C)}(d + \Delta) + \Upsilon_1^{(C)}(d + \Delta)],$$

$$W_2^{(C)}(\omega, q) = \Upsilon_1^{(C)}(d)[-ivq^2 f^{(D)}(d + \Delta)\psi_2^{(C)}(d + \Delta) + \Upsilon_2^{(C)}(d + \Delta)] - \Upsilon_2^{(C)}(d)[-ivq^2 f^{(D)}(d + \Delta)\psi_1^{(C)}(d + \Delta) + \Upsilon_1^{(C)}(d + \Delta)],$$

$$\Upsilon_j^{(I)}(y) = \mu_{yx}^{(I)}(y)\psi_j^{(I)}(y) - f^{(I)}(y)[iq(\partial\psi_j^{(I)}(y)/\partial y)$$

$$+ \kappa\mu_{yx}^{(I)}(y)\psi_j^{(I)}(y)] \quad (I = B, C),$$

$$f^{(I)}(y) = \mu_{yy}^{(I)}(y)[q^2 + \kappa\mu_{yy}^{(I)}(y)]^{-1}, \quad v = \frac{q}{|q|} = \text{sign } q.$$

Индекс  $I = A, B, C, D$  в  $f^{(I)}(y)$  указывает на область  $y \leq 0$  (для  $A$ ),  $y \geq d + \Delta$  (для  $D$ ) и пленки  $B$  или  $C$ . Так как для свободного пространства  $\mu_{yy} = 1$ ,  $\sigma = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ , то  $f^{(A)}(y) = f^{(D)}(y) = (q^2 - \omega^2/c^2)^{-1} \approx q^{-2}$ . Функции  $W_j^{(I)}(\omega, q)$  зависят от частоты  $\omega$  неявно через операторы Ландау–Лифшица (5), (6), которые в свою очередь входят в тензор магнитной восприимчивости  $\hat{\chi}^{(av)}$  (8). Если один из слоев (например, слой  $C$ )

является немагнитным и для него  $\kappa = 0$ , то в дисперсионном соотношении (15)  $W_1^{(C)}(\omega, q)/W_2^{(C)}(\omega, q) = -i$  и соотношение (15) описывает дисперсию поверхностных спиновых волн в одиночной пленке.

Дисперсионное соотношение (15) получено в общем случае. Рассмотрим два варианта структуры  $BC$ . Если структура состоит из исследуемой гранулированной пленки с наночастицами  $C$  и однородной пленки  $YIG$  (пленка  $B$ ), в которой поверхностная мода спиновой волны распространяется по пленке  $YIG$ , то возможно упрощение функций  $W_j^{(B)}(\omega, q)$ . Для пленки  $YIG$  в магнитостатическом приближении (при  $q \gg \omega/c$ )  $\kappa = 0$  и при нулевой обменной константе  $\alpha = 0$  тензор магнитной восприимчивости (8) имеет вид

$$\hat{\chi} = \frac{\gamma M}{\Omega_H^2 - \omega^2} \begin{pmatrix} \Omega_H & i\omega & 0 \\ -i\omega & \Omega_H & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\Omega_H = \gamma H$ . Уравнение (12) для поверхностной спиновой волны в пленке  $YIG$  сводится к уравнению

$$q^2 h_x - \frac{\partial^2 h_x}{\partial y^2} = 0,$$

собственными функциями которого являются  $\psi_{1,2}^{(B)}(y) = \exp(\pm qy)$ . В зависимости от направления распространения  $v$  волна прижимается к той или иной поверхности, т.е. около этой поверхности наблюдаются наибольшие изменения намагниченности и магнитного поля. При отсутствии второй пленки  $C$  получаются общеизвестные дисперсионные соотношения поверхностной спиновой волны, распространяющейся в однородной пленке [26,30,31]

$$\omega^2 = \Omega_{\parallel}^2 + \Omega_M^2 [1 - \exp(-2qd)]/4, \quad (16)$$

где  $\Omega_M = \gamma 4\pi M$ ,  $\Omega_{\parallel}^2 = \Omega_H(\Omega_H + \Omega_M)$ . В этом случае дисперсионные кривые двух ветвей поверхностных спиновых волн, распространяющихся вдоль разных поверхностей пленки, совпадают.

Во втором случае поверхностная мода спиновой волны распространяется в гранулированной пленке  $B$ , содержащей наночастицы с разупорядоченными спинами. Если рядом с пленкой  $B$  (рис. 2), в которой возбуждается спиновая волна, расположен слой  $C$ , который обладает проводимостью или отличными от пленки  $B$  магнитными характеристиками, то две ветви поверхностных спиновых волн, распространяющихся в противоположных направлениях и соответственно вблизи разных поверхностей, имеют разную форму дисперсионных кривых. К разным изменениям двух ветвей дисперсионных зависимостей приводит также неоднородность магнитных параметров и проводимости самой пленки  $B$  по толщине и разная разупорядоченность спинов  $\xi, \xi'$  вблизи противоположных поверхностей.

С увеличением неоднородности растет отличие дисперсионных кривых друг от друга. Подробное рассмотрение изменений дисперсионных зависимостей спиновых волн проведено в [32]. Найдено, что главными факторами, влияющими на форму дисперсионных характеристик спиновых волн в пленке  $B$ , являются: 1) проводимость и магнитные характеристики слоя  $C$  около пленки  $B$ ; 2) неоднородность магнитных параметров и разупорядоченность спинов  $\xi, \zeta$  пленки  $B$ . В меньшей степени на форму дисперсионных кривых влияет проводимость пленки  $B$ . Влияние диэлектрической проницаемости начинает сказываться только при больших значениях  $\epsilon$  ( $> 10^4$ ). Перечисленные выше факторы по-разному влияют на форму дисперсионных кривых.

1) Увеличение разупорядоченности спинов (уменьшение параметров  $\xi, \zeta$ ) проявляется в том, что наклон дисперсионной кривой понижается. При больших значениях разупорядоченности наклон дисперсионной кривой меняет знак и становится отрицательным.

2) Влияние проводимости пленки  $B$  заключается в образовании максимума на дисперсионной кривой  $\omega(q)$  при  $qd = 1$  для волн, распространяющихся как в прямом, так и в обратном направлении.

3) Наличие проводящего слоя около одной из поверхностей пленки  $B$  приводит к появлению максимума на кривой  $\omega(q)$  при  $qd = 1$  только для волны, распространяющейся вдоль интерфейса пленка/проводящий слой.

4) Влияние неоднородности намагнитченности или параметров разупорядоченности спинов  $\xi, \zeta$  по толщине пленки сказывается в том, что дисперсионные кривые спиновых волн, распространяющихся вдоль разных поверхностей, будут отличаться друг от друга. При этом их асимптотические значения при  $q \rightarrow \infty$  определяются намагнитченностью и факторами  $\xi, \zeta$ , соответствующими данной поверхности пленки.

Таким образом, анализ главных факторов, влияющих на дисперсию спиновых волн, показал, что они по-разному изменяют форму дисперсионных кривых спиновых волн и приводят к различию двух ветвей поверхностных волн, что дает возможность определения магнитных и электрических характеристик магнитных наноструктур.

#### 4. Определение магнитных и электрических характеристик магнитных наноструктур из дисперсионных кривых спиновых волн

Применим теоретическую модель, развитую для общего случая, к определению характеристик магнитных наноструктур, состоящих из однородного проводящего слоя  $C$  и магнитной пленки  $B$ , в которой распространяется спиновая волна (рис. 2). Пленка  $B$  неоднородна по толщине  $d$  и содержит магнитные наночастицы с некоторой степенью разупорядоченности спинов. Решим

обратную задачу — найдем профили магнитных и электрических параметров по толщине из дисперсионных кривых поверхностных спиновых волн. Эта задача не может быть решена аналитически точно, так как решение уравнения (12) не выражается через аналитические функции при произвольном профиле параметров по толщине. Более того, численное решение этой задачи может быть произведено только приближенно, что связано с ограниченным интервалом определения волнового вектора  $q$ . Оценим степень приближения решения обратной задачи, связанную с ограниченным интервалом определения  $q$ .

Магнитное поле поверхностной волны (14), распространяющейся в пленке  $B$ , спадает экспоненциально от поверхности с характерным масштабом  $q^{-1}$ . Волна чувствует неоднородность (как продольного, так и поперечного типа) в наибольшей степени, если размер неоднородности магнитных и электрических параметров  $l \approx 2\pi/q$ . На дисперсионной кривой область  $\omega(q)$  с  $q \approx 2\pi/l$  подвергается наибольшим изменениям. Если дисперсионная кривая определена на участке  $[0, q^{(\max)}]$ , то мы можем найти профиль функций параметров по толщине с точностью до  $2\pi/q^{(\max)}$ . Так как разложение функции в ряд Тейлора до члена со степенью  $n$  на отрезке  $[0, d]$  позволяет описать неоднородности функции, имеющие размер порядка  $d/n$ , при вычислении магнитных и электрических характеристик по толщине пленки  $d$  можно ограничиться членами разложения до степени  $n = q^{(\max)}d/2\pi$ . Чем шире интервал измерения дисперсионной кривой  $[0, q^{(\max)}]$ , тем более тонкую структуру можно определить из дисперсионных соотношений спиновых волн. При этом следует учесть, что  $q^{(\max)}$  должно быть связано с выбором объема усреднения  $\delta V$  в (8) неравенством  $(\delta V)^{1/3} \ll 2\pi/q^{(\max)}$ .

В связи с этим проведем разложение функций проводимости  $\sigma^{(B)}$ , параметров порядка  $\xi, \zeta$  и обменной константы  $\alpha$  пленки  $B$ , имеющих наибольшее влияние на дисперсионную кривую, в ряд Тейлора

$$\begin{aligned}\sigma^{(B)}(y) &= \sum_{j=0} \frac{1}{j!} \sigma_j^{(B)} y^j, \\ \xi(y) &= \sum_{j=0} \frac{1}{j!} \xi_j y^j, \\ \zeta(y) &= \sum_{j=0} \frac{1}{j!} \zeta_j y^j, \\ \alpha(y) &= \sum_{j=0} \frac{1}{j!} \alpha_j y^j.\end{aligned}\quad (17)$$

Проблема вычислительной устойчивости численного решения обратных задач [16,17], а также экспериментальные погрешности и существование интервала определения  $q$  вынуждают нас ограничиться первыми членами рядов Тейлора (17). Для нахождения дисперсионных зависимостей (15) необходимо найти функции



$\psi_i^{(B)}(y)$  (14). Найдем  $\psi_i^{(B)}(y)$  с помощью теории возмущений. Для этого запишем уравнение (12) в матричной форме для полей  $h_x, h_y$

$$\hat{T} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iq\mu_{xx} + \mu'_{yx} + \mu_{yx} \frac{\partial}{\partial y} & iq\mu_{xy} + \mu'_{yy} + \mu_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{-i}{q} (\kappa\mu_{yx} + iq \frac{\partial}{\partial y}) & \frac{-i}{q} (q^2 + \kappa\mu_{yy}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) и эквивалентное ему уравнение (12) имеют точное решение при  $\sigma_0^{(C)} \neq 0$ ,  $\sigma^{(B)} = 0$ ,  $\kappa^{(B)} = 0$ ,  $\xi(y) = \xi_0 - \xi_1 y$ ,  $\zeta(y) = \zeta_0 - \zeta_1 y$ ,  $\alpha(y) = 0$  и  $B^{[1]}(p) = D = 0$  в  $\hat{\chi}^{(av)}$  (8). При этом, согласно соотношению (8),  $x, y$ -компоненты тензора магнитной проницаемости  $\hat{\mu} = 1 + 4\pi\hat{\chi}^{(av)}$  в пленке  $B$ , входящие в уравнение (12), при  $\alpha(y) = 0$  являются числами и имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_{yy}^{(0)} = \mu_{xx}^{(0)} &= 1 + \frac{\Omega_H \Omega_M \xi(y)}{\Omega_H^2 - \omega^2}, \\ \mu_{yx}^{(0)} = -\mu_{xy}^{(0)} &= \frac{i\omega \Omega_M \xi(y)}{\Omega_H^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для пленки  $C$   $\mu_{ij} = \delta_{ij}$ . Собственными функциями (14) уравнения (12) являются: в пленке  $B$

$$\bar{\psi}_1^{(B)}(y) = \exp(-qy)G(\bar{\alpha}, 1, 2q(y - y_0)),$$

$$\bar{\psi}_2^{(B)}(y) = \exp(qy)G(1 - \bar{\alpha}, 1, -2q(y - y_0)), \quad (20)$$

в пленке  $C$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1^{(C)}(y) &= \exp(Qy), \\ \bar{\psi}_2^{(C)}(y) &= \exp(-Qy), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $G$  — вырожденная гипергеометрическая функция второго рода (функция Куммера) [33,34],

$$\bar{\alpha} = \frac{\Omega_H \xi_1 - \omega \xi_1}{2\Omega_H \xi_1},$$

$$y_0 = \frac{\Omega_H^2 + \Omega_H \Omega_M \xi_0 - \omega^2}{\Omega_H \Omega_M \xi_1},$$

$$Q = (q^2 + \kappa^{(C)})^{1/2} = \left( q^2 + \frac{4\pi i \omega \sigma_0^{(C)}}{c^2} \right)^{1/2}.$$

Подставляя (20), (21) и дисперсионное соотношение (15), получаем соотношение, зависящее от параметров  $\omega, q, d, \Delta, \sigma_0^{(C)}, \Omega_M, \xi_0, \xi_1, \zeta_0, \zeta_1$ . Коэффициенты разложения ряда Тейлора (17) более высокого порядка в дисперсионных соотношениях учитываются методом теории возмущений относительно точных решений (20), (21). Для этого перепишем уравнения (18) в форме

$$(\hat{T}^{(0)} + \delta\hat{T}) \begin{pmatrix} h_x^{(0)} + \delta h_x \\ h_y^{(0)} + \delta h_y \end{pmatrix} = 0,$$

где тензорный оператор  $\hat{T}^{(0)}$  определяется магнитной проницаемостью (19) в пленке  $B$  и соотношением  $\mu_{ij} = \delta_{ij}$  в пленке  $C$ , а  $h_j^{(0)}$  — собственными функциями (20), (21). Тогда в первом приближении

$$\delta h_j = -\hat{T}_{jk}^{(0)-1} \delta \hat{T}_{km} h_m^{(0)}. \quad (22)$$

Обратный оператор  $\hat{T}^{(0)-1}$  находится из решения соответствующей задачи Штурма–Лиувилля [35]. Компоненты  $xx$  и  $xy$  оператора  $\hat{T}^{(0)-1}$ , действующие на функцию  $f(\bar{y})$  и необходимые для дальнейших расчетов, имеют вид

$$\hat{T}_{xx}^{(0)-1} f(y) = iq \int_0^d J(y, \bar{y}) f(\bar{y}) d\bar{y},$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_{xy}^{(0)-1} f(y) &= \int_0^d J(y, \bar{y}) \\ &\times \left[ iq\mu_{xy}^{(0)}(\bar{y}) f(\bar{y}) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\mu_{yy}^{(0)}(\bar{y}) f(\bar{y})) \right] d\bar{y}, \end{aligned}$$

$$J(y, \bar{y}) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mu_{yy}^{(0)}(0) [\bar{\psi}_1^{(B)}(0) (\partial \bar{\psi}_2^{(B)}(0) / \partial y) - (\partial \bar{\psi}_1^{(B)}(0) / \partial y) \bar{\psi}_2^{(B)}(0)]} \\ &\times \begin{cases} \bar{\psi}_1^{(B)}(y) \bar{\psi}_2^{(B)}(\bar{y}), & 0 \leq y \leq \bar{y}, \\ \bar{\psi}_2^{(B)}(y) \bar{\psi}_1^{(B)}(\bar{y}), & \bar{y} \leq y \leq d. \end{cases} \end{aligned}$$

Тензорный оператор  $\delta\hat{T}$  в общем случае (при  $\alpha \neq 0$ ) является псевдодифференциальным оператором. С учетом соотношения (20) собственными функциями уравнения (12) в пленке  $B$  в приближении (22) будут

$$\psi_{1,2}^{(B)}(y) = \bar{\psi}_{1,2}^{(B)}(y) - \sum_k T_{xk}^{(0)-1} \left( \delta T_{kx} - \frac{i}{q} \delta T_{ky} \frac{\partial}{\partial y} \right) \bar{\psi}_{1,2}^{(B)}(y). \quad (23)$$

Подставляя функции  $\psi_{1,2}^{(B)}(y)$  (23) в дисперсионные соотношения (15), получим соотношения, зависящие от группы параметров  $\{p\}$ , в которую входят некоторые коэффициенты разложения (17). Приближенное решение обратной задачи сводится к нахождению тех параметров  $\{p\}$ , при которых дисперсионная зависимость (15) наилучшим образом аппроксимирует экспериментально полученную дисперсионную кривую. Для этого введем функционал расхождения

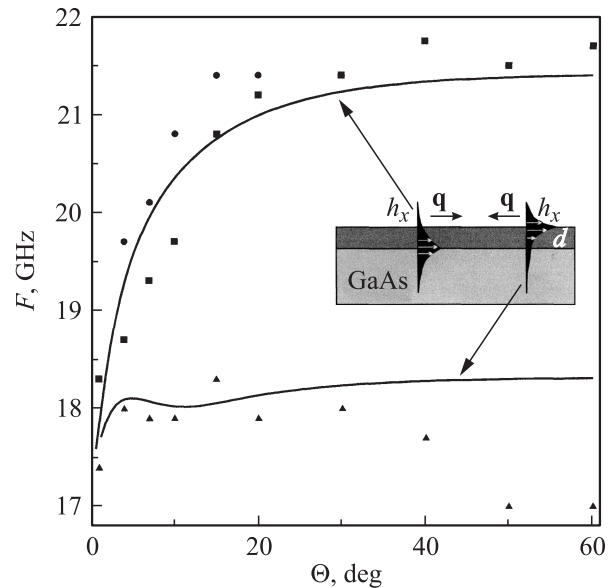
$$S[\{p\}] = \sum_j^N [\omega^{(\text{exp})}(q_j) - \omega^{(\text{teor})}(q_j, \{p\})]^2, \quad (24)$$

где  $N$  — количество точек экспериментальной кривой,  $\omega^{(\text{exp})}(q_j)$ ,  $\omega^{(\text{teor})}(q_j, \{p\})$  — экспериментальная и теоретическая дисперсионные зависимости соответственно. Наилучшим приближением будет то, которому отвечает минимум  $S[\{p\}]$  в пространстве параметров  $\{p\}$ .

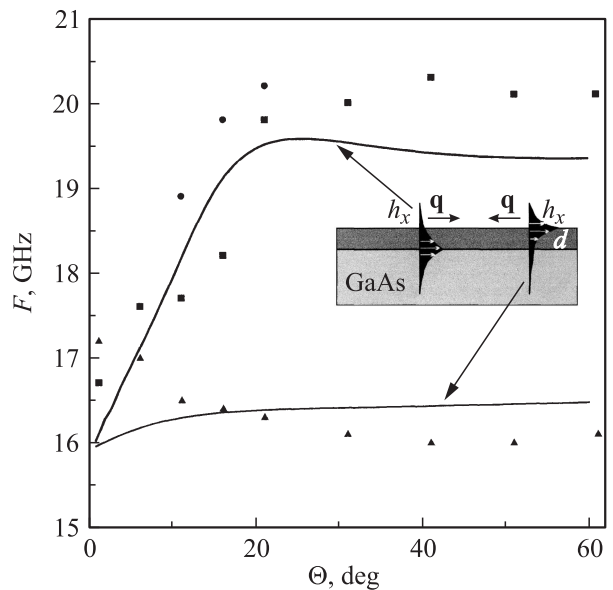
## 5. Определение параметров гетероструктур $\text{SiO}_2(\text{Co})/\text{GaAs}$

Методика определения параметров магнитных пленочных структур из дисперсионных кривых поверхностных спиновых волн, развитая в рамках метода спин-волновой спектроскопии в разделе 4, может быть применена к анализу экспериментально полученных дисперсионных кривых спиновых волн. В качестве примера применения развитой теоретической модели к эксперименту использованы результаты исследования спиновых волн методом бриллюэновского рассеяния [7–9]. Эксперименты проводились на пленках аморфной двуокиси кремния с наночастицами кобальта на арсенид-галлиевой подложке  $(\text{SiO}_2)_{100-x}\text{Co}_x/\text{GaAs}$  (или сокращенно  $\text{SiO}_2(\text{Co})/\text{GaAs}$ ), где  $x$  — содержание Co в атомных процентах. Подложки  $n$ -GaAs толщиной 0.4 mm имели ориентацию (100) и концентрацию носителей  $10^{15} \text{ cm}^{-3}$ . Средний размер частиц Co в пленке  $\text{SiO}_2$  увеличивался с ростом  $x$ : от 2.7 nm при  $x = 39 \text{ at.}\%$  до 4.3 nm при  $x = 83 \text{ at.}\%$ . Пленки  $\text{SiO}_2(\text{Co})$  имели толщины от 40 до 600 nm.

Исследование бриллюэновского рассеяния проводилось в DE-геометрии, т.е. внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}$  (рис. 2) было касательно к пленке и падающий световой пучок возбуждал спиновую волну (или рассеивался на термически возбужденной спиновой волне) с волновым вектором  $\mathbf{q}$ , ортогональным полю  $\mathbf{H}$ . Использованный  $\text{Ag}^+$ -лазер имел длину световой волны  $\lambda_{\text{ph}} = 514 \text{ nm}$ . Величина волнового вектора спиновой волны  $\mathbf{q}$  определялась углом падения светового пучка  $\Theta$ :  $q = (4\pi/\lambda_{\text{ph}}) \sin \Theta$ . Дисперсионные кривые спиновых волн были получены из измерений частотных сдвигов стоксовых и антистоксовых компонент рассеяния при разных углах падения  $\Theta$ . На рис. 3, 4 приведены точки экспериментальных значений дисперсионных кривых поверхностных спиновых волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Одна кривая соответствует волне, распространяющейся вдоль свободной поверхности пленки, другая кривая — волне, распространяющейся вдоль интерфейса с GaAs. Наблюдалось значительное различие ветвей дисперсионных кривых, отличающееся от дисперсионной зависимости (16). Согласно анализу факторов, влияющих на дисперсионные кривые [32], значительное различие двух ветвей дисперсионных зависимостей поверхностных волн может обусловлено: 1) неоднородностью магнитных параметров по толщине пленки и 2) наличием проводящего слоя вблизи пленки  $\text{SiO}_2(\text{Co})$ . Так как по условиям получения пленок  $\text{SiO}_2(\text{Co})$  распределение Co по толщине пленки было равномерным, то, согласно (8), (9), неравномерность магнитных параметров связывалась с параметрами порядка  $\xi(y)$ ,  $\zeta(y)$ . Эти факторы наряду с наличием проводящего слоя являются главными, приводящими к существенно разной форме дисперсионных ветвей. Поэтому в разложении (17) были учтены коэффициенты  $\xi_0$ ,  $\xi_1$ ,  $\zeta_0$ ,  $\zeta_1$  и предполагалось наличие



**Рис. 3.** Дисперсионные кривые поверхностных спиновых волн, распространяющихся в пленке  $(\text{SiO}_2)_{100-x}\text{Co}_x$  толщиной 600 nm с концентрацией Co  $x = 83 \text{ at.}\%$ . Внешнее магнитное поле  $H = 3 \text{ kOe}$ , намагниченность насыщения  $4\pi M = 9.82 \text{ kOe}$ .  $h_x$  — профиль  $x$ -компоненты переменного магнитного поля спиновой волны,  $F$  — частота спиновой волны,  $\Theta$  — угол падения светового пучка.



**Рис. 4.** Дисперсионные кривые поверхностных спиновых волн, распространяющихся в пленке  $(\text{SiO}_2)_{100-x}\text{Co}_x$  толщиной 120 nm с концентрацией Co  $x = 80 \text{ at.}\%$ . Внешнее магнитное поле  $H = 3 \text{ kOe}$ , намагниченность насыщения  $4\pi M = 7.85 \text{ kOe}$ .

проводящего слоя (слоя C, рис. 2) вблизи интерфейса толщиной  $\Delta$  с проводимостью  $\sigma_0^{(C)}$ . Исследованные гранулированные структуры с магнитными металлическими частицами являются магнитомягкими с незна-

чительной величиной магнитной анизотропии [36,37]. Поэтому поле анизотропии в (2) полагалось равным нулю. Тем не менее сильная анизотропия, вызванная спин-орбитальным взаимодействием  $3d$ -электронов Co с электронами и дырками GaAs, может наблюдаться на интерфейсе с GaAs. Она может приводить к упорядочиванию спинов наночастиц Co вблизи интерфейса. Проводимость пленки  $\text{SiO}_2(\text{Co})$  учитывалась в нулевом приближении  $\sigma_0^{(B)}$  разложения (17). На пленках  $\text{SiO}_2(\text{Co})$  с большой концентрацией Co ( $x = 80\text{--}83 \text{ at.}\%$ ) наблюдалась тонкая структура, предположительно вызванная невырожденными спин-волновыми резонансами на обратных объемных спиновых волнах [7]. Так как снятие вырождения обратных объемных волн может быть обусловлено как обменным взаимодействием, так и проводимостью пленки  $\text{SiO}_2(\text{Co})$  [15,32], при расчете дисперсионных зависимостей поверхностных волн была учтена обменная константа  $\alpha_0$  в нулевом приближении разложения (17).

Аппроксимация экспериментальных кривых теоретическими зависимостями проводилась на основе дисперсионного соотношения (15). Искомые параметрами были  $\xi_0, \xi_1, \xi_0, \xi_1, \sigma_0^{(B)}, \alpha_0$  пленки  $\text{SiO}_2(\text{Co})$  (пленка B, рис. 2) и  $\sigma_0^{(C)}, \Delta$  проводящего слоя вблизи интерфейса (слой C). На первом этапе решалась задача нахождения минимума функционала расхождения  $S$  (24) с параметрами  $\xi_0, \xi_1, \xi_0, \xi_1, \sigma_0^{(C)}, \Delta$  с собственными функциями (20), (21). На втором этапе проводилось уточнение положения минимума при добавлении параметров  $\sigma_0^{(B)}, \alpha_0$  с собственными функциями (23). Программа расчета реализована на Fortran PowerStation 4. Процедура подгонки теоретических кривых к экспериментальным значениям показала, что пленки  $\text{SiO}_2(\text{Co})$  являются неоднородными по толщине. Для толстых пленок (рис. 3  $d = 600 \text{ nm}$ ) наилучшее соответствие получено при параметрах разориентации спинов  $\xi = 0.76, \zeta = 0.28$  около свободной поверхности и  $\xi = 0.97, \zeta = 0.92$  вблизи интерфейса с GaAs. Таким образом, спины наночастиц около свободной поверхности имеют более разупорядоченную ориентацию, чем вблизи интерфейса, где спины близки к ферромагнитному порядку. Усредненная по толщине пленки удельная проводимость  $\sigma_0^{(B)}$  меньше  $1 \cdot 10^2 (\Omega \cdot \text{cm})^{-1}$ . При выбранной процедуре подгонки наилучшее приближение получалось при обменной константе  $\alpha_0 = 0$ . Начало дисперсионных ветвей определяется слоем  $\text{SiO}_2(\text{Co})$  с максимальной намагниченностью  $4\pi M \xi(0)$ , расположенным вблизи интерфейса.

Исследование спиновых волн в тонких пленках (рис. 4,  $d = 120 \text{ nm}$ ) лучше подходит для выявления тонких слоев в самих пленках и проводящих слоев в подложке GaAs, так как нахождение изменений формы дисперсионной кривой зависит от соотношения толщин магнитной пленки и слоя. Наилучшее соответствие между теоретическими и экспериментальными значениями получено при следующих параметрах: параметры разориентации спинов около свободной поверхности

пленки  $\xi = 0.72, \zeta = 0.17$  и вблизи интерфейса  $\xi = 1.0, \zeta = 1.0$ . Удельная проводимость пленки  $\text{SiO}_2(\text{Co})$  равна  $2 \cdot 10^3 (\Omega \cdot \text{cm})^{-1}$  и проводящего слоя в GaAs вблизи интерфейса  $1.1 \cdot 10^5 (\Omega \cdot \text{cm})^{-1}$ . Толщина проводящего слоя в GaAs составляет около  $15 \text{ nm}$ .

Необходимо отметить, что в связи с проблемой вычислительной устойчивости для подгонки теоретических кривых к экспериментальным значениям использовался простейший линейный профиль изменения параметров по толщине в разложении (17). Лучшее соответствие между теоретическими и экспериментальными значениями может быть получено при более сложных функциях изменения параметров по толщине пленки. Тем не менее применение линейного профиля изменения параметров при исследовании дисперсионных кривых спиновых волн, распространяющихся в пленке  $\text{SiO}_2(\text{Co})$ , показало, что спины наночастиц Co вблизи свободной поверхности более разупорядочены, чем вблизи интерфейса. Сопоставление удельных проводимостей толстых и тонких пленок с примерно одинаковыми концентрациями Co ( $x = 83$  и  $80 \text{ at.}\%$  соответственно) привело к выводу, что тонкие пленки имеют значительно более высокую проводимость. На основе этого можно сделать заключение, что в пленке  $\text{SiO}_2(\text{Co})$  около интерфейса образуется слой с большей проводимостью, в котором спины наночастиц Co близки к ферромагнитному упорядочению. В подложке GaAs образуется проводящий слой. Причина ферромагнитного упорядочения вблизи интерфейса может быть связана с обменным взаимодействием типа RKKY между частицами Co через электроны проводимости GaAs [20,38] и со спин-орбитальным взаимодействием на интерфейсе, приводящим к анизотропии. Этот вопрос требует дополнительного исследования.

## 6. Заключение

В описываемом методе нахождения магнитных и электрических характеристик наноструктур из дисперсионных кривых спиновых волн акустической ветви (метод спинволновой спектроскопии) исследуется форма дисперсионных кривых поверхностных спиновых волн, распространяющихся в пленочных магнитных наноструктурах. Рассматриваются спиновые волны с длиной волны, много большей характерных наноструктурных размеров. Дисперсионные зависимости этих спиновых волн определяются динамикой спиновой составляющей, описываемой обобщенными уравнениями Ландау–Лифшица, и переменным электромагнитным полем, возбуждаемым спиновой волной.

Теоретическое рассмотрение и экспериментальные исследования показывают, что спин-волновая спектроскопия является эффективным средством изучения и нахождения характеристик магнитных наноструктур. Главными факторами, изменяющими форму дисперсионной

кривой, являются наличие проводимости, неоднородность магнитных параметров и разупорядоченность спинов. Эти факторы по-разному изменяют форму дисперсионной кривой, что дает возможность определения параметров магнитных наноструктур. Развитый метод нахождения параметров применен к анализу экспериментальных спин-волновых дисперсионных зависимостей структур, состоящих из пленки  $\text{SiO}_2$  с наночастицами  $\text{Co}$  на подложке  $\text{GaAs}$ . Из формы дисперсионных кривых поверхностных спиновых волн найдено, что в пленке около интерфейса спины наночастиц близки к ферромагнитному упорядочению, а около свободной поверхности их спиновая ориентация является более хаотической. Обнаружено, что в  $\text{GaAs}$  образуется проводящий слой и пленка  $\text{SiO}_2(\text{Co})$  около интерфейса имеет повышенную проводимость.

## Список литературы

- [1] Г.А. Петраковский. УФН **134**, 2, 305 (1981).
- [2] T. Kaneyoshi. Introduction to amorphous magnets. World Scientific, Singapore (1992).
- [3] The magnetism of amorphous metals and alloys / Eds J.A. Fernandez-Baca, Wai-Yim Ching. World Scientific, Singapore (1995).
- [4] R.C. O'Handley. Modern magnetic materials principles and applications. John Wiley & Sons, N.Y. (2000).
- [5] Ю.В. Гуляев, П.Е. Зильберман, Г.Т. Казаков, В.В. Тихонов. Письма в ЖТФ **11**, 2, 97 (1985).
- [6] П.Е. Зильберман, Г.Т. Казаков, В.В. Тихонов. Радиотехника и электроника **32**, 4, 710 (1987).
- [7] A.A. Stashkevich, Y. Roussigue, P. Djemia, D. Billet, A.I. Stognij, N.N. Novitskii, G.A. Wurtz, A.V. Zayats, G. Viau, G. Chaboussant, F. Ott, S. Gautrot, M.P. Kostylev, L.V. Lutsev, V. Belotelov. J. Appl. Phys. **104**, 9, 093 912 (2008).
- [8] A.A. Stashkevich, Y. Roussigue, A.I. Stognij, N.N. Novitskii, M.P. Kostylev, G.A. Wurtz, A.V. Zayats, L.V. Lutsev. Phys. Rev. B **78**, 21, 212 404 (2008).
- [9] A.A. Stashkevich, Y. Roussigue, A.I. Stognij, N.N. Novitskii, G.A. Wurtz, A.V. Zayats, G. Viau, G. Chaboussant, F. Ott, L.V. Lutsev, P. Djemia, M.P. Kostylev, V. Belotelov. J. Magn. Magn. Mater. **321**, 7, 876 (2009).
- [10] Л.В. Луцев, С.В. Яковлев, В.И. Сиклицкий. ФТТ **42**, 6, 1105 (2000).
- [11] Л.В. Луцев, С.В. Яковлев. Сб. тр. XVII Междунар. школы-семинара „Новые магнитные материалы микроэлектроники“. М. (2000). С. 524.
- [12] L.V. Lutsev, S. Yakovlev, C. Brosseau. J. Appl. Phys. **101**, 3, 034 320 (2007).
- [13] L.V. Lutsev, S. Yakovlev, V. Castel, C. Brosseau. J. Phys. D **43**, 32, 325 302 (2010).
- [14] L.V. Lutsev. J. Phys.: Cond. Matter **17**, 38, 6057 (2005).
- [15] L.V. Lutsev. <http://arxiv.org/abs/0801.4633> (2008).
- [16] A. Tarantola. Inverse problem theory and model parameter estimation. SIAM, Philadelphia, PA (2004).
- [17] R.C. Aster, B. Borchers, C.H. Thurber. Parameter estimation and inverse problems. Elsevier, Amsterdam (2004).
- [18] Л.В. Луцев, А.И. Стогний, Н.Н. Новицкий. Письма в ЖЭТФ **81**, 10, 636 (2005).
- [19] L.V. Lutsev, A.I. Stognij, N.N. Novitskii, A.A. Stashkevich. J. Magn. Magn. Mater. **300**, 1, e12 (2006).
- [20] L.V. Lutsev, A.I. Stognij, N.N. Novitskii. Phys. Rev. B **80**, 18, 184 423 (2009).
- [21] L.V. Lutsev. In: Mathematical physics research developments / Ed. M.B. Levy. Nova Science Publ., N.Y. (2009). P. 141.
- [22] С. Крупичка. Физика ферритов и родственных им магнитных окислов. Мир, М. (1976). Т. 2. 504 с.
- [23] Ю.А. Изюмов, Ф.А. Кассан-оглы, Ю.Н. Скрыбин. Полевые методы в теории ферромагнетизма. Наука, М. (1974). 224 с.
- [24] А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский. Спиновые волны. Наука, М. (1967). 368 с.
- [25] Ф. Трев. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Псевдодифференциальные операторы. Мир, М. (1984). Т. 1. 360 с.
- [26] А.Г. Гуревич, Г.А. Мелков. Магнитные колебания и волны. Наука, М. (1994). 464 с.
- [27] <http://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html>.
- [28] Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Едиториал УРСС, М. (2005). 448 с.
- [29] Л.В. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1982). Т. 8. 624 с.
- [30] D.D. Stancil. Theory of magnetostatic waves. Springer, N.Y. (1993).
- [31] P. Kabos, V.S. Stalmachov. Magnetostatic waves and their applications. Chapman and Hall, N.Y. (1994).
- [32] Л.В. Луцев. Наноструктуры. Мат. физика и моделирование **1**, 1, 59 (2009).
- [33] <http://mathworld.wolfram.com/topics/SpecialFunctions.html>.
- [34] M. Abramowitz, I. Stegun. Handbook of mathematical functions. National Bureau of Standarts, N.Y. (1995).
- [35] В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. Наука, М. (1971). 512 с.
- [36] T. Morikawa, M. Suzuki, Y. Taga. J. Appl. Phys. **83**, 6664 (1998).
- [37] S. Ohnima, N. Kobayashi, T. Masumoto, S. Mitani, H. Fujimori. J. Appl. Phys. **85**, 4574 (1999).
- [38] L.V. Lutsev. J. Phys.: Cond. Matter **18**, 5881 (2006).