

09

## **Особенности принудительной синхронизации бистабильного генератора с хаотической динамикой**

© Э.В. Кальянов

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
(Фрязинский филиал), Фрязино, Моск. обл.  
E-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

Поступило в Редакцию 14 июня 2011 г.

Изучены особенности принудительной синхронизации генератора Чуа при кубической аппроксимации характеристики нелинейного элемента. Исследованы случаи синхронизации, когда при автономном режиме управляемого генератора реализуются регулярные или хаотические режимы работы, определяемые потерями в колебательном контуре. Рассмотрены детерминированная синхронизация, реализуемая при воздействии внешнего гармонического сигнала, и хаотическая синхронизация, возникающая при воздействии управляющих хаотических колебаний. Показано, что за пределами полосы синхронных колебаний, характеризующей детерминированную синхронизацию, внешний гармонический сигнал стимулирует преобразование регулярных колебаний управляемого генератора в хаотические, причем с переключением движений. Выяснено, что хаотической синхронизации присущи остаточные „шумы“ в виде разностных хаотических колебаний, которые нарастают по мере увеличения неидентичности управляемых и управляющих сигналов.

Явление синхронизации в генераторах широко исследовалось. Оно описано применительно к различным генераторам регулярных колебаний в монографиях [1,2]. Применительно к генераторам с хаотической динамикой явление синхронизации также рассмотрено во многих рабо-

тах [3,4]. Однако полной ясности о явлении синхронизации в системах, обладающих хаотической динамикой, до сих пор нет. Существенные особенности явления синхронизации имеются в управляемом бистабильном генераторе с хаотической динамикой, предложенном Чуа. Они рассматриваются в данной работе при воздействии гармонического сигнала и при синхронизации внешним хаотическим сигналом.

В классическом варианте схемы Чуа используется кусочно-линейная характеристика нелинейного элемента [5]. Однако возможны различные аппроксимации нелинейности [6–8], в том числе и кубическая [7]. При кубической характеристике нелинейного элемента схемы Чуа описывающие ее уравнения известны так же, как модифицированные уравнения Ван-дер-Поля–Дуффинга [9].

При анализе особенностей синхронизации бистабильного генератора с хаотической динамикой использовались уравнения, имеющие вид

$$\begin{aligned}
 dx_1/dt &= y_1 - x_1 - h_1(x_1) + B \cos(\omega_1 t), \\
 dy_1/dt &= (1/\alpha)(x_1 - y_1 + z_1), \\
 dz_1/dt &= -\delta(y_1 + \rho z_1), \\
 dx_2/dt &= y_2 - x_2 - h_2(x_2) + \gamma(x_1 - x_2), \\
 dy_2/dt &= (\alpha_0/\alpha)(x_2 - y_2 + z_2), \\
 dz_2/dt &= -\delta(y_2 + \rho z_2).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Эти уравнения описывают модель двух симметрично связанных бистабильных генераторов (подсистем) со стороны их нелинейных элементов при однонаправленном воздействии колебаний первой подсистемы на колебания второй. При этом на первый генератор со стороны его нелинейного элемента воздействует внешний гармонический сигнал.

Переменные  $x_1$  и  $x_2$  в этих уравнениях отображают изменения напряжений на нелинейных элементах подсистем, переменные  $y_1$  и  $y_2$  — изменения напряжений на конденсаторах их колебательных контуров, а переменные  $z_1$  и  $z_2$  — изменения токов индуктивностей. Постоянные коэффициенты  $\alpha_0$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\rho$  выражаются через параметры схемы. При этом параметр  $\alpha_0$  равен отношению емкостей колебательных контуров первого и второго генераторов, а параметр  $\rho$  является параметром диссипации;  $\gamma$  — коэффициент связи,  $B$ ,  $\omega_1$  — амплитуда и частота внешнего сигнала.

Уравнения (1) основаны на системе, полученной в [8], когда нормированное время выбрано так, что в частном случае (при  $\alpha = 0$ ) получаются уравнения триггера.

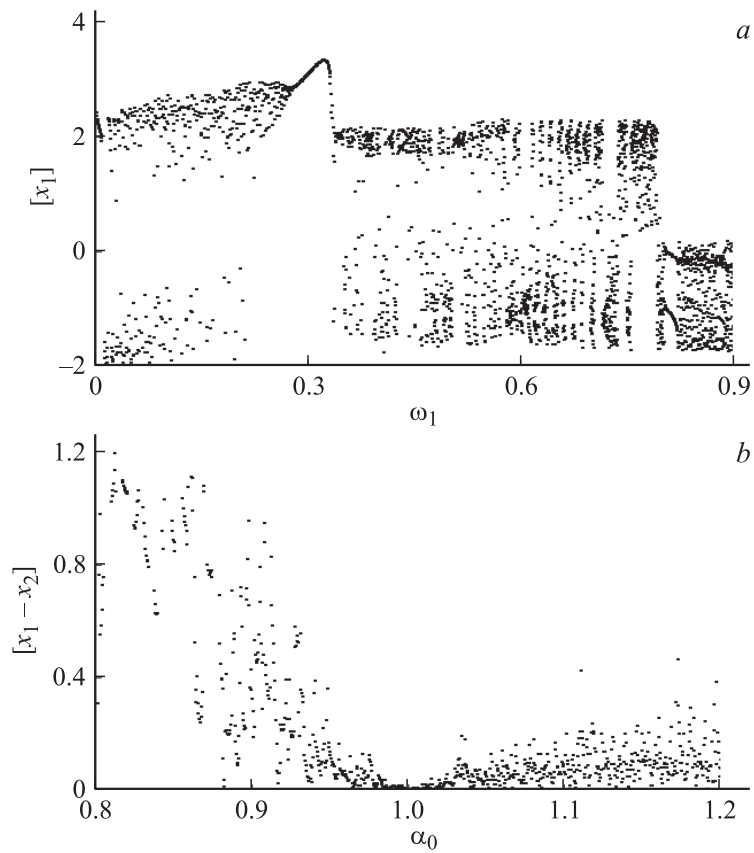
Нелинейности  $h_1(x_1)$  и  $h_2(x_2)$  активных элементов могут быть, как уже отмечалось, аппроксимированы различными соотношениями. При численном анализе воспользуемся кубической аппроксимацией [7], так что (при  $i = 1, 2$ )

$$h_i(x_i) = -1.25x_i + 0.1x_i^3. \quad (2)$$

Численный анализ особенностей явления синхронизации проводился методом Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом интегрирования по времени  $\Delta t = 0.0375$ . Значения неизменяемых параметров выбраны так, что  $\alpha = 9$ ,  $\delta = 1.486$ . При синхронизации внешним гармоническим сигналом использовались только первые три уравнения системы (1); рассматривались изменения колебательного процесса  $x_1(t)$ . При анализе хаотической синхронизации полагалось, что  $B = 0$ . В этом случае рассматривались изменения колебательного процесса  $x_2(t)$ ; колебания  $x_1(t)$  определяли внешний хаотический сигнал.

Исходные режимы автономной работы исследуемого генератора отличались величиной параметра потерь в колебательном контуре. Выбраны режимы, при которых  $\rho = 0.01$  и  $\rho = 0.0001$ . При  $\rho = 0.01$  автономно реализовывались регулярные колебания в одном из бассейнов притяжения, определяемом начальными условиями. При малых потерях, когда  $\rho = 0.0001$ , как и при их отсутствии (при  $\rho = 0$ ), возбуждались хаотические колебания, которым соответствовал хаотический аттрактор типа двойной завиток.

На рис. 1, *a, b* приведены бифуркационные диаграммы, иллюстрирующие особенности явления синхронизации в рассматриваемых случаях управления колебаниями бистабильного генератора. Рис. 1, *a* иллюстрирует изменение максимальных значений колебательного процесса  $x_1(t)$  (обозначенных через  $[x_1]$ ) в зависимости от частоты внешнего гармонического сигнала, а рис. 1, *b* — изменение максимальных значений разности колебаний  $x_1(t) - x_2(t)$  (обозначенной через  $[x_1 - x_2]$ ) в зависимости от параметра расстройки колебательных контуров подсистем. Диаграмма рис. 1, *a* рассчитана при  $\rho = 0.01$ , а диаграмма рис. 1, *b* — при  $\rho = 0.0001$ . При этом в случае рис. 1, *a* использовались первые три уравнения системы (1) при  $B = 0.4$ , а в случае рис. 1, *b* — все шесть уравнений при  $B = 0$ ,  $\gamma = 0.6$ .



**Рис. 1.** Изменение максимальных значений управляемых колебаний  $x_1(t)$  в зависимости от частоты внешнего гармонического сигнала (*a*) и изменение максимальных значений разности управляющих и управляемых хаотических колебаний  $x_1(t) - x_2(t)$  в зависимости от параметра расстройки (*b*).

Как следует из рис. 1, *a*, внешний гармонический сигнал стимулирует возбуждение сложных и хаотических колебаний, отображаемых разбросом точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса  $x_1(t)$ . При увеличении частоты внешнего воздействия до значения  $\omega_1 = \omega_{01} \approx 0.28$ , которое можно назвать „граничным“, проис-

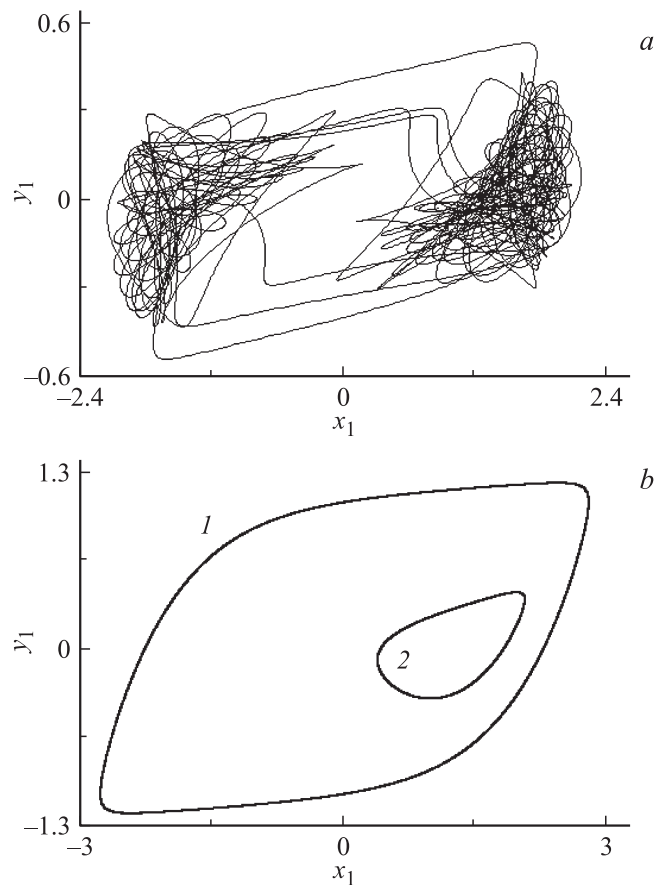
ходит переход к режиму синхронизации. Область синхронных колебаний реализуется в интервале частот  $\omega_1 \in [0.28, 0.334]$ . Характерно, что после срыва режима синхронизации при превышении высокочастотной границы полосы захвата возбуждаются развитые хаотические колебания с переключением движений между бассейнами притяжения. При превышении значения  $\omega_1 \approx 0.8$  колебания сосредоточиваются в одном бассейне притяжения.

При увеличении амплитуды внешнего сигнала полоса синхронизации возрастает и, наоборот, уменьшается при снижении уровня управляющего воздействия. При значении  $B$ , меньшем некоторой пороговой величины (при  $B < 0.2$ ), детерминированная синхронизация не возникает, но возбуждение хаотических колебаний с переключением между бассейнами притяжения стимулируется даже при снижении амплитуды внешнего сигнала до значения  $B \approx 0.1$ . При этом интервал частот внешнего сигнала, в котором реализуются хаотические колебания, сужается.

В случае хаотических колебаний управляющей и управляемой подсистем при заданной величине коэффициента связи существует граничное значение расстройки, при превышении которой хаотическая синхронизация колебаний  $x_2(t)$  отсутствует. В соответствии с диаграммой, представленной на рис. 1, *b*, синхронизация отсутствует при  $\alpha_0 < 0.92$ , когда максимальные значения разностных колебаний  $x_1(t) - x_2(t)$  отображают переключение между бассейнами притяжения. При приближении параметра расстройки к единице разброс точек, соответствующих максимальным значениям разности колебаний  $x_1(t) - x_2(t)$ , уменьшается, но достигает нулевого значения лишь при  $\alpha_0 = 1$ , когда параметры подсистем идентичны.

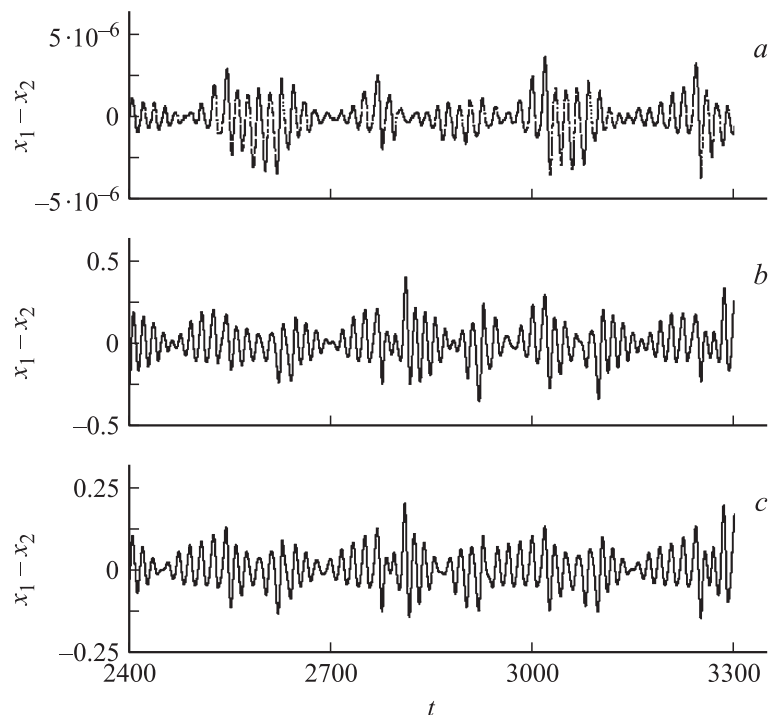
Как обычно, существует порог хаотической синхронизации; он определяется значением параметра связи  $\gamma \approx 0.52$ . При величинах параметра связи, меньших этой пороговой величины, реализуется асинхронное воздействие внешних хаотических колебаний на хаотические колебания управляемой подсистемы, усложняющее структуру колебаний  $x_2(t)$ .

На рис. 2, *a, b* иллюстрируются характерные аттракторы неавтономного колебательного процесса  $x_1(t)$ , рассчитанные при воздействии гармонических колебаний, когда автономный режим работы является регулярным. На рис. 3, *a-c* приведены фрагменты реализаций разностных колебаний  $x_1(t) - x_2(t)$  при однонаправленном воздействии хаотических колебаний  $x_1(t)$  на хаотический колебательный процесс  $x_2(t)$ .



**Рис. 2.** Аттрактор, соответствующий неавтономному колебательному процессу  $x_1(t)$  при параметрах и начальных условиях, определяемых значением  $\omega_1 = 0.6027932$  (a), а также фазовые портреты синхронных колебаний (при  $\omega_1 = 0.3210176$ ) (b, кривая 1) и автономных колебаний (b, кривая 2).

Интересным является аттрактор (рис. 2, a), иллюстрирующий движение изображающей точки в фазовом пространстве при колебаниях, стимулированных внешним гармоническим сигналом. Аттрактор отображает сложную структуру асинхронной динамики: реализуется хорошее перемешивание фазовых траекторий развитых хаотических



**Рис. 3.** Фрагменты реализаций разностных колебаний  $x_1(t) - x_2(t)$  при  $\alpha_0 = 1.000001$  (*a*) и при  $\alpha_0 = 1.2$  (*b, c*), когда  $\gamma = 0.6$  (*a, b*) и  $\gamma = 1$  (*c*).

колебаний с переключением движений между бассейнами притяжения. Такие колебания представляют интерес при использовании хаоса для шифрования информации [10].

На рис. 2, *b* приведены фазовые портреты, соответствующие синхронизированным колебаниям при параметрах, существующих при  $\omega_1 = 0.3210176$  на диаграмме рис. 1, *a* (кривая 1), а также для сравнения — автономным колебаниям (кривая 2). Аттракторы отображают различие структур соответствующих им колебаний.

При хаотической синхронизации даже при расстройке, определяемой значением  $\alpha_0 = 1.000001$ , после завершения переходного процесса установления синхронного режима сохраняются разностные колебания (рис. 3, *a*). Интенсивность этих колебаний возрастает с увеличением

расстройки (рис. 3, *b*) и уменьшается с увеличением параметра связи (рис. 3, *c*). В реализациях разностных колебаний присутствует нерегулярная модуляция, соответствующая переключениям управляющих движений между бассейнами притяжения. Из сравнения фрагментов реализаций рис. 3, *a* и *b* следует, что при увеличении расстройки помимо снижения интенсивности разностных колебаний возникает существенное изменение их структуры, тогда как при увеличении параметра связи (рис. 3, *b* и *c*) структура колебаний (при снижении хаотических выбросов) меняется незначительно.

Представленные результаты численного анализа принудительной синхронизации колебаний бистабильного генератора Чуа показывают, что при внешнем воздействии возможны различные режимы работы. Когда генератор в автономном режиме работы генерирует регулярные колебания, возбуждающиеся в одном из двух бассейнов притяжения, то внешний гармонический сигнал приводит к развитию за пределами полосы захвата необычной асинхронной динамики, выражающейся в генерировании стимулированных хаотических колебаний с их переключением между бассейнами притяжения. В полосе захвата внешним гармоническим сигналом стимулируются колебания, которым соответствует так называемый большой предельный цикл. При хаотической синхронизации существуют разностные колебания, за исключением нереального для практики случая идентичных хаотических подсистем, реализуемого лишь в математических моделях. Интенсивность разностных колебаний уменьшается с увеличением параметра связи и нарастает с увеличением различия параметров подсистем, что определяет „точность“ воспроизведения хаотических колебаний при использовании явления хаотической синхронизации в системах скрытой связи [11].

Работа выполнена при поддержке программы „Радиовидение“ ОФН РАН.

## Список литературы

- [1] Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 360 с.
- [2] Железовский Б.Е., Кальянов Э.В. Многочастотные режимы в приборах СВЧ. М.: Связь, 1978. 256 с.



- [3] *Дмитриев А.С.* Прикладной динамический хаос. Курс лекций. Ч. II. Ярославль, 2000. 102 с.
- [4] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. № 2. С. 133–165.
- [5] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2001. Лекция 5. С. 67.
- [6] *Кальянов Э.В.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. В. 10. С. 135–137.
- [7] *Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 16. С. 76–84.
- [8] *Кальянов Э.В.* // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. № 5. С. 589–598.
- [9] *Fodjouong G.J., Fotsin H.B., Wofo P.* // Physica Scripta. 2007. V. 75. P. 638–644.
- [10] *Кальянов Г.Н., Кальянов Э.В.* // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53. № 4. С. 459–467.
- [11] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2002. Гл. 3. С. 57.