

09

Переходные процессы при синхронизации бистабильного генератора с хаотической динамикой

© Э.В. Кальянов

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
(фрязинский филиал), Фрязино, Моск. обл.
E-mail:erast@ms.ire.rssi.ru

Поступило в Редакцию 10 мая 2011 г.

Исследованы переходные процессы математических моделей, описывающих связанные неидентичные генераторы Чуа при кубической аппроксимации нелинейных элементов, когда осуществляется симметричная резистивная связь со стороны их нелинейных элементов. Рассмотрены случаи взаимной и однонаправленной связи. Показано, что переходные процессы при взаимной и принудительной хаотических синхронизациях возрастают с увеличением расстройки колебательных контуров парциальных подсистем и уменьшаются по мере увеличения коэффициента связи. При этом время установления синхронного режима работы, при прочих равных условиях, в случае взаимной синхронизации меньше, чем в случае принудительной. Рассмотрено влияние момента включения связи на длительность процесса установления синхронного режима работы.

Изучению различных генераторов, обладающих хаотической динамикой, посвящено большое число работ. Среди них значительное внимание уделяется цепи Чуа, вошедшей в учебные пособия [1]. Эта цепь формирует бистабильный хаос. Первоначально нелинейный элемент в классической схеме Чуа описывался кусочно-нелинейной характеристикой [1]. Однако возможны различные аппроксимации нелинейности [2–4], в том числе и кубическая [3,4]. При кубической аппроксимации нелинейного элемента эта схема известна также как модифицированный генератор Ван дер Поля–Дуффинга [6,7].

К явлению синхронизации в генераторах Чуа проявлялся значительный интерес; оно исследовалось также и в работах [2–5]. При использовании синхронного режима работы для реализации скрытой связи [8] очень важен вопрос о переходных процессах при синхронизации

ции, причем при неидентичных параметрах подсистем, так как создание идентичных генераторов с хаотической динамикой на практике невозможно. Последнее определяется тем, что, в соответствии с основным свойством систем, обладающих хаотической динамикой, сколь угодно малое различие параметров подсистем приводит к экспоненциальному разбеганию фазовых траекторий.

Возможны различные способы осуществления связи генераторов Чуа для целей осуществления синхронных колебаний: симметричные [2–4,5] и асимметричная [7]. Симметричная связь может быть осуществлена при соединении генераторов со стороны колебательных контуров [2–4] или со стороны нелинейных элементов [4,5]. При асимметричной связи нелинейный элемент одного генератора соединяется с колебательным контуром другого (см. схему работы [7]).

Представляется, что для реализации эффекта синхронизации наиболее эффективной является симметричная резистивная связь неидентичных генераторов (подсистем) со стороны их нелинейных элементов, изученная теоретически и экспериментально в работе [5]. Уравнения этой работы можно использовать для анализа переходных процессов как при взаимной симметричной связи, так и при однонаправленном воздействии колебаний одного (ведущего) генератора на колебательный процесс другого (ведомого) генератора при различных параметрах подсистем. Ограничиваясь наиболее удобным различием, определяющим неидентичность подсистем, а именно различием колебательных контуров парциальных генераторов, можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= y_1 - x_1 - h_1(x_1) + \gamma(x_2 - x_1), & \frac{dy_1}{dt} &= \frac{1}{\alpha}(x_1 - y_1 + z_1), \\ \frac{dz_1}{dt} &= -\delta(y_1 + \rho z_1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= y_2 - x_2 - h_2(x_2) + \gamma(x_1 - x_2), & \frac{dy_2}{dt} &= \frac{\alpha_0}{\alpha}(x_2 - y_2 + z_2), \\ \frac{dz_2}{dt} &= -\delta(y_2 + \rho z_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Переменные x_1 и x_2 в этих уравнениях отображают изменения напряжений на нелинейных элементах подсистем, переменные y_1 и y_2 — изменения напряжений на конденсаторах их колебательных контуров, а переменные z_1 и z_2 — изменения токов индуктивностей. Постоянные

коэффициенты α_0 , α , δ , ρ выражаются через параметры схемы. При этом параметр α_0 равен отношению емкостей колебательных контуров первого и второго генераторов, а параметр ρ является параметром диссипации; γ — коэффициент связи.

Нелинейности $h_1(x_1)$ и $h_2(x_2)$ активных элементов могут быть, как уже отмечалось, аппроксимированы различными соотношениями. При численном анализе воспользуемся кубической аппроксимацией [3], так что (при $i = 1, 2$)

$$h_i(x_i) = -1.25x_i + 0.1x_i^3. \quad (2)$$

Численный анализ математической модели, описываемой уравнениями (1), (2), проводился методом Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом интегрирования по времени $\Delta t = 0.0375$. Значения неизменяемых параметров выбраны так, что $\alpha = 9$, $\beta = 1.486$, $\rho = 0.001$. Варьировались управляющие параметры γ и α_0 . В случае анализа переходных процессов при принудительной хаотической синхронизации последнее слагаемое в первом уравнении системы (1) полагалось равным нулю.

Характерной особенностью хаотической синхронизации генераторов Чуа (взаимной и принудительной) является то, что по мере увеличения параметра связи переходу к синхронному режиму работы предшествует возбуждение резонансных колебаний без переключения между бассейнами притяжения — так называемых колебаний с большим предельным циклом. Интервал значений параметра связи, в котором реализуются эти колебания, не критичен к изменению расстройки. При взаимной связи этот интервал значений параметра связи меньше, чем при принудительной синхронизации. При использовании уравнений (1), (2) решения, соответствующие синхронным колебаниям, надежно реализуются при превышении значения $\gamma \approx 0.3$ в случае взаимной связи и при $\gamma > 0.6$ — в случае однонаправленной.

На рис. 1, *a–c* иллюстрируются фрагменты реализаций разности колебательных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при автономной работе (*a*), а также при взаимной (*b*) и однонаправленной (*c*) связях, когда связь включается в момент времени $t_0 = 300$ при значениях параметра γ , при которых стимулируются колебания без переключения движений между бассейнами притяжения; при взаимной связи параметр связи равен $\gamma = 0.2$, а при однонаправленной — $\gamma = 0.4$. Во всех трех случаях параметр расстройки равен $\alpha_0 = 1.02$, а начальные условия для переменных равны 0.1. Такие начальные условия используются и в дальнейшем.

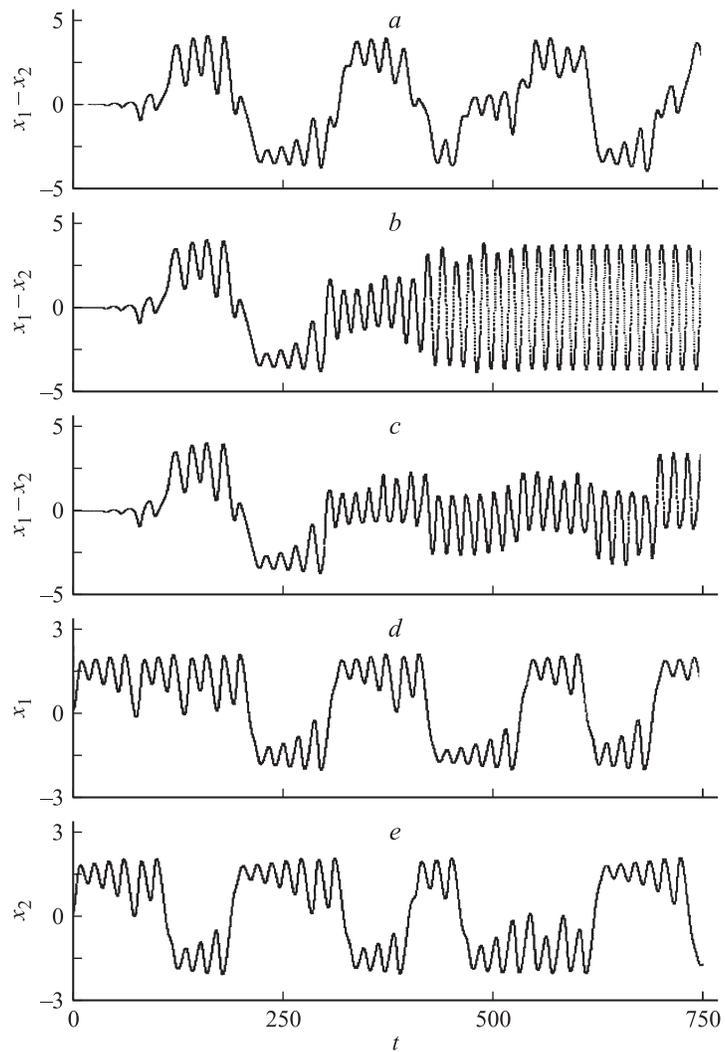


Рис. 1. Фрагменты реализаций разности колебаний двух подсистем ($a-b$) при их автономной работе (a) и при включении в момент времени $t_0 = 300$ взаимной (b) или однонаправленной (c) связи. Для сравнения на рис. 1, d, e приведены фрагменты реализаций автономных колебаний парциальных генераторов.

Как видно, что разностные колебания $x_1(t) - x_2(t)$, отображающие различие автономных колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$, отсутствуют при $t < 20$, что обусловлено малым различием колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в начальный момент времени благодаря одинаковым начальным условиям и относительно малой расстройке. При этом автономные колебания $x_1(t)$ (рис. 1, *d*) и $x_2(t)$ (рис. 1, *e*) возбуждаются практически при $t \approx 0$ и отображают переключение колебаний между двумя бассейнами притяжения. При включении связи происходит возбуждение колебаний без переключения между бассейнами притяжения: в случае взаимной связи это относится как к колебаниям $x_1(t)$, так и к колебаниям $x_2(t)$, а при однонаправленной — только к управляемым колебаниям $x_2(t)$. Представленные на рис. 1, *b, c* разностные колебания наглядно отображают переход от хаотических колебаний с переключением между бассейнами притяжения к резонансным движениям.

Выяснено, что длительность процесса установления режима взаимной синхронизации зависит не только от коэффициента связи и расстройки колебательных контуров подсистем, но и от значения разности их колебательных процессов в момент включения связи. Это иллюстрируется рис. 2. На нем приведены фрагменты разностных колебаний применительно к взаимной связи, рассчитанные при $\alpha_0 = 1.02$ и различных значениях параметра связи (рис. 2, *a, b*), а также при $\gamma = 0.4$ и различных моментах включения взаимной связи (рис. 2, *a, c*).

При $t_0 = 295$, $\alpha_0 = 1.02$, $\gamma = 0.4$ величина разности колебаний достаточно большая и равна $x_1 - x_2 = -3.9$. В этом случае длительность процесса установления режима взаимной хаотической синхронизации равна $t - t_0 \approx 445$ (рис. 2, *a*). С увеличением параметра связи до величины $\gamma = 0.8$ время этого переходного процесса снижается до значения $t - t_0 \approx 145$ (рис. 2, *b*). При этом уменьшается также уровень разностных хаотических колебаний, проявляющихся как остаточные „шумы“ синхронной динамики. В случае рис. 2, *a* уровень этих остаточных шумов находится в пределах $x \in [-0.038, +0.038]$, а в случае рис. 2, *b* — в пределах $x \in [-0.014, +0.014]$. При включении связи в момент времени $t_0 = 307$, когда (при $\alpha_0 = 1.02$, $\gamma = 0.4$) величина разности колебаний невелика и равна $x_1 - x_2 = -0.7$, время переходного процесса установления взаимно синхронизированных хаотических колебаний значительно меньше, чем в случае рис. 1, *a*; оно равно $t - t_0 \approx 263$ (рис. 2, *c*). Однако уровень остаточных выбросов разностных хаотических колебаний (остаточных шумов) не уменьшается.

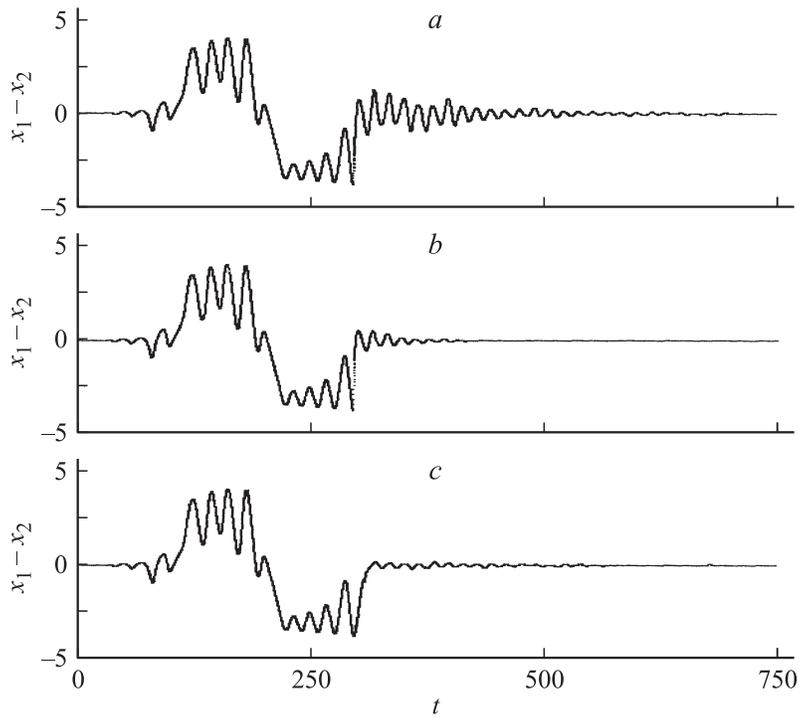


Рис. 2. Фрагменты реализаций разности колебаний двух подсистем при взаимной связи: *a* — $t_0 = 295$, $\gamma = 0.4$; *b* — $t_0 = 295$, $\gamma = 0.8$; *c* — $t_0 = 307$, $\gamma = 0.4$.

При увеличении расстройки колебательных контуров взаимно связанных подсистем переходной процесс установления синхронной хаотической динамики по-прежнему зависит от момента включения связи; при этом, как и следовало ожидать, уровень остаточных шумов заметно возрастает. Так, в случае $\alpha_0 = 1.12$ (при $t_0 = 295$, $\gamma = 0.4$) уровень остаточных шумов находится в пределах $x \in [-0.27, +0.27]$. Увеличение параметра связи приводит к существенному снижению уровня этих шумов: при $\gamma = 0.8$ он снижается до значений $x \in [-0.08, +0.08]$.

Длительность процесса установления режима принудительной хаотической синхронизации тоже зависит не только от коэффициента связи и расстройки колебательных контуров подсистем, но и от разности их

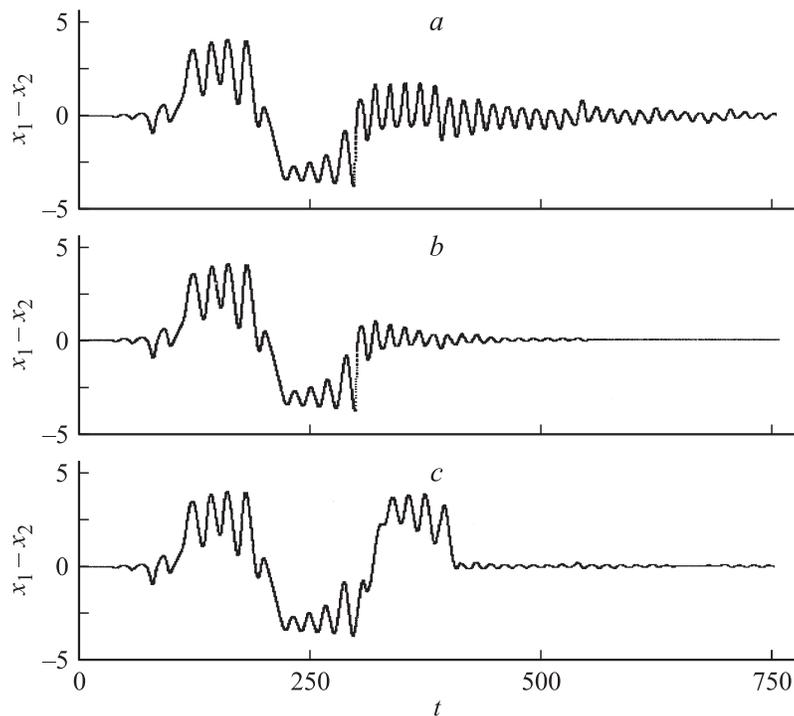


Рис. 3. Фрагменты реализаций разности колебаний двух подсистем при однонаправленной связи: a — $t_0 = 296$, $\gamma = 0.6$; b — $t_0 = 296$, $\gamma = 0.9$; c — $t_0 = 409$, $\gamma = 0.6$.

колебательных процессов в момент включения однонаправленной связи. Это иллюстрируется рис. 3, на котором приведены фрагменты разностных колебаний применительно к принудительной синхронизации, рассчитанные, как и рис. 2, при $\alpha_0 = 1.02$.

При $t_0 = 296$, $\alpha_0 = 1.02$, $\gamma_0 = 0.6$ величина разности колебаний имеет относительно большую величину, равную $x_1 - x_2 = -3.8$. В этом случае время процесса установления режима принудительной хаотической синхронизации составляет $t - t_0 \approx 610$ (рис. 3, a). С увеличением коэффициента однонаправленной связи до величины $\gamma = 0.9$ длительность этого переходного процесса уменьшается до значения $t - t_0 \approx 290$ (рис. 3, b). При этом уменьшается также уровень разност-

ных хаотических колебаний. В случае рис. 3, *a* уровень этих остаточных хаотических колебаний находится в пределах $x \in [-0.05, +0.05]$, а в случае рис. 3, *b* — в пределах $x \in [-0.025, +0.025]$. При включении связи в момент времени $t_0 = 409$, когда (при $\alpha_0 = 1.02$, $\gamma = 0.6$) $x_1 - x_2 \approx 0$, время переходного процесса принудительного установления синхронного режима работы значительно меньше, чем в случае рис. 3, *a*, и равно $t - t_0 \approx 390$ (рис. 3, *c*). При этом уровень остаточных выбросов разностных хаотических колебаний, как и при взаимной синхронизации, не уменьшается.

При увеличении расстройки колебательных контуров однонаправленно связанных подсистем переходный процесс установления режима принудительной синхронизации, как и при взаимной связи, зависит от момента включения связи, а уровень остаточных шумов заметно возрастает. Так, в случае $\alpha_0 = 1.12$ (при $t_0 = 296$, $\gamma = 0.6$) уровень остаточных шумов находится в пределах $x \in [-0.24, +0.24]$. Увеличение параметра связи приводит к снижению уровня этих шумов: при $\gamma = 0.9$ он снижается до значений $x \in [-0.15, +0.15]$.

Приведенные результаты численного анализа переходных процессов установления синхронных колебаний при взаимной и однонаправленной связях генераторов показывают, что в обоих случаях проявляется влияние момента включения связи. При этом время установления синхронных колебаний уменьшается с увеличением связи и возрастает с увеличением неидентичности подсистем. При прочих равных условиях время установления синхронных колебаний при взаимной связи подсистем меньше, чем при их однонаправленной связи.

Список литературы

- [1] Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2001. Лекция 5. С. 91.
- [2] Кальянов Э.В. // ЖТФ. 2000. Т. 70. В. 10. С. 135–137.
- [3] Кальянов Э.В. // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 16. С. 76–84.
- [4] Fodjouong G.J., Fotsin H.B., Wofo P. // Physica Scripta. 2007. V. 75. P. 638–644.
- [5] Кальянов Э.В. // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. № 5. С. 589–598.
- [6] King G.P., Gaito S.T. // Phys. Rev. A. 1992. V. 46 (6). P. 3092–3099.
- [7] Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова И.А. // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. В. 7. С. 69–76.
- [8] Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2002. Гл. 3. С. 57.