

01

## Начальный этап TWIST-деформации нематика в сильном магнитном поле

© С.М. Гудилов

Волгоградский государственный технический университет  
E-mail: gudilov@vstu.ru

Поступило в Редакцию 10 марта 2011 г.

Рассмотрен начальный этап деформации планарно ориентированного нематика сильным магнитным полем, параллельным подложкам. Отмечено, что в этом случае влияние границ на развитие неустойчивостей несущественно, и в рамках теории Эриксона–Лесли–Пароди (Ericksen–Leslie–Parodi) получены уравнения, описывающие динамику процесса с учетом течений. Обнаружено, что в данной геометрии могут быть найдены решения в виде простых волн.

Однородно ориентированный нематик, помещенный в сильное переориентирующее магнитное или электрическое поле, в несколько раз превышающее критическое поле Фредерикса, представляет собой чрезвычайно неустойчивую нелинейную среду, малейшие флуктуации в которой приводят к развитию сложных структур [1,2].

В этой связи представляют интерес работы, посвященные исследованию процесса переориентации в сильном магнитном поле, так как в этом случае исключены электрогидродинамические эффекты. Как правило, такие исследования выполняются на лиотропных, полимерных или биологических системах, так как из-за большой вязкости и малой анизотропии магнитной восприимчивости переходные процессы в них протекают значительное время (порядка минут) и легко могут быть обнаружены. Обычно считается, что при твист-деформации нет смещений центров тяжести молекул, поэтому невозможны потоки вещества,

приводящие к периодической структуре. Однако имеются сообщения и об экспериментах в такой геометрии [3,4]. Особенно интересными являются эксперименты по наблюдению в скрещенных поляроидах периодической текстуры, возникающей при твист-деформации термотропного нематика метоксибензолиден-*л*-бутиланилин (МББА) [4]. Авторы отмечают, что в магнитных полях, превышающих в 3 и более раз критическое поле Фредерикса, переориентация нематика сопровождается образованием полосатой текстуры, причем полосы быстро движутся и исчезают при слиянии. В то же время интерпертация наблюдаемой картины образованием вращающихся валов вещества, предложенная в статье, для данной геометрии вызывает ряд вопросов.

Во-первых, неясно, как в этом случае замыкаются вращающиеся потоки вещества. Во-вторых, при планарной ориентации синусоидальное распределение директора по толщине делает твист-деформацию ненаблюдаемой в скрещенных поляроидах, так как плоскость поляризации проходящего света поворачивается вместе с поворотом директора. На представленной в работе фотографии периодическая структура образована, по-видимому, инверсными стенками. В-третьих, авторы указывают, что процесс переориентации в поле, превышающем критическое в 10 раз, протекал достаточно долго — несколько секунд и, согласно развитой в работе теории, сопровождался уменьшением вращательной вязкости, тогда как время установления процесса переориентации, вычисленное для „чистого вращения“ в МББА [3], составляет доли секунды.

Для оценки влияния магнитного поля на распределение директора в слое нематика, помещенного в плоский капилляр толщиной  $d$ , учтем, что периодическая текстура наблюдается в сильных полях, превышающих более чем в 3 раза критическое поле перехода Фредерикса:

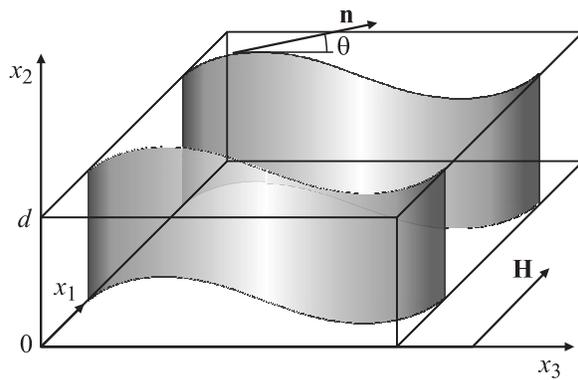
$$H_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_{22}}{\mu_0 \chi_a}},$$

где  $H_c$  — напряженность критического поля для перехода Фредерикса при твист-деформации,  $K_{22}$  — константа упругости Франка,  $\chi_a = \chi_{||} - \chi_{\perp}$  — анизотропия магнитной восприимчивости.

Мерой такого влияния является магнитная когерентная длина:

$$\xi_m = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{K_{22}}{\mu_0 \chi_a}},$$

где  $H$  — напряженность приложенного магнитного поля.



Распределение директора  $\mathbf{n}$  в слое нематика на начальном этапе переориентации в магнитном поле  $\mathbf{H}$ .

Очевидно, что для  $h = H/H_c > 3$  выполняется соотношение:

$$\frac{\xi_m}{d} = \frac{1}{\pi h} < 0, 1.$$

Таким образом, для сильных полей можно пренебречь тонкими переходными слоями вблизи подложек и считать распределение директора по толщине однородным, что позволяет рассматривать нематик как упорядоченную неограниченную среду.

Рассмотрим бесконечную однородно упорядоченную несжимаемую нематическую среду, образованную, для определенности, стержнеподобными структурными элементами с положительной анизотропией магнитной восприимчивости, к которой в начальный момент времени приложено сильное постоянное магнитное поле в направлении, перпендикулярном директору. Очевидно, что в этот момент времени нематик находится в равновесном, но чрезвычайно неустойчивом состоянии, причем малейшей флуктуации в ориентации директора достаточно, чтобы начался процесс его переориентации в направлении магнитного поля. В соответствии с рис. и геометрией задачи имеем:  $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, 0, v_3)$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, 0, n_3) = \sin \theta, 0, \cos \theta$ . Здесь  $\theta = \theta(x_3, t)$  — угол отклонения директора от первоначального направления,  $\mathbf{v}$  — скорость нематической жидкости.

Для данной геометрии  $\partial/\partial x_2 \equiv 0$ ,  $\partial v_1/\partial x_1 = 0$ ; тогда из условия несжимаемости следует, что  $\partial v_3/\partial x_3 = 0$ . Будем рассматривать малые

флуктуации директора, для которых в разложении в ряд Фурье можно ограничиться первым, гармоническим членом ряда, по крайней мере, в начале процесса переориентации. Также гармонически должна изменяться компонента скорости потока вещества  $v_3$ , а следовательно, проходить через нуль. Так как эта компонента от  $x_3$  не зависит, то  $v_3 \equiv 0$ . Уравнение Навье–Стокса для данной задачи имеет вид

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ji}}{\partial x_j}; \quad i, j = 1, 3,$$

где  $\rho$  — плотность вещества,  $p$  — давление, а  $\sigma'_{ji}$  — компоненты тензора вязких напряжений.

Используя выражение для  $\sigma'_{ji}$  [5], получим:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = & -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{2}(2\alpha_1 n_1^2 n_3^2 - \alpha_2 n_3^2 + \alpha_3 n_1^2 + \alpha_4 + \alpha_5 n_3^2 + \alpha_6 n_1^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \\ & + \left[ (2\alpha_1 n_1^2 - \alpha_2 + \alpha_5) n_3 \frac{\partial n_3}{\partial x_3} + (2\alpha_1 n_3^2 + \alpha_3 + \alpha_6) n_1 \frac{\partial n_1}{\partial x_3} \right] \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ & + \alpha_2 \frac{\partial n_3}{\partial x_3} \frac{dn_1}{dt} + \alpha_3 \frac{\partial n_1}{\partial x_3} \frac{dn_3}{dt} + \alpha_2 n_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{dn_1}{dt} \right) + \alpha_3 n_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{dn_3}{dt} \right); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{\partial p}{\partial x_3} + (\alpha_1 n_3^2 + \alpha_6) n_1 n_3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \\ & + \left[ (\alpha_1 n_3^2 + \alpha_6) n_3 \frac{\partial n_1}{\partial x_3} + (3\alpha_1 n_3^2 + \alpha_6) n_1 \frac{\partial n_3}{\partial x_3} \right] \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ & + \gamma_2 \frac{\partial n_3}{\partial x_3} \frac{dn_3}{dt} + \gamma_2 n_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{dn_3}{dt} \right) + \mu_0 \chi_a n_3 H^2 \frac{\partial n_3}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha_i$  — коэффициенты вязкости Лесли,  $\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2$  и  $\gamma_2 = \alpha_2 + \alpha_3$ .

Из этих уравнений видно, что  $\partial^2 p / \partial x_1^2 = 0$  и  $\partial^2 p / (\partial x_1 \partial x_3) = 0$ . Следовательно, давление может зависеть от  $x_1$  только линейно либо не зависеть совсем. Линейная зависимость не согласуется с симметрией рассматриваемой задачи, поэтому  $\partial p / \partial x_1 = 0$ . При этом ограничений на зависимость  $p$  от  $x_3$  не накладывается. Из уравнения для изменения момента импульса некоторого объема нематика можно получить [1,6,7]:

$$J \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right) = (\mathbf{n} \times \mathbf{h}) - (\mathbf{n} \times \mathbf{R}). \quad (3)$$

Здесь  $J$  — плотность момента инерции нематика,  $\mathbf{h}$  — молекулярное поле сил, вынуждающих директор принимать равновесную ориентацию,  $\mathbf{R} = \gamma_1 \mathbf{N} + \gamma_2 \mathbf{n} \hat{\mathbf{A}}$  — диссипативная сила, препятствующая вращению. Выражения для векторов  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{N}$  и тензора  $\hat{\mathbf{A}}$  даны, например, в [5]. Как показано в [6], инерционным членом в данной задаче можно пренебречь, поэтому, следуя [5–7], из (3) получим:

$$\gamma_1 \frac{dn_1}{dt} + \alpha_2 n_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = K_{33} \frac{\partial^2 n_1}{\partial x_3^2} - K_{33} n_1 \left( \frac{\partial n_1}{\partial x_3} \right)^2 + \mu_0 \chi_a n_1 H^2, \quad (4)$$

$$\gamma_1 \frac{dn_3}{dt} + \alpha_3 n_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = K_{33} n_3 \left( \frac{\partial n_1}{\partial x_3} \right)^2. \quad (5)$$

Выразим из (4), (5) производные по времени от компонент директора, подставим в (1) и оставим члены, содержащие производные только первого порядка:

$$\rho \frac{dv_1}{dt} = \frac{\alpha_2}{\gamma_1} \mu_0 \chi_a H^2 \left( n_1 \frac{\partial n_3}{\partial x_3} + n_3 \frac{\partial n_1}{\partial x_3} \right). \quad (6)$$

Подставим в (4)–(6) компоненты директора, выраженные через угол отклонения  $\theta$ , и отбросим в (4), (5) члены, содержащие производные выше первого порядка либо их степени:

$$\gamma_1 \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \alpha_2 \cos \theta \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \mu_0 \chi_a \sin \theta H^2, \quad (7)$$

$$\gamma_1 \frac{d\theta}{dt} - \alpha_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0, \quad (8)$$

$$\rho \frac{dv_1}{dt} - \frac{\alpha_2}{\gamma_1} \mu_0 \chi_a H^2 \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_3} = 0. \quad (9)$$

Из уравнений (7) и (8) для малых углов имеем:

$$\gamma_1 \left( 1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \frac{d\theta}{dt} = \mu_0 \chi_a \theta H^2.$$

Визуальная картина процесса определяется двойным лучепреломлением слоя нематика, которое пропорционально  $\theta^2$ . Характерное время переориентации для  $\theta^2$  в начале процесса

$$\tau = \frac{\gamma_1 \left( 1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right)}{2\mu_0 \chi_a H^2}. \quad (10)$$

Оценим это время переориентации для МББА в магнитном поле  $H \sim (4\pi)^{-1} \cdot 10^7$  А/м. Используя известные значения констант [5] при комнатных температурах  $\alpha_2 = -0.077$  Па · с,  $\alpha_3 = -0.0012$  Па · с,  $\chi_a = 4\pi \cdot 10^{-7}$ , получим  $\tau = 2.5$  с. Эта оценка согласуется с результатами в [4]. В рассматриваемом случае потоки вещества увеличивают время переориентации, что, впрочем, соответствует принципу Ле Шателье: возникающие в системе процессы противодействуют стремлениям ее изменить. Действительно, так как единственной причиной возникновения потоков вещества является вращение директора, то на получение ими соответствующего импульса требуется дополнительное время. Следует заметить, что в уравнении (10) учтена зависимость  $\tau$  от анизотропии формы структурных элементов, которая непосредственно определяет величину  $\alpha_2/\alpha_3$  [8], но нет зависимости от коэффициентов упругости. Очевидно, что отсутствие такой зависимости обусловлено сделанными предположениями о малой величине деформаций поля директора на начальном этапе переориентации.

Уравнения (8) и (9) позволяют получить решение в виде простых волн Римана [9]. Для этого, считая, что между  $v_1$  и  $\theta$  имеется однозначная функциональная связь, положим  $v_1 = v_1(\theta)$ . Тогда, учитывая, что в этих уравнениях  $d/dt = \partial/\partial t$ , так как  $v_3 = 0$ , имеем:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\alpha_3}{\gamma_1} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\alpha_2 \mu_0 \chi_a}{\gamma_1 \rho} H^2 \cos 2\theta \left( \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right)^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} = 0. \quad (12)$$

Условие совместимости уравнений приводит к соотношению:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \theta} = H \sqrt{\frac{\alpha_2 \mu_0 \chi_a}{\alpha_3 \rho}} \cos 2\theta \approx H \sqrt{\frac{\alpha_2 \mu_0 \chi_a}{\alpha_3 \rho}} \cos \theta. \quad (13)$$

Интегрируя последнее выражение, получим:

$$v_1 \approx H \theta \sqrt{\alpha_2 \mu_0 \chi_a / (\alpha_3 \rho)}.$$

Для МББА  $\rho \approx 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, поэтому в поле  $H \sim (4\pi)^{-1} \cdot 10^7$  А/м имеем для скорости потока  $v_1 \approx 0.3 \cdot \theta$  м/с. Таким образом, уравнение (11) или (12) может быть записано в форме уравнения простой волны:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x_3} = 0,$$

где  $u = H \sqrt{\alpha_2 \alpha_3 \mu_0 \chi_a \cos 2\theta} / \rho / \gamma_1$  — скорость волны. Здесь учтено, что  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  отрицательны. В случае МББА получим оценку скорости волны для приведенных выше значений величин:  $u \approx 0.004$  m/s. Возникновением простых волн в нелинейной среде может быть объяснено возникновение, при переориентации, инверсных стенок, однако этот вопрос предполагается рассмотреть в следующей работе.

## Список литературы

- [1] Каменский В.Г. // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. В. 4. С. 1262–1276.
- [2] Делев В.А., Скалдин О.А., Батыршин Э.С., Аксельрод Е.Г. // ЖТФ. 2011. Т. 81. В. 1. С. 11–17.
- [3] Hui Y.W., Kuzma M.R., San Miguel M., Labes M.M. // J. Chem. Phys. 1985. V. 83. N 1. P. 288–292.
- [4] Lonberg F., Fraden S., Hurd A.J., Meyer R.E. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. N 21. P. 1903–1906.
- [5] Де Жен П. Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. 400 с.
- [6] Group d'Etude Cristaux Liquids (Orsay) // J. Chem. Phys. 1969. V. 51. N 2. P. 816–822.
- [7] Пикин С.А. Структурные превращения в жидких кристаллах. М.: Наука. 1981. 336 с.
- [8] Helfrich W. // J. Chem. Phys. 1970. V. 53. N 6. P. 2267–2271.
- [9] Лайтхилл Д. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.