

09

Рекурсивный тангенциально-угловой оператор как анализатор синхронизации хаоса

© А.В. Макаренко

Научно-исследовательская группа „Конструктивная кибернетика“, Москва
E-mail: avm.science@mail.ru

Поступило в Редакцию 6 апреля 2011 г.

Предложен метод количественного анализа степени и параметров синхронизации хаотических колебаний двух связанных осцилляторов, позволяющий обнаруживать факт перестройки структуры аттракторов. Проведено тестирование метода на примере двух однонаправленно связанных логистических отображений. Показано, что данный метод устойчив не только к воздействию шума малой интенсивности, но и к нелинейному искажению анализируемого сигнала. Исследованы особенности перестройки структуры аттрактора ведомой системы тестового примера.

Задача анализа синхронизации хаотических сигналов и систем имеет весьма важное значение [1], как прикладное, так и теоретическое. Необходимо отметить, что под термином „синхронизация хаоса“ понимается целый ряд физических явлений [1–4]. Среди них выделяется синхронизация хаотических колебаний, являющаяся одним из наиболее интенсивно исследуемых явлений нелинейной динамики, привлекающим внимание большого числа исследователей [1,2,4]. Это явление практически всегда поднимает интереснейший вопрос: решение задачи оценивания степени синхронизации хаотических колебаний двух связанных осцилляторов.

Корректное решение означенной задачи требует адекватной количественной меры степени синхронизации, которая должна удовлетворять целому ряду условий [4], в том числе иметь ясный физический смысл, быть универсальной, робастной. При этом, исходя из свойств самой задачи оценивания степени синхронизации хаоса, логично предположить, что синхронизм так или иначе влияет на структуру колебаний зависимых осцилляторов. Ранее, в работах авто-

ра [5,6], был предложен оригинальный подход к анализу структуры динамических процессов во временной области, основанный на идее дифференциально-геометрических преобразований. Эти преобразования порождаются рекурсивным тангенциально-угловым оператором TG_k^a , формирующим систему угловых функций [5]:

$$TG_k^a = \text{tg} \prod_{i=1}^k \text{arctg} \left[(c_s)_i \frac{d}{dt} \right], \quad \alpha_x^T = c_{ss} \dot{x}, \quad \alpha_y^T = c_{ss} \dot{y},$$

$$\varphi_{0,x}^T = \frac{c_{as} c_{ss} \ddot{x}}{1 + c_{ss}^2 [\alpha_x^T]^2}, \quad \varphi_{0,y}^T = \frac{c_{as} c_{ss} \ddot{y}}{1 + c_{ss}^2 [\alpha_y^T]^2},$$

где $k = 1, \dots, N_G$ — порядок углового оператора; $c_{os} > 0$ — масштабный коэффициент; точкой сверху обозначено дифференцирование по t . Оператор TG_k^a действует на динамические процессы $x(t)$ и $y(t)$ — сигналы ведущей и ведомой систем соответственно. Наиболее важное значение для анализа структуры динамического процесса имеют две компоненты: α_o^T и $\varphi_{0,o}^T$. Причем величина α_o^T фактически описывает скоростные свойства (мгновенную крутизну), а $\varphi_{0,o}^T$ — нелинейные свойства (мгновенную кривизну) фронта процесса $o(t)$. Исходные процессы перед действием оператора TG_k^a и дальнейшими расчетами центрируются и нормируются:

$$x(t) \rightarrow \frac{x(t) - M[x]}{\int_T |x(t)| dt}, \quad y(t) \rightarrow \frac{y(t) - M[y]}{\int_T |y(t)| dt}. \quad (1)$$

Здесь и далее: $M[o]$ — оператор математического ожидания; T — период оценивания.

Дополнительно формируются функции $f_s = x + y$, $f_r = x - y$ и аналогично α_s^T , α_r^T , $\varphi_{0,s}^T$, $\varphi_{0,r}^T$. Над f_o , α_o^T и $\varphi_{0,o}^T$ определяются L_1 меры их полной интенсивности [7]:

$$I_o^{FT} = \int_T |f_o(t)| dt, \quad I_o^{AT} = \int_T |\alpha_o^T(t)| dt, \quad I_o^{\Phi T} = \int_T |\varphi_{0,o}^T(t)| dt. \quad (2)$$

Тогда степень синхронизации δ процессов x и y возможно определить по следующим мерам, при этом $\delta_\circ \in [0, 1]$:

$$\delta_f = \frac{|I_s^{FT} - I_r^{FT}|}{\int_T |x(t)| + |y(t)| dt}, \quad \delta_\alpha = \frac{|I_s^{AT} - I_r^{AT}|}{\int_T |\alpha_x^T(t)| + |\alpha_y^T(t)| dt},$$

$$\delta_\varphi = \frac{|I_s^{\Phi T} - I_r^{\Phi T}|}{\int_T |\varphi_{0,x}^T(t)| + |\varphi_{0,y}^T(t)| dt}. \quad (3)$$

Отметим, что δ_\circ фактически измеряют симметрию компонент вектора $[x(t), y(t)]^T$ относительно их циклической перестановки [8]. Знаком \circ^T обозначена операция транспонирования. При этом симметрия измеряется в пространстве P_0 [5,6].

Предложенный подход к изучению синхронизации хаоса был применен для исследования процесса выхода из режима полной синхронизации хаоса в системе двух однонаправлено связанных логистических отображений:

$$x_{k+1} = 4\lambda x_k(1 - x_k), \quad y_{k+1} = 4\lambda [y_k + \gamma(x_k - y_k)] (1 - [y_k + \gamma(x_k - y_k)]), \quad (4)$$

где x_k, y_k — переменные состояния соответственно ведущего и ведомого процессов, $x, y \in [0, 1]$; γ — параметр связи между процессами, $\gamma \in [0, 1]$; λ — управляющий параметр, задающий режим колебаний, $\lambda \in [0, 1]$. Логистическое отображение к настоящему времени хорошо изучено [9] и является эталонным объектом нелинейной и хаотической динамики [3]. Расчет оценок величин δ_\circ и $I_y^{\circ T}$ проводился на интервале $k \in [1 \cdot 10^5, 3 \cdot 10^5]$. Подобный сдвиг от $k = 1$ объясняется необходимостью сведения паразитного влияния переходного процесса к минимуму. Кроме того, все оценки анализируемых величин усреднялись по 300 реализациям начальных условий: $x_1 = \xi_1, y_1 = \xi_2$, где $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ — некоррелированные равномерно распределенные случайные величины. Это позволило нейтрализовать на траекториях процессов x и y эффект памяти, индуцированный начальными условиями. Значение параметра связи изменялось на интервале $\gamma \in [0, 0.5]$ с дискретой $1 \cdot 10^{-4}$. Значение управляющего параметра было принято $\lambda = 0.95$ — режим существования в (4) развитого хаоса [3]. Выбор объясняется необходимостью взаимного анализа и согласования результатов, полученных в настоящей работе с результатами работы [4].

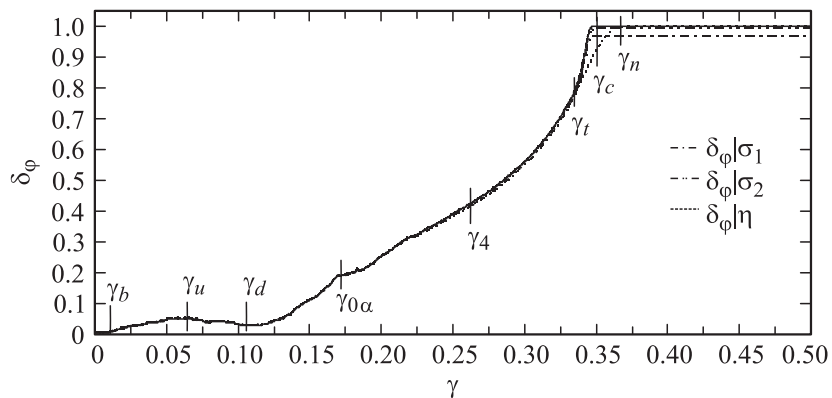


Рис. 1. Зависимость коэффициента синхронизации δ_φ от значения параметра связи γ .

Робастность предложенной меры синхронизации хаоса (3) проверялась при аддитивном подмешивании в ведомую систему малого шума:

$$x_k \rightarrow x_k + \eta(\xi'_k - x_k), \quad \eta = 10^{-5}, \quad \xi'_k \in [0, 1], \quad (5)$$

где ξ'_k — равномерно распределенная случайная величина. При этом в качестве наблюдаемой использовалась не модифицированная последовательность x .

Мера синхронизации хаоса (3) также испытывалась на предмет устойчивости к нелинейному искажению исследуемых сигналов. Для этого наблюдаемая реализация ведущей системы модифицировалась следующим образом:

$$x_k \rightarrow x_k + \sigma_i x_k^2, \quad \sigma_1 = 0.05, \quad \sigma_2 = 0.2. \quad (6)$$

Результаты расчетов для величины δ_φ приведены на рис. 1. Из его анализа следует, что предложенная мера действительно обнаруживает факт выхода исследуемой системы (4) из режима полной синхронизации. Коэффициент δ_φ начинает уменьшаться от 1 при $\gamma_c = 0.35$ до ≈ 0.0272 при $\gamma_d \approx 0.10151$. Затем наблюдается участок локального повышения δ_φ до ≈ 0.0527 при $\gamma_u \approx 0.0639$. Далее следует спад до $\approx 5 \cdot 10^{-3}$ при $\gamma_b \approx 0.01$, и этот уровень приблизительно держится при уменьшении коэффициента связи до 0.

При введении в систему малого шума (5) выход из синхронизации начинается раньше, при $\gamma_n \approx 0.3684$. Это объясняется началом в ведомой системе пузыряющегося поведения [4,10]. Коэффициент синхронизации δ_ϕ заметно различается для систем, невозмущенной и с добавленным шумом, только в области $\gamma \in [\gamma_l, \gamma_n]$, $\gamma_l \approx 0.3365$. Это вызвано негрубостью режима синхронизации на этом участке [4], но, в общем, мера δ_ϕ устойчива к введению в систему малого шума.

При нелинейной модификации исследуемых сигналов по типу (6), при $\gamma > \gamma_c = 0.35$, возмущенная система показывает более низкий конечный уровень синхронизации. Этот факт вполне логичен, ибо при обобщенной синхронизации $y(t) = F[x(t)]$, если оператор $F[\circ]$ неизвестен, невозможно сделать однозначный вывод, чем вызвано уменьшение коэффициента синхронизации: нелинейным искажением наблюдаемых сигналов или неполным синхронизмом систем [1]. Таким образом, мера (3) также устойчива и к нелинейному искажению исследуемых сигналов по типу (6), а следовательно, применима для изучения обобщенной синхронизации. Отметим, что выводы для величин δ_f и δ_α аналогичны.

Само по себе измерение коэффициента синхронизации, конечно, важно, но его явно недостаточно для полного описания процессов, протекающих в ведомой системе. Необходимо также изучение структуры аттракторов, формирующихся в системе y при различных значениях параметра γ . Например, в работе [4] указано, что при коэффициенте связи $\gamma = 0.14$ в ведомой системе (4) наблюдается перестройка аттрактора. Предлагаемый подход позволяет диагностировать структурные изменения аттракторов при изменении степени синхронизации в системе. Для этого необходимо изучить поведение централизованных величин \bar{I}_y^{oT} в зависимости от параметра связи γ . Эта зависимость приведена на рис. 2, где выделен ряд значений γ , в том числе: $\gamma_1 = 0.1241$, $\gamma_2 = 0.14$, $\gamma_3 = 0.1558$ и $\gamma_4 = 0.2606$, причем при γ_{1-3} интенсивность $I_y^{oT} > I_x^{oT}$, а при γ_4 — $I_y^{oT} < I_x^{oT}$. Напомним, что при расчете величин I_y^{oT} производилась нормировка (1) исходных временных рядов $x(t)$ и $y(t)$. Следовательно, с учетом физического смысла величины I_y^{oT} , ее изменение нельзя отнести только к сжатию/растяжению аттрактора ведомой системы, которое в действительности, конечно же, присутствует. Таким образом, графики на рис. 2 отражают именно структурную перестройку аттрактора ведомой системы при изменении степени воздействия на нее ведущей системы. Величина $\gamma_{0\alpha} = 0.1718$ была определена как

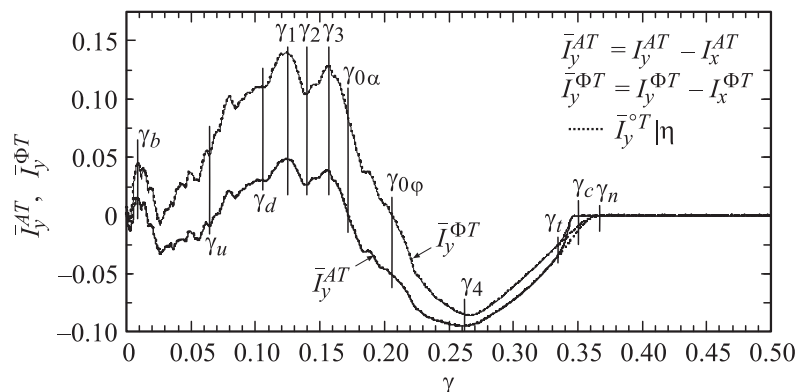


Рис. 2. Зависимость интенсивностей I_y^{AT} и $I_y^{\Phi T}$ от значения параметра связи γ .

контрольная ($I_y^{AT} = I_x^{AT}$), относительно которой анализировалась суть изменений структуры аттракторов при γ_3 и γ_4 .

Для определения сути различий аттракторов процесса $y(t)$, при различных γ , анализировалась следующая величина:

$$S_y^w(w) = \int_T \delta[w - w_y(t)] dt, \tag{7}$$

где δ — дельта-функция Дирака, w_y — некая характеристика сигнала $y(t)$. Спектрограммы $S_y^\alpha(\alpha_y^T)$ и $S_y^\phi(\phi_{0,y}^T)$ для компонент α_y^T и $\phi_{0,y}^T$ приведены на рис. 3. Из его данных следует, если сравнить левый и правый столбцы с центральным, существенная разница между структурой аттракторов ведомой системы при коэффициентах связи γ_3 и γ_4 .

Спектр S_y^α демонстрирует, что на траектории $y(t)$ при γ_3 присутствует большое количество крутых фронтов: отрицательных — спектральные линии $p_{1\alpha}$, $p_{2\alpha}$, и положительных — линии $p_{3\alpha}$, $p_{4\alpha}$. В свою очередь, спектр S_y^ϕ указывает на наличие значимого количества острых импульсов, имеющих практически максимальную кривизну на всем периоде T . Ориентация импульсов: вершиной вниз — линия $p_{3\phi}$, вершиной вверх — линии $p_{1\phi}$ и $p_{2\phi}$. Отметим, что при γ_2 спектры S_y^α и S_y^ϕ качественно соответствуют таковым при γ_3 . При этом спектральная полоса $p_{2\alpha}$ занижена до ≈ 1.8 , $p_{3\alpha}$ — до ≈ 3.1 , спектральные полосы

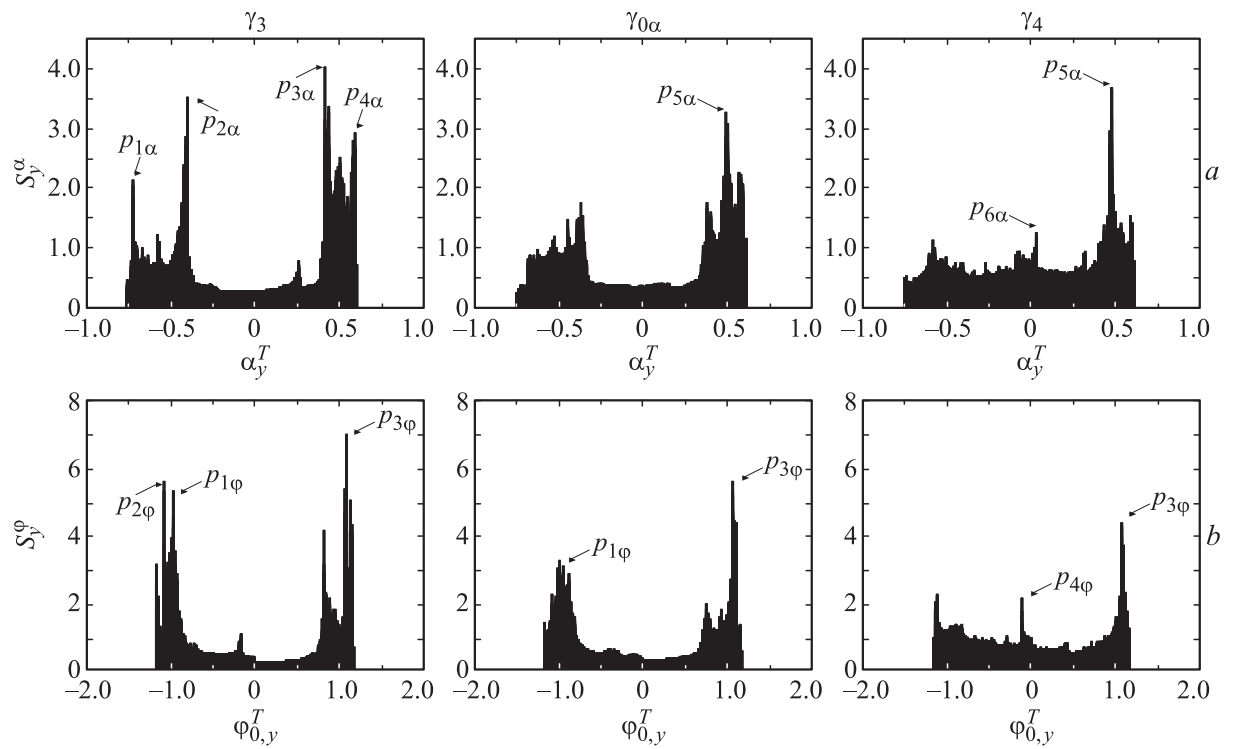


Рис. 3. Спектрограммы $S_y^\alpha(\alpha_y^T)$ (a) и $S_y^\phi(\phi_{0,y}^T)$ (b) для трех значений параметра связи γ .

$p_{1\varphi}$ и $p_{3\varphi}$ имеют практически одинаковую интенсивность ≈ 8.5 , а полоса $p_{2\varphi}$ — исчезает. Эти данные полностью подтверждают предположение, высказанное в работе [4], что при коэффициенте связи $\gamma_2 = 0.14$ в ведомой системе возникает неустойчивое квазипериодическое движение, на котором траектория $y(t)$ проводит значительную часть времени.

Существенное снижение значений величин I_y^{cT} при γ_4 может быть объяснено появлением, в ведомой системе, сглаженных импульсов колебаний траектории $y(t)$, количественно значимых по своей общей длительности. Действительно, в спектре S_y^a (рис. 3, *a*) присутствует линия p_{6a} — слабо положительные фронты и окружающий ее „пьедестал“, в том числе содержащий слабо отрицательные фронты. На спектре S_y^p (рис. 3, *b*) также выделяются: линия p_{4p} — сглаженные вершины импульсов колебаний, ориентированные вершиной вверх; и „пьедестал“, содержащий сглаженные вершины импульсов колебаний, ориентированные вершиной вниз. Кроме того, спектр S_y^p в целом указывает на более плавный характер эволюции траектории $y(t)$: вырождение блока линий, прилегающих к $p_{1\varphi}$ и $p_{2\varphi}$, существенное уменьшение интенсивности линии $p_{3\varphi}$.

Отметим, что дополнительную информацию о структуре аттракторов траектории $y(t)$ может дать анализ двойных спектров $S_y^a(\alpha_y^T, \varphi_{0,y}^T)$ и $S_y^p(\alpha_y^T, \varphi_{0,y}^T)$.

Таким образом, в данной работе предложен новый подход к количественному анализу степени синхронизации двух связанных хаотических осцилляторов, который также позволяет исследовать структурную перестройку аттракторов в ведомых системах. На примере двух однонаправлено связанных осцилляторов, входящих в режим полной синхронизации, проведено его тестирование. Показана робастность предложенной меры синхронизации к введению в системы малого шума и нелинейным искажениям анализируемых сигналов. Кроме того, продемонстрировано изменение структуры аттрактора ведомой системы в зависимости от параметра связи между системами и раскрыта суть этих изменений. Предполагается в будущем распространить предложенный подход на исследование многомерных систем и другие типы синхронизации.

Список литературы

- [1] *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001.

- [2] *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., Zhou C.* // *Physics Reports*. 2002. V. 366. P. 1.
- [3] *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / Пер. с англ. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 320 с. (*Tabor M.* Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction. Wiley-Interscience, 1989. 384 p.)
- [4] *Шабунин А.В., Демидов В.В., Астахов В.В., Анищенко В.С.* // *Письма в ЖТФ*. 2001. Т. 27. В. 11. С. 78–85.
- [5] *Макаренко А.В.* // *Изв. вузов ПНД*. 2006. № 4. С. 71–86.
- [6] *Макаренко А.В.* // *Междунар. научн. конференция „Моделирование нелинейных процессов и систем“ / Сб. докладов*. М.: МГТУ СТАНКИН, 2008. Т. 1. С. 18–31.
- [7] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
- [8] *Эллиот Дж., Добер П.* Симметрия в физике / Пер. с англ. Т. 1, 2. М.: Мир, 1983. (*Elliot P., Dawber P.G.* Symmetry in Physics. V. 1, 2. Macmillan, London, 1979).
- [9] *May R.M.* // *Nature*. 1976. V. 261. P. 459.
- [10] *Ashvin P., Beuetsu J., Stawart I.* // *Phys. Lett. A*. 1994. N 193. P. 126–139.