

09

Хаотическая динамика генератора с колебательным контуром без потерь

© Э.В. Кальянов

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
(Фрязинский филиал), Фрязино, Моск. обл.
E-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

Поступило в Редакцию 22 марта 2011 г.

Рассмотрены уравнения, описывающие новую автоколебательную систему, обладающую хаотической динамикой. В системе используется колебательный контур, не содержащий потерь, благодаря чему обеспечивается хаос, в котором реализуется нерегулярное изменение амплитуды („амплитудный хаос“) при малой вариации частоты. Представлены бифуркационные диаграммы (однопараметрическая и двухпараметрическая), реализации колебательного процесса и спектры мощности.

Изучению автоколебательных систем с хаотическим поведением уделяется большое внимание. В настоящее время известно относительно много различных хаотических генераторов — физически реализуемых и искусственно сконструированных. Они представляют интерес как с позиций изучения новых воззрений в нелинейной динамике, так и применительно к практике. Реалистичные модели хаотических генераторов находят практическое применение [1,2]. Искусственно сконструированные системы [3] используются для моделирования хаотических процессов в физике, химии, биологии и для изучения различных явлений в хаотических системах. Особенно широко используются классические уравнения Рёсслера, описывающие гипотетическую химическую реакцию. Уравнения искусственно сконструированных хаотических систем применяются и непосредственно на практике, например для шифрования информации хаосом [4].

В ряде случаев, в частности при шифровании информации хаосом, целесообразно использовать уравнения хаотических систем, обладающих в основном нерегулярными изменениями амплитуды, когда разброс значений средней частоты невелик. Такой хаос по аналогии с амплитудным шумом можно назвать „амплитудным хаосом“, хотя обычно

присутствует и нерегулярное изменение средней частоты („частотный хаос“). В данной работе сделана попытка создания хаотической автоколебательной системы, обеспечивающей (при нерегулярном изменении амплитуды) по возможности малые частотные изменения колебаний.

В качестве исходной математической модели воспользуемся кольцевой автоколебательной системой, состоящей из нелинейного усилителя, дифференцирующего элемента и колебательного контура. В этом случае уравнение генератора имеет вид

$$d^2x/dt^2 + \varepsilon dx/dt + x = (1/\sigma)dF(x)dt, \quad (1)$$

где ε — параметр диссипации, σ — постоянная дифференцирующего элемента, $F(x)$ — характеристика нелинейного усилителя.

Уравнение (1), при характеристике кубического типа с соответствующим выбором коэффициентов, преобразуется в классическое уравнение Ван-дер-Поля. При широко используемой характеристике нелинейного усилителя

$$F(x) = Dx \exp(-x^2), \quad (2)$$

где D — постоянный коэффициент, уравнение (1) стандартным приемом может быть сведено к системе двух уравнений первого порядка, имеющих вид:

$$\begin{aligned} dx/dt &= y, \\ dy/dt &= [\beta(1 - 2x^2) \exp(-x^2) - \varepsilon]y - x, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\beta = (D/\sigma)$ — параметр, определяющий усиление.

При малых значениях параметров β и ε система (3) имеет на плоскости x, y простой предельный цикл. Дополняя систему уравнений (3) так называемым присоединенным уравнением, как это сделано в [5] применительно к уравнению Ван-дер-Поля, получим

$$\begin{aligned} dx/dt &= y, \\ dy/dt &= [\beta(1 - 2z) \exp(-z) - \varepsilon]y - x, \\ dz/dt &= (x^2 - z)/\alpha, \end{aligned} \quad (4)$$

где α — постоянный коэффициент.

При $\alpha = 0$ присоединенное уравнение дает решение в виде $z = x^2$ и система (4) преобразуется в уравнения (3). Если $\alpha \neq 0$, но значительно меньше единицы, то предельный цикл, соответствующий решениям уравнений (4), располагается на поверхности, близкой к параболической. С увеличением α эта поверхность усложняется, а предельный цикл преобразуется в хаотический аттрактор. При этом хаос сохраняется и при $\varepsilon = 0$, так что система (4) может быть записана в более простом виде

$$\begin{aligned} dx/dt &= y, \\ dy/dt &= \beta(1 - 2z) \exp(-z)y - x, \\ dz/dt &= (x^2 - z)/\alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Следует заметить, что хаотические генераторы с колебательным контуром без потерь известны. Помимо консервативной модели Спротта хорошо известна схема Чуа (см. [3]), которая с колебательным контуром без потерь при кубической характеристике нелинейного элемента рассматривается так же, как модифицированный генератор Ван-дер-Поля–Дуффинга [6].

Численный анализ хаотической динамики модели, описываемой уравнениями (5), проводился методом Рунге–Кутты–Мерсона 4-го порядка при начальных условиях $x(0) = y(0) = z(0) = 0.1$.

На рис. 1, *a* показана однопараметрическая бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая изменение максимальных значений колебательного процесса $x(t)$ (обозначенных через $[x]$) в зависимости от параметра усиления β , когда $\alpha = 2$. На рис. 1, *b* приведено соответствующее изменение максимального характеристического показателя Ляпунова λ , а на рис. 1, *c* представлена двухпараметрическая бифуркационная диаграмма. Как видно (рис. 1, *a*), хаотизация колебательного процесса, отображаемая нерегулярным разбросом точек, соответствующих максимальным значениям $x(t)$, возникает через удвоение периода колебаний (по сценарию Фейгенбаума). Удвоение периода колебаний начинается при достижении параметром усиления значения $\beta \approx 2.6$. В интервале изменения параметра усиления $\beta \in [3.3, 3.64]$ возникает окно дехотизации с возбуждением колебаний, которым соответствует трехоборотный предельный цикл. Переход к однократным колебаниям реализуется при $\beta \approx 4.58$ после обратных бифуркаций

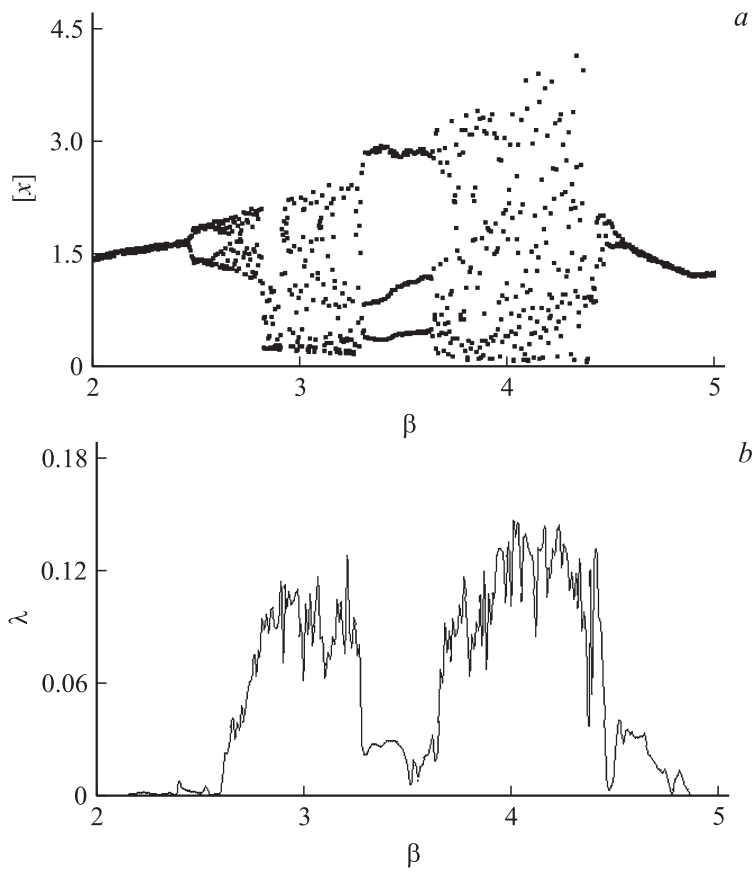


Рис. 1. Изменение максимальных значений колебаний $x(t)$ (*a*) в зависимости от параметра усиления, соответствующее изменение максимального характеристического показателя Ляпунова (*b*) и двухпараметрическая бифуркационная диаграмма (*c*).

удвоения периода колебаний. Характер изменения значений максимального характеристического показателя Ляпунова (рис. 1, *b*) соответствует изменению структуры колебаний, отображаемому бифуркационной диаграммой.

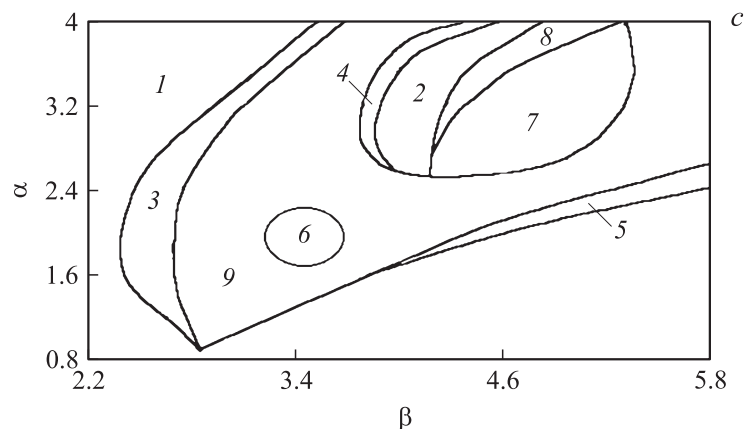


Рис. 1 (продолжение).

Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма отображает различные режимы работы на плоскости параметров β , α . Эта диаграмма построена на основе серии однопараметрических бифуркационных диаграмм, показывающих, как и диаграмма, представленная на рис. 1 α , изменение максимальных значений колебательного процесса $x(t)$ при изменении (увеличении) параметра усиления β при различных величинах параметра α . Области 1 и 2 двухпараметрической диаграммы отображают режимы возбуждения регулярных колебаний, которым в фазовом пространстве соответствуют однооборотные предельные циклы. В области 3 реализуются двухтактные колебания с переходом к хаосу по сценарию Фейгенбаума, в областях 4, 5 — двухтактные движения после выхода из хаоса путем обратных бифуркаций удвоения периода. В областях 6, 7 возбуждаются трехтактные колебания, а в областях 8, 9 — хаотические движения.

Как следует из двухпараметрической бифуркационной диаграммы, наиболее широкий интервал значений параметра усиления, при которых реализуется хаос, существует вблизи значений $\alpha = 2.4$. Однако при этой величине α в спектре мощности $S(\omega)$ возбуждающихся хаотических колебаний могут проявляться резонансные „выбросы“, в основном при параметрах усиления, меньших значения $\beta \approx 4.2$. Расчеты показывают, что с увеличением параметра усиления частота, на которой наблюдается

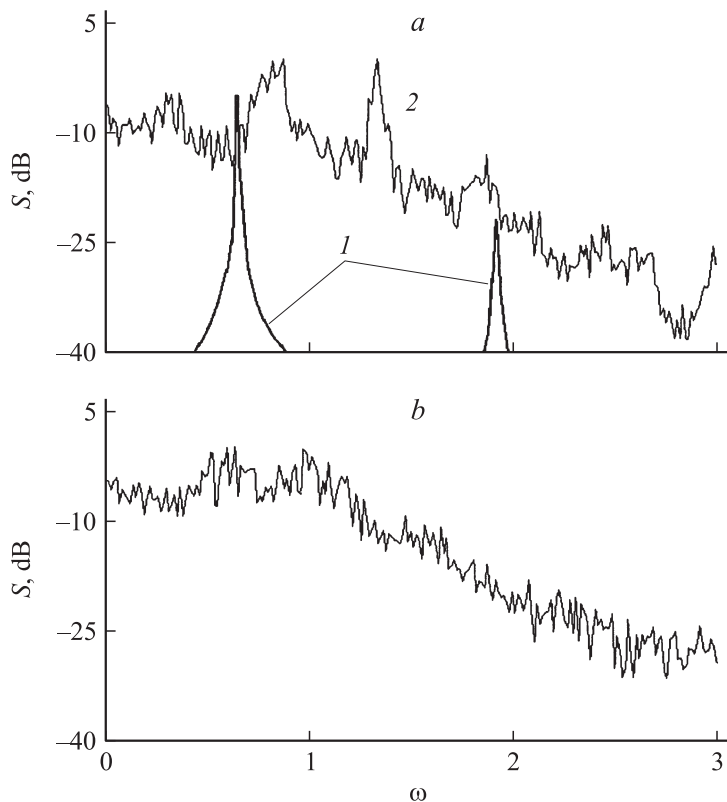


Рис. 2. Спектры мощности при регулярных и хаотических колебаниях: a — $\beta = 5.8$ (кривая 1) и $\beta = 4$ (кривая 2), b — $\beta = 5$.

резонансный выброс, снижается. Так, частота регулярных колебаний при $\beta = 5.8$ (рис. 2, a , кривая 1) ниже, чем частота резонансного выброса, наблюдающегося в случае хаоса, реализующегося при $\beta = 4$ (рис. 2, a , кривая 2). При несколько большем значении параметра усиления (при $\beta = 5$) хаос становится развитым и резонансные выбросы в спектре мощности исчезают (рис. 2, b). При этом спектр мощности занимает широкую полосу частот и имеет относительно малые перепады спектральной плотности мощности хаотических колебаний.

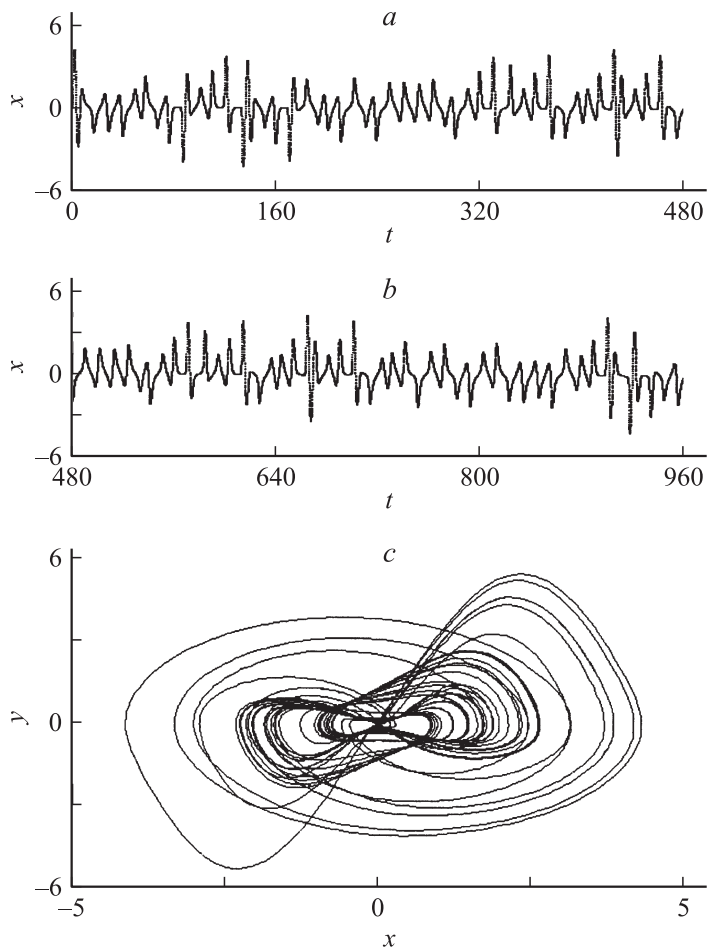


Рис. 3. Фрагменты реализаций хаотического колебательного процесса $x(t)$ при $\beta = 5$ (*a, b*) и хаотический аттрактор (*c*).

Фрагменты реализаций хаотического колебательного процесса $x(t)$ при $\beta = 5$, рассчитанные в интервалах времени $t \in [0, 480]$ (рис. 3, *a*) и $t \in [480, 960]$ (рис. 3, *b*), отображают нерегулярную структуру движений. Видно, что возвраты Пуанкаре нерегулярны, интервал времени между возвратами меняется. При этом переходный процесс установ-

ления колебаний в отличие от процесса установления хаотических колебаний в системах с запаздыванием [7], как следует из рис. 3, *a*, практически отсутствует. Аттрактор при $\beta = 5$, рассчитанный в интервале времени $t \in [480, 960]$ в проекции на плоскость x, y , имеет вид, показанный на рис. 3, *с*. Расчеты стереоскопических аттракторов в трехмерном пространстве показывают, что хаотические траектории движения изображающей точки при $\beta = 5$ расположены в трехмерном фазовом пространстве на поверхности, близкой к параболической.

Приведенные результаты численного анализа представленной модели генератора, описываемого уравнениями (5), свидетельствуют о возможности возбуждения амплитудного хаоса в этой модели автоколебательной системы. Рассмотренная автоколебательная система представляет интерес для практической реализации способа шифрования информации, основанного на использовании хаотических сигналов.

Автор благодарен В.И. Калинину за полезные замечания при обсуждении материала статьи.

Список литературы

- [1] Залогин Н.Н., Кислов В.В. Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнических и информационных системах. М.: Радиотехника, 2006. 208 с.
- [2] Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2002. 252 с.
- [3] Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2001. Лекция 5. С. 67.
- [4] Кальянов Г.Н., Кальянов Э.В. // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53. № 4. С. 459–467.
- [5] Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. Гл. 1. С. 18.
- [6] Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова И.А. // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. В. 7. С. 69–76.
- [7] Кальянов Э.В. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. В. 15. С. 26–31.