

# Топология и свойства нуль-градусной доменной границы в поперечном магнитном поле

© Е.Б. Магадеев, Р.М. Вахитов

Башкирский государственный университет,  
Уфа, Россия

E-mail: maggreat@pochta.ru, VakhitovRM@yahoo.com

(Поступила в Редакцию в окончательном виде 20 октября 2010 г.)

Исследуются условия возникновения, структура и устойчивость нуль-градусных доменных границ с некруговыми траекториями вектора намагниченности в кубических ферромагнетиках с наведенной вдоль [011] одноосной анизотропией. Установлено, что магнитные неоднородности с подобной топологией могут возникать только при наличии внешнего магнитного поля, перпендикулярного плоскости доменной границы. Показано, что при малых значениях величины поля соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа могут быть сведены к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, решения которых описывают структуру указанных неоднородностей, а собственные значения связанных с ними дифференциальных операторов определяют условия их устойчивости.

## 1. Введение

Среди разнообразных по конфигурации доменных структур, возникающих в магнитных материалах, особый интерес представляют магнитные неоднородности уединенного типа, в частности образующиеся на дефектах [1,2]. Они играют важную роль при фазовых переходах типа спиновой переориентации [3,4], в процессах намагничивания и перемагничивания реальных кристаллов [5–7], а также при „генерировании“ новых структур [2,8].

В то же время при теоретическом анализе доменной структуры, возможной в кубических ферромагнетиках с наведенной одноосной анизотропией (например, в эпитаксиальных пленках ферритов-гранатов; в них наведенная одноосная анизотропия обусловлена ростовым или магнострикционным механизмами [5]), также возникают решения, которым отвечают магнитные неоднородности типа нуль-градусных доменных границ ( $0^\circ$ ДГ) [9]. Они представляют собой некое возмущение однородного состояния с блоховским или неелевским разворотом спинов в ДГ. Эти неоднородности возникают (как решения соответствующих уравнений) в окрестности спин-переориентационного фазового перехода (СПФП) первого рода в области сосуществования двух магнитных фаз, одна из которых является устойчивой, а другая — метастабильной. При этом годограф вектора намагниченности  $\mathbf{M}$  описывает дугу окружности, которая начинается с направления  $\mathbf{M}_0$ , отвечающего метастабильной фазе. Поэтому их можно квалифицировать как крупномасштабные флуктуации вектора намагниченности, возникающие вблизи СПФП [9,10]. Кроме того, как показывают расчеты [11] и следует из экспериментов [1], магнитные неоднородности, зарождающиеся на дефектах, имеют структуру, схожую с  $0^\circ$ ДГ,

а потому решения, найденные в [9], являются наиболее приемлемой их аппроксимацией. Они неустойчивы (их вклад в энергию магнетика положителен), однако при учете конечности образца и наличия дефектов в нем они становятся устойчивыми образованиями. Результаты, полученные в [10,11] по моделированию процессов зародышеобразования при СПФП, вполне согласуются с экспериментальными данными [4]. Однако их анализ позволяет утверждать, что магнитные неоднородности, образующиеся на дефектах, имеют более сложную топологию, не описываемую в рамках моделей  $0^\circ$ ДГ блоховского или неелевского типа. Очевидно, для описания таких структур необходимо рассматривать  $0^\circ$ ДГ с некруговой траекторией вектора намагниченности  $\mathbf{M}$ , т.е. исследовать случай, когда его полярный  $\theta$  и азимутальный  $\varphi$  углы являются функциями пространственной координаты [12]. Отыскание таких решений является трудноразрешимой задачей в силу нелинейности соответствующих уравнений Эйлера–Лагранжа. Однако в некоторых случаях, как показано далее, это удастся реализовать.

## 2. Основные уравнения

Рассмотрим неограниченный кубический ферромагнетик в форме пластины, в которой имеет место и наведенная вдоль оси [011] одноосная анизотропия (пластина (011) [10]). Тогда энергию магнитных неоднородностей рассматриваемой пластины, приведенную к величине  $E_0 = K_u L_x D \Delta_0$ , можно представить в виде

$$E = \int_{\mathbb{R}} (\theta'^2 + \sin^2 \theta \varphi'^2 + 2F(\theta, \varphi, \psi)) d\xi,$$

где

$$F(\theta, \varphi, \psi) = P_a(\theta, \varphi - \psi) + P_s(\theta, \varphi) + P_h(\theta, \varphi, \psi),$$

$$P_s(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} Q^{-1} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi,$$

$$P_a(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \left\{ 1 + \kappa_p \sin^2 \varphi + \frac{\kappa_1}{4} (1 - 3 \sin^2 \varphi) \times (2 - 3 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \right\}.$$

Здесь  $P_h = -\mathbf{M}\mathbf{H}/2K_u$  характеризует вклад внешнего магнитного поля напряженностью  $\mathbf{H}$ ,  $\kappa_p = K_p/K_u$ ,  $\kappa_1 = K_1/K_u$ ,  $\Delta_0 = (A/K_u)^{1/2}$ ,  $Q = K_u/2\pi M_s^2$  — фактор качества материала,  $A$  — обменный параметр,  $K_u$ ,  $K_p$  — константы соответственно перпендикулярной и ромбической составляющих наведенной одноосной анизотропии,  $K_1$  — константа кубической анизотропии,  $M_s$  — намагниченность насыщения,  $\xi = y/\Delta_0$  ( $y$  — координата, вдоль которой магнетик неоднороден),  $\theta'$ ,  $\varphi'$  — производные по  $\xi$ ,  $D$  — толщина пластины,  $L_x$  — ее размер вдоль оси  $Ox$  ( $L_x \rightarrow \infty$ ). Система координат выбрана так (рис. 1), что  $Oz \parallel [011]$ ,  $Ox$  лежит в плоскости ДГ, составляя угол  $\psi$  с осью  $[100]$ . Кроме того, предполагается, что пластина является достаточно толстой ( $D \gg \Delta_0$ ), вследствие чего пренебрегается размагничивающими полями от поверхностных зарядов [10].

Условия минимума энергии  $E$  сводятся к уравнениям Эйлера–Лагранжа, которые примут вид

$$\theta'' - \sin \theta \cos \theta \varphi'^2 = \frac{\partial F}{\partial \theta}, \quad (1)$$

$$\varphi'' + 2 \operatorname{ctg} \theta \varphi' \theta' = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \quad (2)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial \psi} = 0 \quad (3)$$

при выполнении следующего неравенства, определяющего устойчивость решений:

$$\delta^2 E > 0. \quad (4)$$

Рассмотрим вначале случай  $\mathbf{H} = 0$  и будем считать, что  $F$  можно представить в виде  $F = P + \lambda N$ , где  $\lambda$  — малое отклонение от фиксированного значения какого-то из материальных параметров. Тогда, применяя к системе уравнений (1)–(3) теорию возмущений, разложим решения в степенной ряд по параметру  $\lambda$  с точностью до линейных членов

$$\theta = \theta_0 + \lambda \theta_1, \quad \varphi = \lambda \varphi_1, \quad \psi = \psi_0 + \lambda \psi_1. \quad (5)$$

В нулевом приближении система (1)–(3) приобретает вид

$$\theta_0'' = \frac{\partial P}{\partial \theta} \Big|_0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} \Big|_0 \equiv 0, \quad (7)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\partial P}{\partial \psi} \Big|_0 = 0, \quad (8)$$

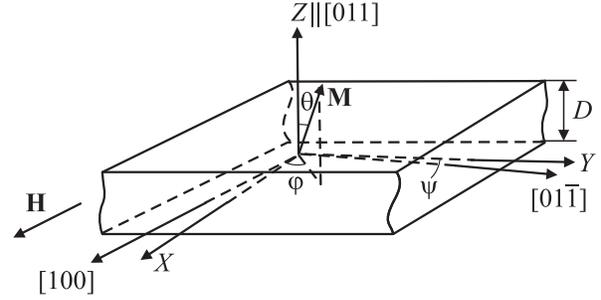


Рис. 1. Геометрия задачи.

где предполагается следующая подстановка:  $\theta = \theta_0$ ,  $\varphi = \varphi_0 = 0$ ,  $\psi = \psi_0$ . Соответственно в первом приближении имеем

$$\varphi_1'' + 2 \operatorname{ctg} \theta_0 \theta_0' \varphi_1' = \frac{1}{\sin^2 \theta_0} \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} \Big|_0 \varphi_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \psi} \Big|_0 \psi_1 + \frac{\partial N}{\partial \varphi} \Big|_0 \right\}, \quad (9)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} \Big|_0 \psi_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial \psi} \Big|_0 \varphi_1 + \frac{\partial N}{\partial \psi} \Big|_0 \right\} = 0. \quad (10)$$

Здесь уравнение (9) получено с учетом (7). Так как в выражении  $P_a$  функции, зависящие от  $(\varphi - \psi)$ , есть полиномы относительно  $\sin^2(\varphi - \psi)$ , то из (7) следует также, что  $\sin 2\psi_0 = 0$ , откуда имеем

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi} \Big|_0 \equiv 0, \quad \frac{\partial N}{\partial \psi} \Big|_0 \equiv 0.$$

Таким образом, соотношения (9) и (10) не содержат неоднородных частей, поэтому  $\varphi_1$  пропорционально  $\psi_1$ . Вследствие этого добавка к энергии, связанная с выходом вектора намагниченности из плоскости  $0^\circ$  ДГ, пропорциональна  $\psi_1^2$ , причем коэффициент пропорциональности не может быть отрицательным (это означало бы неустойчивость решения). Очевидно, что такая добавка минимизируется значением  $\psi_1 = 0$ . Отсюда следует  $\varphi_1 = 0$ , т. е. отсутствие выхода вектора намагниченности из плоскости  $0^\circ$  ДГ. Таким образом, в нулевом поле существование квазиблоховских  $0^\circ$  ДГ невозможно, что, однако, не указывает на отсутствие некруговых траекторий вектора намагниченности более сложного вида.

Будем считать, что ферромагнетик помещен в слабое внешнее магнитное поле напряженностью  $\mathbf{H} = H\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e} = (e_x, e_y, e_z)$ ,  $|\mathbf{e}| = 1$ . Тогда в качестве малого параметра можно использовать  $\lambda = M_s H / 2K_u$ . В этом случае  $N$  запишется в следующем виде:

$$N = -[e_x \sin \theta \cos(\varphi - \psi) + e_y \sin \theta \sin(\varphi - \psi) + e_z \cos \theta].$$

Тогда

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi} \Big|_0 = \frac{\partial N}{\partial \psi} \Big|_0 = \varepsilon \sin \theta_0, \quad \varepsilon = -[e_x \sin \psi_0 + e_y \cos \psi_0]. \quad (11)$$

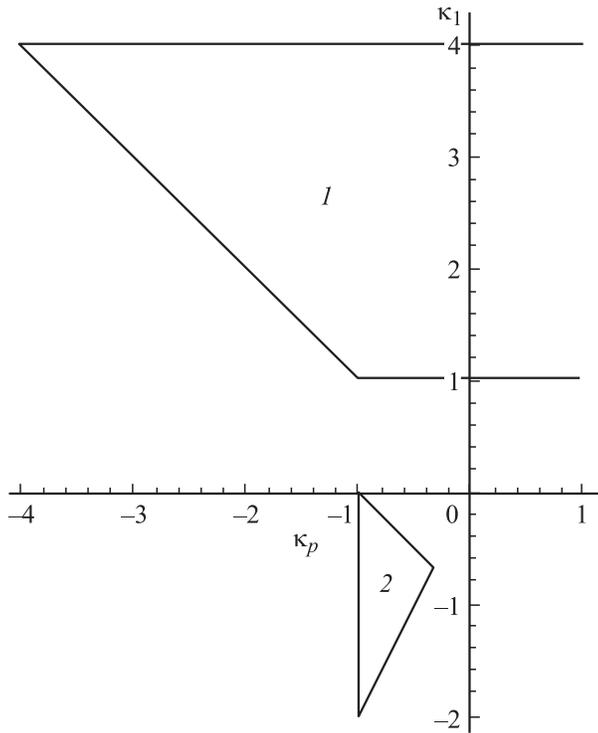


Рис. 2. Области существования и устойчивости. 1 —  $0^\circ\text{ДГ}(1)$ , 2 —  $0^\circ\text{ДГ}(2)$ .

Из (11) видно, что  $|\varepsilon|$  представляет собой направляющий косинус вектора  $\mathbf{H}$  на нормаль к плоскости  $0^\circ\text{ДГ}$ . Таким образом, продольные компоненты слабого внешнего поля не влияют на  $\varphi_1(\xi)$ , поэтому в дальнейшем будем полагать, что  $\varepsilon = 1$ , т.е. внешнее поле перпендикулярно плоскости  $0^\circ\text{ДГ}$ .

Уравнение (9) с учетом (11) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1'' + 2 \operatorname{ctg} \theta_0 \theta_0' \varphi_1' - \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta_0} \frac{\partial^2 P_a}{\partial \varphi^2} \Big|_0 + Q^{-1} \right\} \varphi_1 \\ = \frac{1}{\sin \theta_0} - \frac{1}{\sin^2 \theta_0} \frac{\partial^2 P_a}{\partial \varphi^2} \Big|_0 \psi_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Предполагая, что  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \sin \theta_0 = 1$ , из (10) и (12) получаем соответственно

$$p \lim_{\xi \rightarrow \infty} \varphi_1 = p \psi_1 - 1 \quad \text{и} \quad (p + Q^{-1}) \lim_{\xi \rightarrow \infty} \varphi_1 = p \psi_1 - 1, \quad (13)$$

где

$$p = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 P_a}{\partial \varphi^2} \Big|_0.$$

Из условия совместности системы (13) следует

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \varphi_1 = 0, \quad \psi_1 = 1/p. \quad (14)$$

Отсюда следует, что помимо выхода вектора  $\mathbf{M}$  из плоскости  $0^\circ\text{ДГ}$ , описываемого уравнением (12), наличие внешнего поля приводит также к повороту плоскости  $0^\circ\text{ДГ}$  на некоторый угол  $\Delta\psi = \lambda\psi_1 \sim H$ . Заметим

также, что в  $P$  не входят члены, связанные с полем, а потому утверждение  $\sin 2\psi_0 = 0$  остается в силе.

Несложно убедиться, что нулевые приближения имеют следующий вид:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \sqrt{\frac{4 - \kappa_1}{4(\kappa_1 - 1)}} \operatorname{ch} \sqrt{\kappa_1 - 1} \xi, \quad \varphi_0 = 0, \quad \psi_0 = 0$$

при  $1 < \kappa_1 < 4$  ( $0^\circ\text{ДГ}$  с  $\mathbf{M}_0 \parallel [100]$  —  $0^\circ\text{ДГ}(1)$ ), а также

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_0 = \sqrt{-\frac{1 + \kappa_p}{1 + \kappa_p + \kappa_1}} \operatorname{ch} \sqrt{-(1 + \kappa_p + \kappa_1)} \xi, \\ \varphi_0 = 0, \quad \psi_0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

при  $-1 < \kappa_p < -1 - \kappa_1$  ( $0^\circ\text{ДГ}$  с  $\mathbf{M}_0 \parallel [01\bar{1}]$  —  $0^\circ\text{ДГ}(2)$ ),

Из последнего неравенства (П4), выражающего условие устойчивости решений, следует, что для  $0^\circ\text{ДГ}(1)$  имеем дополнительное условие  $\kappa_p > -\kappa_1$ , а для  $0^\circ\text{ДГ}(2)$  условие  $\kappa_p < \kappa_1/2$  (рис. 2).

### 3. Структура и устойчивость $0^\circ\text{ДГ}$ в поперечном поле

Для  $0^\circ\text{ДГ}(1)$  из (12) и второго уравнения (14) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1'' + 2 \operatorname{ctg} \theta_0 \theta_0' \varphi_1' - \left\{ -\frac{3\kappa_1}{2} + \frac{5\kappa_1}{2} \sin^2 \theta_0 + \kappa_p + Q^{-1} \right\} \varphi_1 \\ = \frac{1}{\sin \theta_0} - 1 + \frac{5\kappa_1}{2(\kappa_1 + \kappa_p)} \cos^2 \theta_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Численное интегрирование этого уравнения показывает, что графики  $\varphi_1(\xi)$  при различных значениях материальных параметров имеют схожую колоколообразную

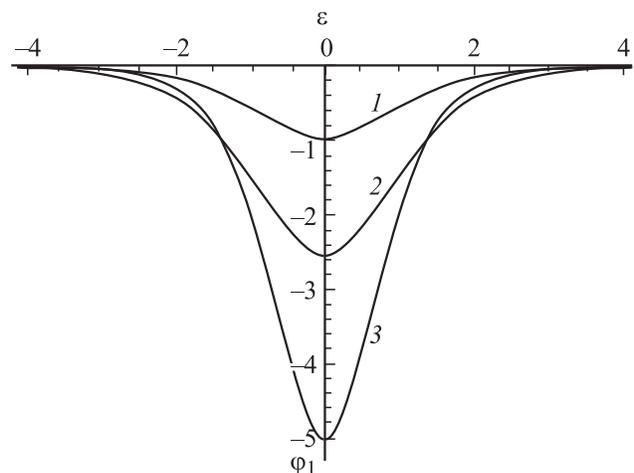
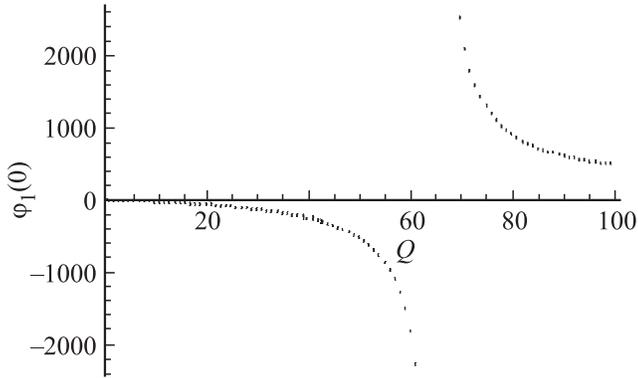


Рис. 3. Результаты численного расчета  $\varphi_1(\xi)$  для  $0^\circ\text{ДГ}(1)$  при различных значениях  $\kappa_1$ ,  $\kappa_p$  и  $Q$ : 1 — 2, 1 и 1; 2 — 2, 0 и 1; 3 — 3, 1 и 1.



**Рис. 4.** Зависимость амплитуды  $\varphi_1(0)$  от  $Q$  для  $0^\circ$ ДГ(1) при  $\kappa_1 = 2$ ,  $\kappa_p = 0$ .

форму (рис. 3), однако различаются шириной и амплитудой. При этом из анализа решения уравнения (15) следует существование некоторого критического значения  $Q_c$  (на рис. 4,  $Q_c \approx 62$ ), при котором амплитуда решений  $\varphi_1(0)$  имеет сингулярность и при переходе через него меняет знак. Очевидно, такое поведение амплитуды связано с потерей устойчивости  $0^\circ$ ДГ: ранее указанные нами условия их устойчивости были получены в нулевом приближении и должны быть дополнены условием неизменности знака амплитуды.

Рассмотрим уравнение

$$\hat{L}a(x) = ca(x) + F(x), \quad (16)$$

где  $\hat{L}$  — линейный дифференциальный оператор, имеющий четную собственную функцию  $a_0$ , соответствующую собственному значению  $c_0$  (для удобства будем считать его относящимся к дискретной части спектра, хотя это несущественно),  $c$  — некоторое число, а  $F(x)$  — четная функция. Пусть коэффициент в разложении  $a(x)$  по собственным функциям  $\hat{L}$  перед  $a_0$  равен  $A$ , а в разложении  $F(x)$  он равен  $B \neq 0$ . Тогда из (16) вытекает

$$Ac_0a_0(x) = cAa_0(x) + Ba_0(x),$$

откуда, учитывая, что  $a_0$  не равно нулю тождественно, получаем

$$A = \frac{B}{c_0 - c}.$$

Это выражение показывает, что при изменении  $c$  в окрестности  $c_0$  амплитуда решения (16), приблизительно равная  $Aa_0(0)$  в силу больших абсолютных значений  $A$ , носит сингулярный характер и меняет знак. Поскольку именно так ведет себя амплитуда  $\varphi_1(0)$ , естественно предположить, что точка потери устойчивости  $0^\circ$ ДГ совпадает с некоторым собственным значением соответствующего оператора.

Заметим, что в случае, если  $\hat{L}$  непрерывно зависит от параметра, при определенных значениях которого

имеет только непрерывную часть спектра, ограниченную сверху, то с изменением этого параметра дискретные уровни будут отщепляться от непрерывной части, т.е. начиная со второго они будут располагаться между непрерывной частью и первым уровнем. Таким образом, первый уровень с изменением параметра будет двигаться непрерывно, оставаясь при этом наивысшим. Учитывая же, что ему соответствует четная собственная функция, окончательно заключаем, что граница устойчивости  $0^\circ$ ДГ определяется собственным значением  $c_1$  соответствующего оператора, относящимся к первому уровню дискретной части спектра. Тогда область устойчивости определяется соотношением  $c > c_1$ .

Заменой  $m = \varphi_1 \sin \theta_0$  уравнение (15) сводится к виду

$$m'' + \left\{ -\frac{9\kappa_1}{4} \sin^4 \theta_0 + 2 \sin^2 \theta_0 - 2 + \frac{5\kappa_1}{4} - \kappa_p - Q^{-1} \right\} m = 1 - \sin \theta_0 + \frac{5\kappa_1}{2(\kappa_1 + \kappa_p)} \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0, \quad (17)$$

аналогичному (16), причем

$$c = \kappa_p + Q^{-1}, \quad \hat{L} = (\kappa_1 - 1) \frac{d^2}{dx^2} + W(\kappa_1, x),$$

где

$$x = \sqrt{\kappa_1 - 1} \xi,$$

$$W(\kappa_1, x) = -\frac{9\kappa_1}{4} \sin^4 \theta_0 + 2 \sin^2 \theta_0 - 2 + \frac{5\kappa_1}{4}.$$

Таким образом, область устойчивости  $0^\circ$ ДГ(1) определяется выражением

$$\kappa_p + Q^{-1} > f(\kappa_1), \quad (18)$$

где  $f(\kappa_1)$  — собственное значение оператора  $\hat{L}$ , соответствующее первому уровню дискретной части спектра. В частности,  $f$  удовлетворяет уравнению, определяющему собственные функции и собственные значения  $\hat{L}$ , а именно

$$(\kappa_1 - 1) \frac{d^2 a}{dx^2} + W(\kappa_1, x)a = f(\kappa_1)a, \quad (19)$$

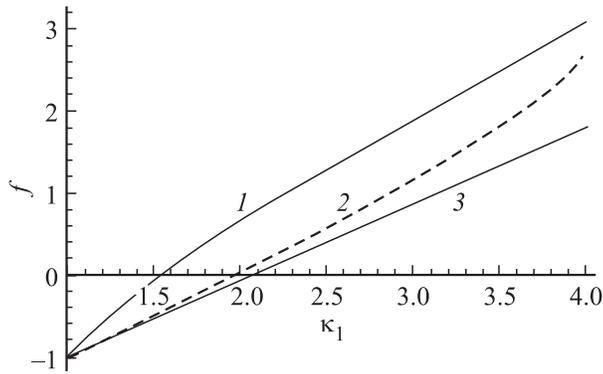
где  $a(x)$  — соответствующая  $f$  собственная функция. Заметим, что при выполнении условия  $\kappa_p > f(\kappa_1)$  соотношение (18) не накладывает ограничений на значения  $Q$  ввиду их положительности, т.е. структуры  $0^\circ$ ДГ(1) оказываются устойчивыми при сколь угодно больших значениях фактора качества.

Поскольку  $f(\kappa_1)$ , очевидно, совпадает со значением  $W(\kappa_1, x)$  в некоторой точке  $x$  (уровни дискретной части спектра располагаются внутри потенциальной ямы), оно может быть оценено как сверху, так и снизу. А именно

$$f(\kappa_1) > \lim_{x \rightarrow \infty} W(\kappa_1, x) = -\kappa_1, \quad (20)$$

а также  $f(\kappa_1)$  не превышает наибольшего значения  $W$ . Таким образом,

$$f(\kappa_1) < \begin{cases} -\frac{2}{3} - \frac{4}{3\kappa_1} + \kappa_1, & 1 < \kappa_1 < 8/3, \\ -2 + \frac{4}{9\kappa_1} + \frac{5}{4} \kappa_1, & 8/3 < \kappa_1 < 4. \end{cases} \quad (21)$$



**Рис. 5.** Функция  $f(\kappa_1)$  для  $0^\circ\text{ДГ}(1)$ . 1 — оценка сверху, 2 — значения, полученные численно, 3 — приближение (23), справедливое при  $\kappa_1 \approx 1$ .

Разумеется, оценки (20) и (21) не позволяют делать выводов о значениях  $f(\kappa_1)$ . Тем не менее они дают возможность построить необходимое и достаточное (однако не необходимое и достаточное одновременно) условия устойчивости  $0^\circ\text{ДГ}(1)$  при произвольных значениях  $\kappa_1$ .

В окрестности границы существования  $0^\circ\text{ДГ}(1)$ , задаваемой условием  $\kappa_1 = 1 + \beta$ , где  $\beta > 0$ ,  $\beta \ll 1$ , уравнение (19) может быть сведено к виду

$$\frac{d^2 a}{dx^2} + \frac{10}{3 \text{ch}^2 x} a = \frac{f + 1 + \beta}{\beta} a, \quad (22)$$

поскольку

$$W \approx -1 - \beta + \frac{10\beta}{3 \text{ch}^2 x}.$$

Наибольшим собственным значением оператора  $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha}{\text{ch}^2 x}$  является

$$Z(\alpha) = \frac{2\alpha + 1 - \sqrt{4\alpha + 1}}{2},$$

так что из (22) следует

$$\frac{f + 1 + \beta}{\beta} = Z\left(\frac{10}{3}\right) \approx 1.94.$$

Таким образом, при  $\kappa_1 \approx 1$

$$f(\kappa_1) \approx \left( Z\left(\frac{10}{3}\right) - 1 \right) \kappa_1 - Z\left(\frac{10}{3}\right). \quad (23)$$

Как видно из рис. 5, (23) адекватно описывает поведение  $f(\kappa_1)$  вплоть до  $\kappa_1 = 1.5$ , а также на всей области дает оценку снизу более информативную, чем (20).

Заметим, что при  $\kappa_1 \rightarrow 4$  глубина потенциальной ямы, характеризуемой  $W$ , остается конечной, в то время как ее ширина увеличивается. Это означает, что число уровней внутри ямы будет увеличиваться, а первый уровень соответственно приближаться к дну ямы. Это выражается в том, что при  $\kappa_1 \rightarrow 4$   $f(\kappa_1)$  должно резко расти, что и наблюдается на рис. 5.

Численный расчет показывает, что  $f(2) \approx 0.0161$ , поэтому при  $\kappa_1 = 2$ ,  $\kappa_p = 0$  соотношение (18) дает  $Q < f(2)^{-1} \approx 62$ , что хорошо соответствует рис. 4.

Для  $0^\circ\text{ДГ}(2)$  выражения, аналогичные (18), (20), (21) и (23), имеют вид

$$\frac{1 + Q^{-1}}{1 + \kappa_p} > f\left(\frac{\kappa_1}{1 + \kappa_p}\right), \quad f(k) > 1 - \frac{k}{2},$$

$$f(k) < \begin{cases} 2 + \frac{1}{k} - \frac{k}{2}, & -4/3 < k < -1, \\ -\frac{1}{3k} - \frac{5}{4}k, & k < -4/3, \end{cases}$$

$$f(k) \approx -\left(Z(1) + \frac{1}{2}\right)k - Z(1) + 1, \quad Z(1) \approx 0.38.$$

Последнее приближение выполняется при  $k \approx -1$ .

#### 4. Приближенные решения в частных случаях

а) Рассмотрим  $0^\circ\text{ДГ}(1)$  вблизи границы существования  $\kappa_1 = 1$ , однако будем считать, что  $\kappa_p + Q^{-1}$  далеко от значения  $f(1) = -1$ . Положим  $\kappa_1 = 1 + \beta$ , причем  $\beta > 0$ ,  $\beta \ll 1$ . Тогда уравнение (17) можно переписать в следующем виде:

$$\beta \frac{d^2 m}{dx^2} \left( -1 - \beta + \frac{10\beta}{3 \text{ch}^2 x} - \kappa_p - Q^{-1} \right) m = \frac{2\beta(\kappa_p + 6)}{3(\kappa_p + 1)} \frac{1}{\text{ch}^2 x}.$$

Пренебрегая в левой части этого уравнения слагаемыми порядка  $\beta$ , что возможно благодаря немалости величины  $1 + \kappa_p + Q^{-1}$ , получаем

$$m = -\frac{2\beta(\kappa_p + 6)}{3(\kappa_p + 1)(\kappa_p + 1 + Q^{-1})} \frac{1}{\text{ch}^2 x},$$

откуда при  $\kappa_1 \approx 1$  имеем решение

$$\varphi_1(\xi) = -\frac{2(\kappa_1 - 1)(\kappa_p + 6)}{3(\kappa_p + 1)(\kappa_p + 1 + Q^{-1})} \frac{1}{\text{ch}^2 \sqrt{\kappa_1 - 1} \xi}.$$

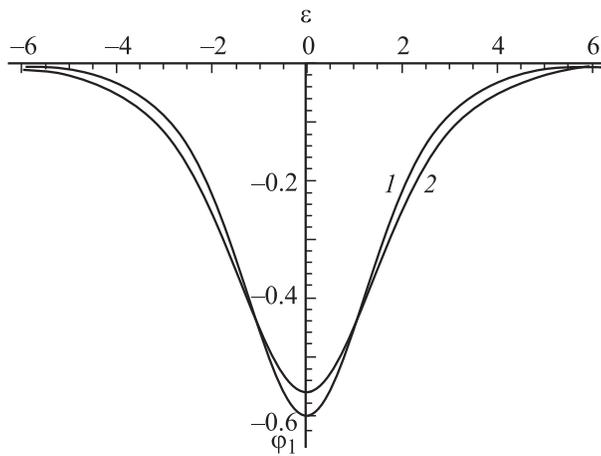
Сравнение с численным расчетом показывает (рис. 6), что полученное приближение приемлемо вплоть до  $\beta = 0.3$ .

Аналогично для  $0^\circ\text{ДГ}(2)$  вблизи границы существования  $\kappa_1 + \kappa_p = -1$ , но вдали от линии  $2Q^{-1} = 3\kappa_p + 1$  имеем

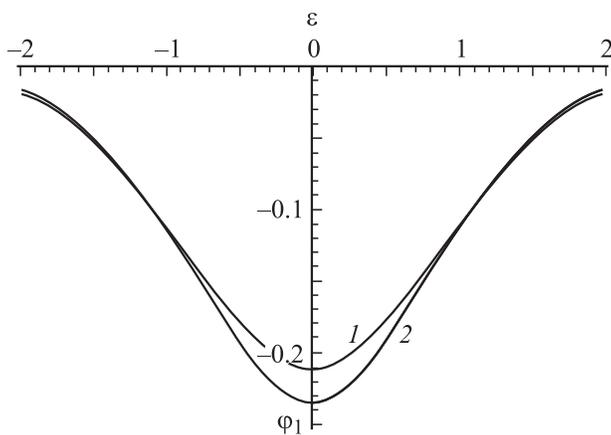
$$\varphi_1(\xi) = \frac{(1 + \kappa_p + \kappa_1)(\kappa_p + 3)}{(\kappa_1 + 1)(3\kappa_p + 1)(3\kappa_p + 1 - 2Q^{-1})} \times \frac{1}{\text{ch}^2 \sqrt{-1 - \kappa_p - \kappa_1} \xi}.$$

б) Пусть  $Q \ll 1$ . Тогда в левой части уравнения (15) можно пренебречь всеми членами, не пропорциональными  $Q^{-1}$ . Это приводит к приближенному решению для  $0^\circ\text{ДГ}(1)$  в виде

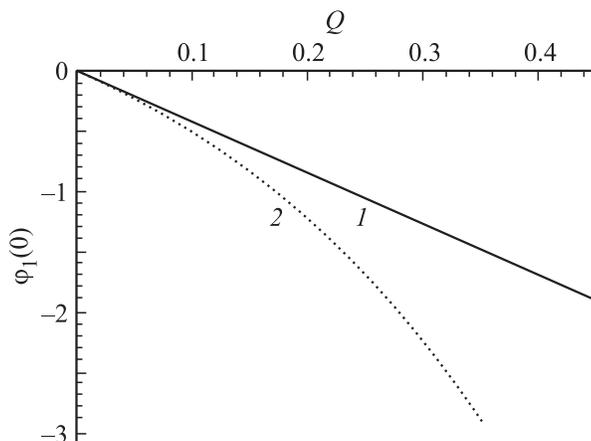
$$\varphi_1(\xi) = -Q \left( \frac{1}{\sin \theta_0} - 1 + \frac{5\kappa_1}{2(\kappa_1 + \kappa_p)} \cos^2 \theta_0 \right).$$



**Рис. 6.** Сравнение решений  $\varphi_1(\xi)$ , полученных аналитически (1) и численно (2), для  $0^\circ\text{ДГ}(1)$  при  $\kappa_1 = 1.3$ ,  $\kappa_p = 0$ ,  $Q = 1$ .



**Рис. 7.** Сравнение решений  $\varphi_1(\xi)$ , полученных аналитически (1) и численно (2), для  $0^\circ\text{ДГ}(1)$  при  $\kappa_1 = 3$ ,  $\kappa_p = 0$ ,  $Q = 0.05$ .



**Рис. 8.** Сравнение зависимостей амплитуды  $\varphi_1(0)$  от  $Q$  для  $0^\circ\text{ДГ}(1)$  при  $\kappa_1 = 3$ ,  $\kappa_p = 0$ , полученных аналитически (1) и численно (2).

Как видно из рис. 7, при  $Q = 0.05$  оно хорошо согласуется с результатом численного расчета. Однако, как явствует из рис. 8, при  $Q > 0.05$  погрешность решения стремительно возрастает.

Аналогично для  $0^\circ\text{ДГ}(2)$  получаем

$$\varphi_1(\xi) = -Q \left( \frac{1}{\sin \theta_0} - 1 - \frac{2\kappa_1}{\kappa_1 - 2\kappa_p} \cos^2 \theta_0 \right).$$

В завершение отметим, что при  $Q \ll 1$   $0^\circ\text{ДГ}$  всегда являются устойчивыми.

## 5. Заключение

Приведенные расчеты показывают, что в рассмотренных ферромагнетиках решения, соответствующие структурам  $0^\circ\text{ДГ}$  с некруговыми траекториями вектора намагниченности, возникают только при наличии поперечного внешнего магнитного поля. При этом помимо изменения топологии  $0^\circ\text{ДГ}$  наблюдается также поворот ее плоскости на угол, пропорциональный поперечной компоненте поля, продольные же составляющие в первом приближении теории возмущений не приводят к существенному изменению структуры.

Наличие поперечной составляющей внешнего магнитного поля также может привести к неустойчивости структуры  $0^\circ\text{ДГ}$  в областях изменения материальных параметров, в которых в отсутствии поля она была бы устойчивой. При этом уточненные условия устойчивости не содержат величины магнитного поля и определяются собственными значениями операторов, зависящих только от симметрии кристалла, но не от факторов, непосредственно приводящих к выходу вектора намагниченности из плоскости  $0^\circ\text{ДГ}$ .

В заключение отметим, что  $0^\circ\text{ДГ}$  с квазиблочковой структурой, рассмотренные здесь, также дают положительный вклад в энергию  $E$ . Однако эти решения позволяют расширить границы применимости расчетов по моделированию процессов зародышеобразования в реальных кристаллах [10].

## Приложение

Рассмотрим следующий функционал:

$$J[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \{q_1(x)f'(x)^2 + q_2(x)f(x)^2\} dx, \quad (\text{П1})$$

где все функции предполагаются непрерывными, гладкими и ограниченными. К тому же предполагается  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ .

Условие экстремальности  $J$  имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dx} (q_1 f') = q_2 f. \quad (\text{П2})$$

Найдем значения  $J[f(x)]$  на функциях, удовлетворяющих (П2),

$$\begin{aligned} J[f] &= q_1 f f' \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{d}{dx} (q_1 f') dx + \int_{-\infty}^{\infty} q_2 f^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f \left( q_2 f - \frac{d}{dx} (q_1 f') \right) dx = 0, \end{aligned}$$

т. е. все экстремальные значения  $J$  равны 0. Однако уравнение (П2) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, а потому имеет два семейства решений, пересекающихся в  $f \equiv 0$ . Следовательно,  $J = 0$  является либо глобальным максимумом, либо глобальным минимумом  $J$ , или, иначе говоря, значения функционала  $J$  сохраняют знак при произвольных  $f$ , в частности, положительны при выполнении условия

$$J[f \equiv 1] = \int_{-\infty}^{\infty} q_2(x) dx > 0,$$

что с необходимостью выполняется при

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q_2(x) > 0. \quad (\text{П3})$$

В случае блоховских  $0^\circ$ ДГ, соответствующих нулевому приближению ( $\lambda = 0$ ), несложно показать, что  $\delta^2 E(\theta, \varphi, \psi) = 2J_1[\delta\theta] + 2J_2[\delta\varphi] + 2J_3[\delta(\varphi - \psi)]$ , где

$$J_1[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f'^2 + \frac{\partial^2 P_a}{\partial \theta^2} \Big|_0 f^2 \right\} d\xi,$$

$$J_2[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 P_s}{\partial \varphi^2} \Big|_0 f^2 d\xi,$$

$$J_3[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sin^2 \theta_0 f'^2 + \frac{\partial^2 P_a}{\partial \varphi^2} \Big|_0 f^2 \right\} d\xi.$$

Как видим, все три функционала имеют вид (П1), а потому условие устойчивости (4) приводит, согласно (П3), к следующим неравенствам:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 P_a}{\partial \theta^2} \Big|_0 > 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 P_s}{\partial \varphi^2} \Big|_0 > 0, \quad p > 0. \quad (\text{П4})$$

## Список литературы

- [1] А.М. Балбашов, А.В. Залесский, В.Г. Кривенко, Е.В. Синицын. Письма в ЖТФ **14**, 4, 293 (1988).
- [2] А.С. Логгинов, А.В. Николаев, В.Н. Онишук, П.А. Поляков. Письма в ЖЭТФ **66**, 398 (1997).
- [3] К.П. Белов, А.К. Звездин, А.М. Кадомцева, Р.З. Левитин. Ориентационные переходы в редкоземельных магнетиках. Наука, М. (1979). 320 с.

- [4] В.К. Власко-Власов, М.В. Инденбом. ЖЭТФ **86**, 1084 (1984).
- [5] С. Тикадзуми. Физика ферромагнетизма. Магнитные характеристики и практические применения. Мир, М. (1987). 419 с.
- [6] У.Ф. Браун. Микромагнетизм. Наука, М. (1979). 160 с.
- [7] Г.С. Кандаурова. Сорос. образоват. журн. **3**, 100 (1997).
- [8] В.В. Федотова, А.П. Гесь, Т.А. Горбачевская. ФТГ **37**, 2835 (1995).
- [9] Р.М. Вахитов, Е.Р. Гареева, М.М. Вахитова, А.Р. Юмагузин. ЖТФ **79**, 8, 50 (2009).
- [10] Р.М. Вахитов, Е.Р. Гареева, М.М. Вахитова, А.Р. Юмагузин. ФТГ **51**, 1751 (2009).
- [11] В.Г. Веселаго, И.В. Владимиров, Р.А. Дорошенко, В.В. Плавский. Препринт № 53. Т-02948. ИОФ АН СССР, М. (1989). 34 с.
- [12] Р.М. Вахитов, Е.Г. Шанина. ЖТФ **73**, 7, 67 (2003).