01;04

Осцилляции типа фриделевских в задаче о скин-эффекте в вырожденной плазме

© А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский государственный областной университет
E-mail: avlatyshev@mail.ru, yushkanov@inbox.ru

Поступило в Редакцию 28 февраля 2011 г.

Показано, что осцилляции типа осцилляций Фриделя сопровождают явление скин-эффекта в вырожденной плазме металла. Выяснено, что природа осцилляций Фриделя лежит в особенности вырожденного распределения Ферми, а именно в его резком обращении в нуль непосредственно сразу за поверхностью Ферми. Это обстоятельство и приводит к осцилляциям типа фриделевских при аномальном скин-эффекте.

Считается [1], что при проникновении в вырожденную плазму поперечное электрическое поле в задаче о скин-эффекте в инфракрасной области при нормальном падении электромагнитной волны изменяется по экспоненциальному закону

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-x/\delta}, \quad \delta = \frac{c}{\omega_p}, \tag{1}$$

где c — скорость света, а ω_p — плазменная (ленгмюровская) частота.

Хорошо также известно [2], что электрическое поле в металле в задаче о скин-эффекте в случае зеркального отражения электронов от поверхности при нормальном падении электромагнитной волны имеет следующий вид:

$$\frac{E(x)}{E'(0)} = \frac{al}{\varepsilon\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iq\omega_p x/v_F dq}}{\varepsilon_{\text{tr}}(q) - bq^2}, \quad a = \left(\frac{c\varepsilon}{v_F \Omega}\right)^2. \tag{2}$$

Здесь $b = a/\varepsilon^2$, $\varepsilon = \nu/\omega_p$, ν — эффективная частота столкновений электронов, $\Omega = \omega/\omega_p$, ω — частота колебаний электрического поля, v_{F} — скорость электронов на поверхности Ферми, которая считается сферической, q — безразмерное волновое число, связанное в размерным волновым числом k соотношением $q = k\varepsilon v_{\mathrm{F}}/v$, $\varepsilon_{\mathrm{tr}}$ — поперечная диэлектрическая проницаемость,

$$\varepsilon_{\mathrm{tr}} = 1 - \frac{3}{4\Omega q^3}\left[2(\Omega + i\varepsilon)q + \left[(\Omega + i\varepsilon)^2 - q^2\right]\ln\frac{\Omega + i\varepsilon - q}{\Omega + i\varepsilon + q}\right].$$

Отметим, что для зеркально-диффузных граничных условий с коэффициентом зеркальности, зависящим от угла падения, соответствующее выражение для электрического поля получено в [3].

Ниже показано, что диэлектрическая проницаемость имеет коновские особенности (см. [4–7]), которые приводят к осцилляциям электрического поля типа фриделевских [8–10].

Величина $\varepsilon_{\mathrm{tr}}$ регулярна при всех значениях частоты колебаний электрического поля и волнового числа. Однако при частотах столкновений, стремящихся к нулю, т. е. при $\varepsilon \to 0$, производная $\varepsilon_{\mathrm{tr}}$ по волновому числу имеет особенности. Эти особенности аналогичны так называемым коновским особенностям, которые имеют место у квантовой продольной диэлектрической проницаемости. Известно, что коновские особенности приводят к изменению асимптотики экранированного электрического поля электрического заряда. Вместо дебаевской экранировки возникают медленно спадающие фриделевские осцилляции. На рис. 1 приведен график производной диэлектрической проницаемости по волновому числу. Из этого графика хорошо видны указанные особенности. В соответствии с этим происходит изменение асимптотики электрического поля при скин-эффекте.

На рис. 1 изображены особенности типа коновских для случая натрия. По вертикальной оси откладывается прозводная $d\varepsilon_{\mathrm{tr}}/dq$.

Рассматриваются два случая частот $\Omega = 0.08$ и $\Omega = 0.1$. На графиках видно обращение в бесконечность производной $d\varepsilon_{\mathrm{tr}}/dq$ в точках $q = 0.08$ и $q = 0.1$.

Наша цель состоит в анализе асимптотического поведения электрического поля при $x \to \infty$. При этом мы рассмотрим вклад в интеграл области вблизи особенности производной $\varepsilon_{\mathrm{tr}}$. Наше рассмотрение будет близко в изложенному в [9].

Интегрируя дважды по частям в (2), получаем

$$\frac{E(x)}{E'(0)} = \frac{alv_{\mathrm{F}}^2}{\varepsilon\pi\omega_p^2 x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon''_{\mathrm{tr}}(q)e^{iq\omega_p x/v_{\mathrm{F}}}dq}{[\varepsilon_{\mathrm{tr}}(q) - bq^2]^2}. \qquad (3)$$

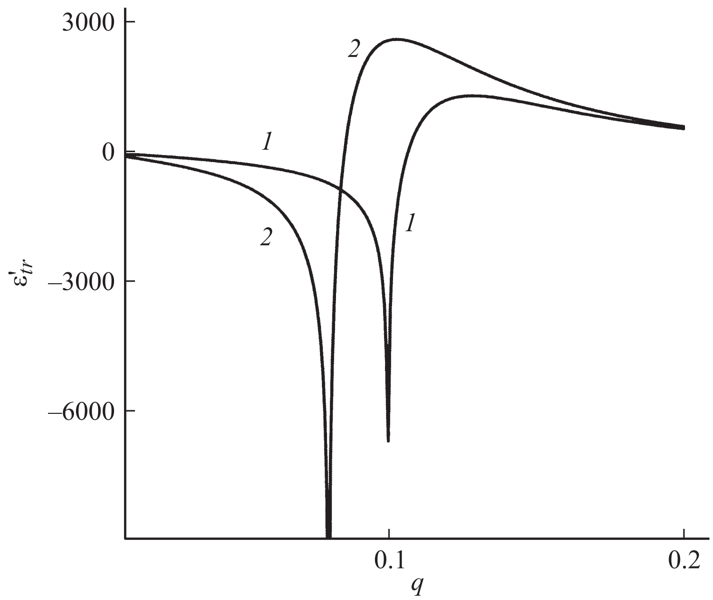


Рис. 1. Особенности типа коновских: производная диэлектрической проницаемости, кривые *1* и *2* отвечают значениям $\Omega = 0.1$ и $\Omega = 0.08$.

В выражении (3) оставлены члены, проявляющие аномальное поведение вблизи коновской особенности. В этом же приближении $\varepsilon''_{\mathrm{tr}}(q)$ можно записать в виде

$$\varepsilon''_{\mathrm{tr}}(q) = -\frac{3}{4\Omega q^3}\left[\frac{\Omega + i\varepsilon + q}{\Omega + i\varepsilon - q} - \frac{\Omega + i\varepsilon - q}{\Omega + i\varepsilon + q}\right].$$

Теперь вместо (3) для электрического поля получаем следующее выражение:

$$\frac{E(x)}{E'(0)} = \frac{3c^2 v_{\mathrm{F}}}{4\pi\omega^2\omega_p x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{q + \Omega + i\varepsilon}{q - \Omega - i\varepsilon} - \frac{q - \Omega - i\varepsilon}{q + \Omega + i\varepsilon}\right]\frac{e^{iq\omega_p x/v_{\mathrm{F}}}dq}{q^3[\varepsilon_{\mathrm{tr}}(q) - bq^2]^2}. \tag{4}$$

Рассмотрим случай бесстолкновительной плазмы, т.е. случай $\varepsilon \to 0$. Тогда интеграл (4) существенно упрощается:

$$\frac{E(x)}{E'(0)} = \frac{3c^2 v_{\mathrm F}}{4\pi\omega^2\omega_p x^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{q+\Omega}{q-\Omega} - \frac{q-\Omega}{q+\Omega}\right] \frac{e^{iq\omega_p x/v_{\mathrm F}}\,dq}{q^3[\varepsilon_{\mathrm{tr}}(q) - bq^2]^2}. \tag{5}$$

Здесь

$$\varepsilon_{\mathrm{tr}}(q) - bq^2 = 1 - \frac{3}{2q^2} - \frac{3}{4\Omega q^3}(\Omega^2 - q^2)\ln\frac{\Omega - q}{\Omega + q} - \left(\frac{cq}{v_{\mathrm F}}\Omega\right)^2.$$

Для вычисления интеграла из (5)

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{q+\Omega}{q-\Omega} - \frac{q-\Omega}{q+\Omega}\right] \frac{e^{iq\omega_p x/v_{\mathrm F}}\,dq}{q^3[\varepsilon_{\mathrm{tr}}(q) - bq^2]^2}$$

воспользуемся методом, изложенным в [9]. Для этого интеграл J представим в виде разности $J = J_1 - J_2$, где

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{q+\Omega}{q-\Omega}\, \frac{e^{iq\omega_p x/v_{\mathrm F}}\,dq}{q^3[\varepsilon_{\mathrm{tr}}(q) - bq^2]^2},$$

$$J_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{q-\Omega}{q+\Omega}\, \frac{e^{iq\omega_p x/v_{\mathrm F}}\,dq}{q^3[\varepsilon_{\mathrm{tr}}(q) - bq^2]^2}.$$

После очевидной замены переменной для второго интеграла J_2 получаем выражение

$$J_2 = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{q+\Omega}{q-\Omega}\, \frac{e^{-iq\omega_p x/v_{\mathrm F}}\,dq}{q^3[\varepsilon_{\mathrm{tr}}(q) - bq^2]^2}.$$

Следовательно, интеграл J равен

$$J = 2i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{q+\Omega}{q-\Omega}\, \frac{\sin(q\omega_p x/v_{\mathrm F})\,dq}{q^3[\varepsilon_{\mathrm{tr}}(q) - bq^2]^2}.$$

Ввиду сингулярности ядра $1/(q-\Omega)$ этого интеграла наибольший вклад в значение этого интеграла вносят значения подынтегральной функции вблизи точки сингулярности $q=\Omega$. Функция $f(q)=(q+\Omega)q^{-3}[\varepsilon_{\mathrm{tr}}(q)-bq^2]^{-2}$ медленно меняется в окрестности точки $q=\Omega$. Поэтому далее положим $f(q)=f(\Omega)$ при вычислении интеграла J вблизи особой точки. Получаем, что

$$J=2i\,f(\Omega)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(q\omega_p x/v_{\mathrm{F}})dq}{q-\Omega}\,dq.$$

После замены переменной интегрирования $q-\Omega=u$, замечая, что

$$\sin\left(\frac{q\omega_p x}{v_{\mathrm{F}}}\right)=\sin\left(\frac{(u+\Omega)\omega_p x}{v_{\mathrm{F}}}\right)=\sin\frac{\omega_p u}{v_{\mathrm{F}}}\,x\cos\frac{\omega x}{v_{\mathrm{F}}}+\sin\frac{\omega x}{v_{\mathrm{F}}}\cos\frac{\omega_p u}{v_{\mathrm{F}}}\,x,$$

и используя известное соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Ax}{x}\,dx=\pi,$$

получаем

$$J=2\pi i\,f(\Omega)\cos\frac{\omega}{v_{\mathrm{F}}}\,x,$$

где

$$f(\Omega)=\frac{2\omega^2\omega_p^2}{\left[\frac{3}{2}\,\omega_p^2+(\frac{c}{v_{\mathrm{F}}})^2\omega^2-\omega^2\right]^2}=\frac{2\Omega^2}{\left[\frac{3}{2}+(\frac{c}{v_{\mathrm{F}}}\Omega)^2-\Omega^2\right]^2}.$$

Таким образом, мы нашли, что электрическое поле вдали от поверхности $x=0$ убывает по закону

$$\frac{E(x)}{E'(0)}=\frac{A}{x^2}\,\cos\frac{\omega_p\Omega}{v_{\mathrm{F}}}\,x, \tag{6}$$

где

$$A=i\,\frac{3c^2v_{\mathrm{F}}}{\omega_p\omega^2}\,\frac{\Omega^2}{\left[\frac{3}{2}+(\frac{c\Omega}{v_{\mathrm{F}}})^2-\Omega^2\right]^2}=i\,\frac{3c^2v_{\mathrm{F}}\omega_p}{\left[\frac{3\omega_p^2}{2}+\frac{c^2}{v_{\mathrm{F}}^2}\,\omega^2-\omega^2\right]^2}. \tag{7}$$

Заметим, что в рассматриваемом здесь нерелятивистском случае $v_{\mathrm{F}} \ll c$ формулу (7) упростить:

$$A = i\,\frac{3c^2 v_{\mathrm{F}}}{\omega_p^3\left[\frac{3}{2} + (\frac{c}{v_{\mathrm{F}}}\,\Omega)^2\right]^2}. \tag{8}$$

В низкочастотном случае, когда $\Omega \ll v_{\mathrm{F}}/c$, формула (8) упрощается и приводится к виду $A = i4c^2 v_{\mathrm{F}}/(3\omega_p^3)$, а в случае, когда $\Omega \gg v_{\mathrm{F}}/c$, формула (8) приводится к виду $A = i3v_{\mathrm{F}}^5/(c^2\omega_p^3\Omega^4)$.

Рассмотрим случай инфракрасных частот. Вблизи поверхности применима формула (1). В соответствии с этим получаем

$$\frac{E(0)}{E(0)'} = -\frac{c}{\omega_p}. \tag{9}$$

Поделив теперь равенство (6) на (9), имеем

$$\frac{E(x)}{E(0)} = -\frac{A\omega_p}{cx^2}\,\cos\left(\frac{\omega_p\Omega}{v_{\mathrm{F}}}\,x\right). \tag{10}$$

Формулу (10) можно представить в виде

$$E(x) = \frac{B}{x^2}\,\cos\left(\frac{\omega_p\Omega}{v_{\mathrm{F}}}\,x\right),$$

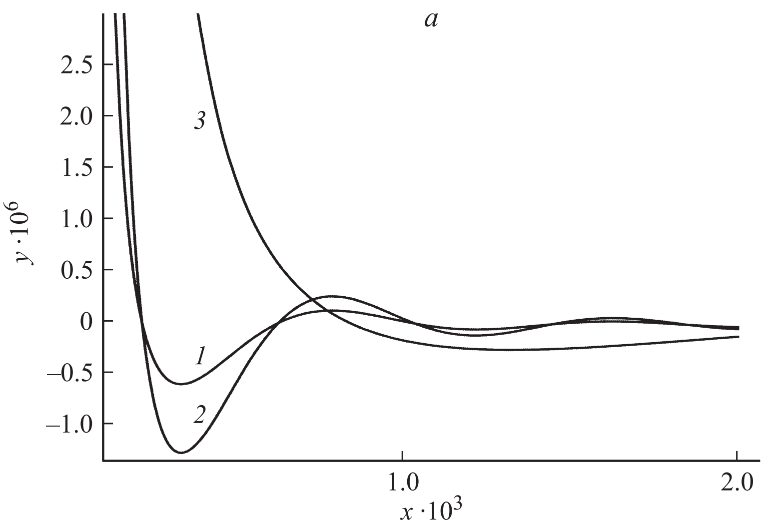
где

$$B = -\frac{3icv_{\mathrm{F}}}{\omega_p^2\left[\frac{3}{2} + (\frac{c}{v_{\mathrm{F}}}\Omega)^2 - \Omega^2\right]^2}\,E(0).$$

Проведем графическое исследование полученных выражений. На рис. 2 изображено поведение величины $y = |E(x)/E(0)|$, где отношение $E(x)/E(0)$ определяется согласно равенству (10). Расстояние по горизонтали оси измеряется в сантиметрах.

На рис. 3 изобразим поведение кривых $y_1(x) = B/x^2$ (кривая *1*) и $y_2(x) = e^{-\omega_p x/c}$ (кривая *2*). При этом по вертикальной оси используется логарифмический масштаб, а расстояние по горизонтальной оси измеряется в микронах.

Фридель был первым [8], кто обнаружил, что асимптотическое (на больших расстояниях) убывание экранированного потенциала точечного заряда при квантовом рассмотрении вырожденной бесстолкновительной плазмы носит не только монотонно убывающий, но и при этом



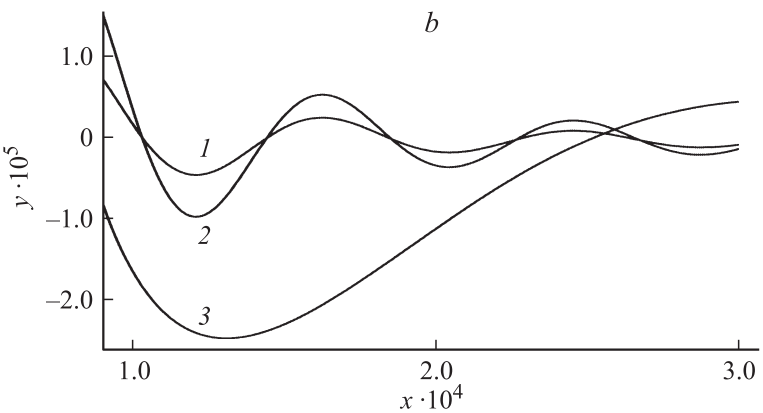


Рис. 2. Осцилляции типа фриделевских; *a* и *b* — кривые *1, 2, 3* отвечают натрию, золоту и алюминию; *a* — случай $\Omega = 10^{-2}$, $2 \cdot 10^{-5}\,\text{cm} < x < 2 \cdot 10^{-3}\,\text{cm}$, *b* — случай $\Omega = 10^{-3}$, $9 \cdot 10^{-5}\,\text{cm} < x < 3 \cdot 10^{-3}\,\text{cm}$, *c* — случай алюминия, $1.5 \cdot 10^{-3}\,\text{cm} < x < 1.8 \cdot 10^{-3}\,\text{cm}$. Кривые *1, 2, 3* отвечают значениям $\Omega = 10^{-4}$, 10^{-3}, 10^{-2}.

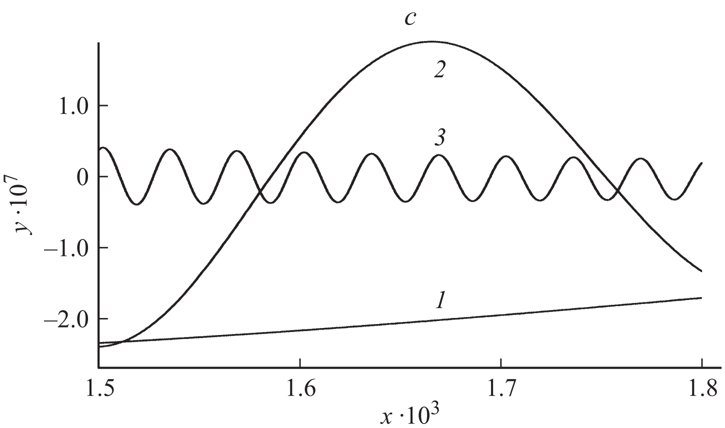


Рис. 2 (*продолжение*).

еще и осциллирующий характер. Причиной таких осцилляций является резкое спадание (до нуля) за поверхностью Ферми распределения Ферми для электронов $f_{\mathrm{F}}(v) = \Theta(v_{\mathrm{F}} - v)$, $\Theta(x)$ — функция Хэвисайда.

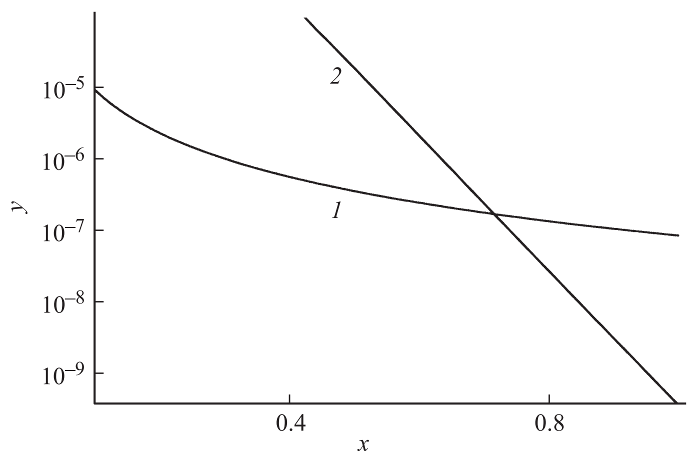


Рис. 3. Пересечение двух кривых $y_1(x) = B/x^2$ (кривая *1*) и $y_2(x) = e^{-\omega_p x/c}$ (кривая *2*) в точке $x_* = 0.716\,\mu$m при $\Omega = 10^{-2}$ (логарифмический масштаб по вертикальной оси).

Эта особенность распределения Ферми приводит к так называемым коновским особенностям (см. [4–10]). Коновские особенности являются следствием логарифмических особенностей продольной диэлектрической проницаемости вырожденной плазмы. Именно коновские особенности и приводят к фриделевским осцилляциям.

Список литературы

[1] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.М.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
[2] *Абрикосов А.А.* Введение в теорию нормальных металлов. М.: Наука, 1972. 288 с.
[3] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. В. 8. С. 1.
[4] *Bácsi A., Virosztek A.* // Phys. Rev. B. 2010. V. 82. P. 193405.
[5] *Affleck I., Borda L., Saleur H.* // Phys. Rev. B. 2008. V. 77. P. 180404(R).
[6] *Ayuela A., Jaskólski W., Pelc M., Santos H., Chico L.* // Appl. Phys. Lett. 2008. V. 93. P. 133106.
[7] *Kohn W., Vosko S.H.* // Phys. Rev. 1960. V. 119. P. 912.
[8] *Friedel J.* // Phil. Mag. 1952. V. 43. P. 153.
[9] *Харрисон У.* Теория твердого тела. М.: Мир, 1972. 616 с.
[10] *Райнс Д.* Элементарные возбуждения в твердых телах. М.: Мир, 1965. 382 с.