

09

Оценка характеристик ансамбля связанных генераторов с задержкой по экспериментальным временным рядам

© В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru

Поступило в Редакцию 13 мая 2010 г.

Впервые проведена реконструкция модельных дифференциальных уравнений с запаздыванием для ансамбля связанных экспериментальных систем с задержкой по их временным рядам.

Ансамбли связанных между собой систем с задержкой в последнее время часто используются для описания и моделирования процессов в различных физических [1–3], химических [4,5] и биологических системах [6–8]. Важной задачей при этом является оценка параметров ансамбля взаимодействующих систем по их экспериментальным временным рядам. Решение этой задачи позволяет не только предсказать поведение исследуемых систем при изменении параметров, но и оценить адекватность заложенных в модели представлений об объекте, осуществить классификацию систем и режимов их функционирования, определить значения параметров, недоступных непосредственному измерению в эксперименте.

Большинство известных методов реконструкции модельных уравнений систем с задержкой по временным рядам ориентировано на восстановление изолированных систем с запаздыванием [9–17]. Наличие связи между элементами ансамбля взаимодействующих систем вносит свою специфику в задачу реконструкции и требует разработки новых методов [18]. Следует отметить, что до настоящего времени восстановление уравнений динамики ансамбля реальных систем с задержкой по их экспериментальным временным рядам не проводилось. В настоящей работе эта задача решается впервые. Мы развиваем предложенные нами ранее методы на случай произвольного числа связанных между собой

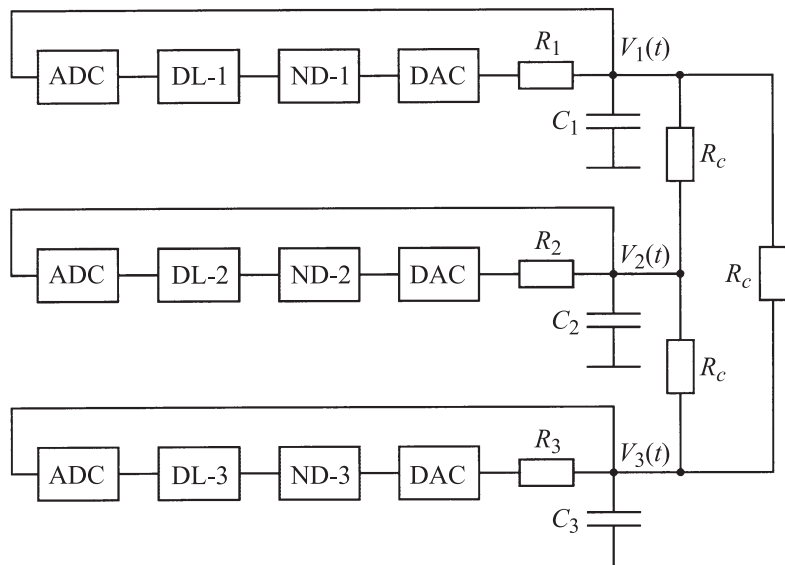


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки. DL-1, DL-2 и DL-3 — линии задержки генераторов, ND-1, ND-2 и ND-3 — нелинейные элементы генераторов, ADC — аналого-цифровые преобразователи, DAC — цифро-аналоговые преобразователи,

систем с запаздыванием и впервые применяем их для определения параметров ансамбля связанных генераторов с запаздывающей обратной связью по экспериментальным временным рядам.

Рассмотрим ансамбль, состоящий из трех связанных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью. Блок-схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. Она состоит из трех связанных между собой кольцевых генераторов, каждый из которых состоит из линии задержки, нелинейного элемента и низкочастотного RC - фильтра первого порядка. Нелинейные элементы и линии задержки выполнены на цифровых элементах, а фильтры на аналоговых. Аналоговые и цифровые элементы схемы сопрягались с помощью аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей. Связь генераторов осуществляется с помощью резисторов R_c . Модельное уравнение для

i -го элемента цепочки имеет вид

$$R_i C_i \dot{V}_i(t) = -V_i(t) + f_i(V_i(t - \tau_i)) + \frac{R_i}{R_c} [V_{i+1}(t) - 2V_i(t) + V_{i-1}(t)], \quad (1)$$

где $V_i(t)$ и $V_i(t - \tau_i)$ — напряжения соответственно на входе и выходе линии задержки i -го элемента, τ_i — время запаздывания, R_i и C_i — сопротивление и емкость элементов фильтра, f_i — передаточная характеристика нелинейного элемента, граничные условия периодические: $x_4 = x_1$. Введем обозначения: $\varepsilon_i = R_i C_i$ и $k_i = R_i/R_c$. Параметр ε_i характеризует инерционные свойства i -го элемента ансамбля, а k_i определяет величину связи.

При следующих значениях параметров $\tau_1 = 13.6$ ms, $\tau_2 = 16.4$ ms, $\tau_3 = 20.4$ ms, $\varepsilon_1 = 2.88$ ms, $\varepsilon_2 = 2.91$ ms, $\varepsilon_3 = 2.94$ ms, $k_{1,2,3} = 0.1$ мы записывали хаотические сигналы $V_i(t)$ с помощью трехканального аналого-цифрового преобразователя с частотой выборки $f_s = 10$ kHz. Все три нелинейных элемента имели квадратичную передаточную характеристику f_i . Фрагмент временной реализации сигнала $V_2(t)$ приведен на рис. 2, а.

Ранее нами было установлено, что во временных реализациях изолированных ($k_i = 0$) систем с задержкой вида (1) практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на время запаздывания [13]. Определив для различных значений τ число N_i ситуаций, при которых точки хаотического временного ряда, разделенные интервалом времени τ , одновременно являются экстремальными, и построив зависимость $N_i(\tau)$, можно найти время задержки τ_i как значение, при котором наблюдается абсолютный минимум этой зависимости [13].

Покажем, что такой метод определения времени задержки можно использовать и для связанных систем с задержкой, описываемых уравнением (1). Продифференцируем (1) по t :

$$\varepsilon_i \ddot{V}_i(t) = -\dot{V}_i(t) + \frac{df_i(V_i(t - \tau_i))}{dV_i(t - \tau_i)} \dot{V}_i(t - \tau_i) + k_i [\dot{V}_{i+1}(t) - 2\dot{V}_i(t) + \dot{V}_{i-1}(t)]. \quad (2)$$

Если при $\dot{V}_i(t) = 0$ в типичном случае квадратичных экстремумов $\ddot{V}_i(t) \neq 0$, то при $\varepsilon_i \neq 0$ должно выполняться условие

$$\frac{df_i(V_i(t - \tau_i))}{dV_i(t - \tau_i)} \dot{V}_i(t - \tau_i) + k_i [\dot{V}_{i+1}(t) + \dot{V}_{i-1}(t)] \neq 0. \quad (3)$$

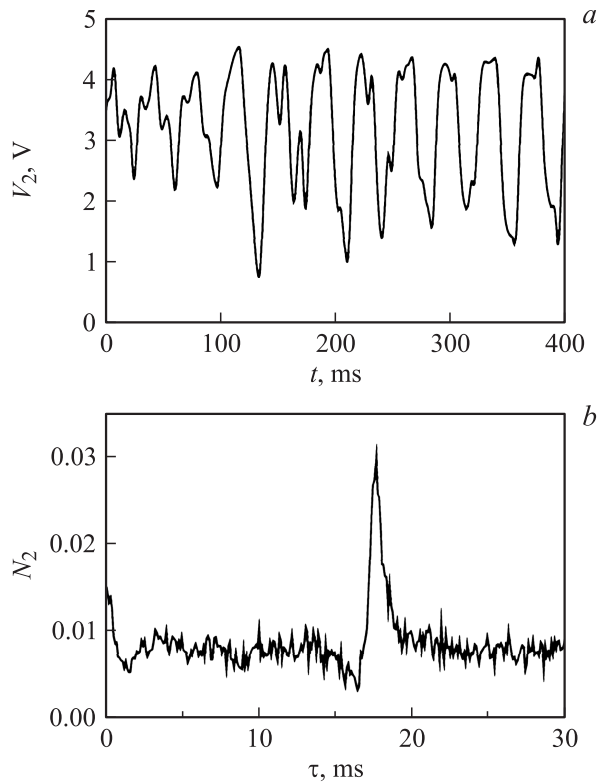


Рис. 2. *a* — экспериментальная хаотическая временная реализация $V_2(t)$ второго генератора. *b* — число N_2 пар экстремумов хаотического временного ряда переменной $V_2(t)$ на удалении τ друг от друга, нормированное на общее число экстремумов в ряде. $N_{2\min}(\tau) = N_2(16.4\text{ мс})$. *c* — взаимная корреляционная функция (4) для случая, когда элементы ансамбля совершают периодические в отсутствие внешнего воздействия колебания. $C_{2\max}(s) = C_2(16.3\text{ мс})$.

Для выполнения условия (3) необходимо, чтобы $\dot{V}_i(t - \tau_i) \neq 0$ или/и $k_i[\dot{V}_{i+1}(t) + \dot{V}_{i-1}(t)] \neq 0$. Последнее условие никогда не выполняется в случае отсутствия связи ($k_i = 0$) и в случае сильной связи, обеспечивающей синхронизацию элементов, так как при этом $\dot{V}_{i+1}(t) = \dot{V}_{i-1}(t) = \dot{V}_i(t)$, а $\dot{V}_i(t) = 0$ при выводе условия (3). Следова-

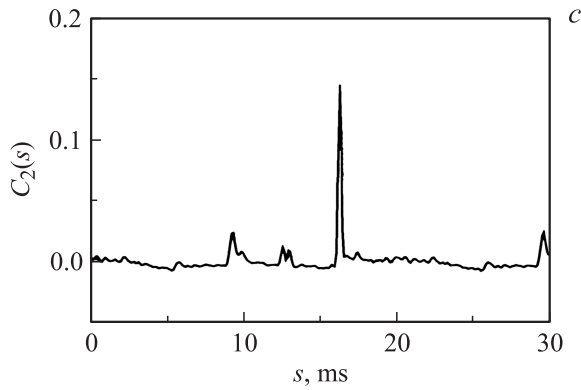


Рис. 2 (продолжение).

тельно, в этих пограничных случаях первое слагаемое в (3) отлично от нуля, а значит, производные $\dot{V}_i(t)$ и $\dot{V}_i(t - \tau_i)$ одновременно в нуль не обращаются, т.е. на удалении τ_i от квадратичного экстремума во временном ряде $V_i(t)$ не должно быть другого экстремума. В промежуточных ситуациях слабой и умеренной связи существует вероятность обнаружить пару экстремумов на удалении τ_i друг от друга. Однако, как показывают исследования, в общем случае она меньше, чем вероятность встретить пару экстремумов на удалении $\tau \neq \tau_i$. В результате график $N_i(\tau)$ будет иметь минимум при $\tau = \tau_i$ в широком диапазоне значений коэффициентов связи.

Подсчитав число N_2 одновременных обращений в нуль $\dot{V}_2(t)$ и $\dot{V}_2(t - \tau)$ для различных значений τ , перебираемых с шагом, равным периоду выборки точек $T_s = 0.1$ ms, построим зависимость $N_2(\tau)$, введя нормировку N_2 на общее число экстремумов в ряде (рис. 2, b). Для оценки производной по временному ряду мы использовали локальную параболическую аппроксимацию. Абсолютный минимум $N_2(\tau)$ наблюдается при $\tau = 16.4$ ms (рис. 2, b).

Если система с запаздыванием совершает периодические колебания, то такой метод не позволяет определить τ_i , так как экстремумы во временном ряде расположены регулярно. Для изолированных систем с запаздыванием, находящихся в режиме периодических колебаний, нами недавно был предложен метод восстановления времени задержки,

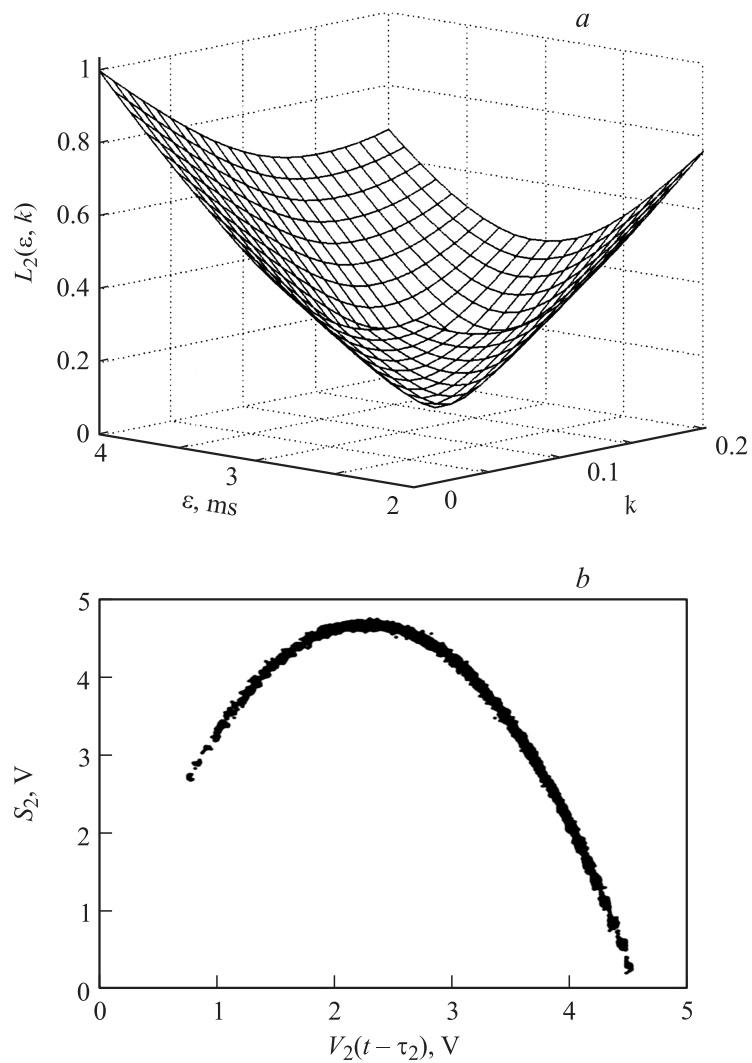


Рис. 3. *a* — зависимость $L_2(\epsilon, k)$, нормированная на максимальное значение в исследуемом интервале параметров. $L_{2\min}(\epsilon, k) = L_2(2.75 \text{ ms}, 0.09)$. *b* — восстановленная нелинейная функция второго генератора при $\tau_2 = 16.4 \text{ ms}$, $\epsilon'_2 = 2.75 \text{ ms}$, $k'_2 = 0.09$. $S_2 = \epsilon'_2 \dot{V}_2(t) + V_2(t) - k'_2[V_3(t) - 2V_2(t) + V_1(t)]$.

основанный на возмущении системы внешним воздействием и анализе отклика [16]. Если на переменную $V_i(t)$ изолированной системы с задержкой подействовать внешним сигналом $y_i(t)$, представляющим собой прямоугольные импульсы, и построить взаимную корреляционную функцию

$$C_i(s) = \frac{\langle |\ddot{y}_i(t)| |\ddot{V}_i(t+s) \rangle}{\sqrt{\langle |\ddot{y}_i(t)|^2 \rangle \langle |\ddot{V}_i(t)|^2 \rangle}}, \quad (4)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени, то $C_i(s)$ будет иметь четко выраженный максимум при $s = \tau_i$. Такой метод позволяет использовать импульсы малой амплитуды.

Исследуем возможность применения этого метода для определения времен задержки в ансамбле связанных систем с запаздыванием. Рассмотрим такой способ возбуждения i -го элемента ансамбля внешним сигналом $y_i(t)$, при котором его модельное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \dot{V}_i(t) = & -V_i(t) + f_i(V_i(t - \tau_i) + y_i(t - \tau_i)) \\ & + k_i[V_{i+1}(t) - 2V_i(t) + V_{i-1}(t)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Воздействие $y_i(t)$ представляет собой прямоугольные импульсы с амплитудой A_i , периодом T_i и длительностью M_i . Будем возмущать второй генератор внешним сигналом $y_2(t)$, вводя его между фильтром или линией задержки этого генератора через суммирующий усилитель. Параметры генераторов выберем такими, чтобы в отсутствие воздействия они демонстрировали периодические колебания. На рис. 2, с построена взаимная корреляционная функция (4) для случая, когда возмущающий импульсный сигнал имеет амплитуду $A_2 = 0.05$ В, период $T_2 = 40$ мс и длительность $M_2 = T_2/2$. При шаге изменения s , равном 0.1 мс, график $C_2(s)$ имеет максимум при $s = 16.3$ мс, т.е. время запаздывания восстанавливается с высокой точностью. Такой метод может быть применен не только к системам, находящимся в режиме периодических колебаний, но и к системам, совершающим хаотические колебания. Кроме того, его можно использовать для оценки времени задержки при более высоких уровнях шума, чем метод, основанный на анализе расположения экстремумов во временном ряде.

Определив тем или иным способом время задержки i -го элемента ансамбля связанных систем с запаздыванием, мы можем восстановить его параметр ε_i , коэффициент связи k_i и нелинейную функцию f_i по

временным рядам колебаний i -го и связанных с ним элементов. Для этого будем использовать следующий подход. Запишем уравнение (1) в виде

$$\varepsilon_i \dot{V}_i(t) + V_i(t) - k_i [V_{i+1}(t) - 2V_i(t) + V_{i-1}(t)] = f_i(V_i(t - \tau_i)). \quad (6)$$

Из (6) следует, что если построить зависимость $\varepsilon_i \dot{V}_i(t) + V_i(t) - k_i [V_{i+1}(t) - 2V_i(t) + V_{i-1}(t)]$ от $V_i(t - \tau_i)$, то она воспроизведет функцию f_i . Поскольку заранее величины ε_i и k_i неизвестны, будем перебирать их из некоторого интервала, добиваясь однозначной зависимости, которая возможна лишь при правильном выборе параметров.

В качестве количественного критерия однозначности при таком поиске ε_i и k_i будем использовать минимальную длину $L_i(\varepsilon, k)$ линии, последовательно соединяющей точки на перебираемых плоскостях вложения, упорядоченные по величине абсциссы. Минимум зависимости $L_i(\varepsilon, k)$ будет наблюдаться при правильном выборе параметров, а построенное при этом значении множество точек на плоскости воспроизведет нелинейную функцию, которую при необходимости можно аппроксимировать.

Применим такой подход к экспериментальным хаотическим временным рядам, записанным при указанных выше значениях параметров. Зависимость $L_2(\varepsilon, k)$, построенная при восстановленном нами $\tau_2 = 16.4 \text{ ms}$ (см. рис. 2, *b*) и параметрах ε и k , перебираемых с шагом, равным 0.01, демонстрирует минимум при $\varepsilon = 2.75 \text{ ms}$ и $k = 0.09$ (рис. 3, *a*), т. е. позволяет получить близкую оценку ε_2 и k_2 . Нелинейная функция, восстановленная по экспериментальным временным рядам, приведена на рис. 3, *b*. Она хорошо совпадает с истинной передаточной характеристикой f_2 нелинейного элемента второго генератора. Аналогичным образом можно восстановить характеристики остальных элементов ансамбля.

Описанный подход не имеет ограничений на число элементов в ансамбле. Кроме того, метод может быть распространен на связанные системы с запаздыванием высокого порядка и с несколькими временами задержки. В случае синхронизации элементов ансамбля связанных систем с запаздыванием метод позволяет восстановить параметры локальных элементов, но коэффициенты связи определить не удастся.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 10-02-00980.

Список литературы

- [1] *Koryukin I.V., Mandel P.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 026201.
- [2] *Burić N., Vasović N.* // Chaos, Solitons and Fractals. 2007. V. 31. P. 336–342.
- [3] *Krishna B.M., John M.P., Nandakumaran V.M.* // Phys. Lett. A. 2010. V. 374. P. 1835–1842.
- [4] *Weiner J., Holz R., Schneider F.W., Bar-Eli K.* // J. Phys. Chem. 1992. V. 96. P. 8915–8919.
- [5] *Mincheva M., Rousset M.R.* // J. Math. Biol. 2007. V. 55. P. 87–104.
- [6] *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993.
- [7] *Bocharov G.A., Rihan F.A.* // J. Comp. Appl. Math. 2000. V. 125. P. 183–199.
- [8] *Kotani K., Takamasu K., Ashkenazy Y. et al.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 051923.
- [9] *Voss H., Kurths J.* // Phys. Lett. A. 1997. V. 234. P. 336–344.
- [10] *Hegger R., Büchner M.J., Kantz H., Giaquinta A.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 558–561.
- [11] *Büchner M.J., Ciofini M., Giaquinta A. et al.* // Eur. Phys. J. D. 2000. V. 10. P. 165–176.
- [12] *Horbelt W., Timmer J., Voss H.U.* // Phys. Lett. A. 2002. C. 229. P. 513–521.
- [13] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Караваяев А.С., Безручко Б.П.* // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. В. 3. С. 515–527.
- [14] *Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. и др.* // УФН. 2008. Т. 178. В. 3. С. 323–329.
- [15] *Rontani D., Locquet A., Sciamanna M. et al.* // IEEE J. of Quantum Electronics. 2009. V. 45. P. 879–891.
- [16] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. В. 22. С. 71–78.
- [17] *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* // Phys. Rev. E. 2009. V. 80. P. 066206.
- [18] *Прохоров М.Д., Пономаренко В.И.* // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. В. 8. С. 29–35.