01

Об электромагнитной энергии поля и вещества

© И.П. Краснов

Центральный научно-исследовательский институт
им. академика А.Н. Крылова, Санкт-Петербург
E-mail: i3349@yandex.ru

Поступило в Редакцию 2 марта 2010 г.

На основе анализа слагаемых развернутого представления формулы Пойнтинга и способов описания взаимодействия электромагнитного поля и вещества, принятых в классической электродинамике, обосновывается возможность рассмотрения электромагнитной энергии как суммы энергии поля и энергии вещества. Это позволяет корректно описывать энергетические характеристики более широкого класса электромагнитных процессов, чем это возможно в настоящее время.

В работе [1] автором было обращено внимание на корректность использования, во всех без исключения случаях, широко распространенного представления плотности электромагнитной энергии w выражением:

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{E}, \mathbf{D}) + \frac{1}{2}(\mathbf{H}, \mathbf{B}). \tag{1}$$

Эта некорректность проявляется, например, в том что полная энергия любых постоянно поляризованных или постоянно намагниченных тел равна нулю:

$$W_e = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_3}(\mathbf{E}, \mathbf{D})dv = 0, \quad W_m = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_3}(\mathbf{H}, \mathbf{B})dv = 0 \tag{2}$$

— факт, замеченный еще Дж. К. Максвеллом [2]. Кроме того, формула Пойнтинга в ее классическом виде:

$$\left(\mathbf{E}, \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}\right) + \left(\mathbf{H}, \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\right) + \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] + (\mathbf{j}, \mathbf{E}) = 0, \tag{3}$$

совместима с формулой (1) только при наличии прямой пропорциональности между напряженностями или индукциями:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \tag{4}$$

где ε и μ — положительные числа или функции точки пространства, и только в этом случае формула Пойнтинга может быть с помощью (1) представлена в виде закона сохранения энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} w + \operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] + q = 0, \tag{5}$$

где q — скорость генерации тепла, в данном случае $q = (\mathbf{j}, \mathbf{E})$.

Во всех иных случаях локального взаимодействия: при наличии нелинейной зависимости между напряженностями и индукциями, или необходимости учитывать дисперсионную взаимосвязь между ними, представление плотности энергии в виде (1) оказывается несовместимым с формулой Пойнтинга и, следовательно, с уравнениями Максвелла, интегралом которых является формула Пойнтинга, что, по-видимому, впервые отмечено Дж. Стрэттоном [3].

Для стационарных гармонических во времени электромагнитных процессов в линейных диспергирующих средах, когда ε и μ могут быть представлены в каждой точке пространства комплексными функциями одной только частоты ω, для достаточно общего случая резонансного поглощения, описываемого моделью Г. Лоренца в работах [4,5], было получено представление электромагнитной энергии, согласованное с формулой Пойнтинга, но отличное от формулы (1). Там же для рассматриваемого случая было дано выражение для скорости генерации тепла. В работе [6] эти результаты использовались при анализе скорости распространения энергии в средах с аномальной дисперсией.

Принятый в работах [4,5] подход к корректному определению плотности энергии w и скорости генерации тепла q из условия их совместимости с формулой Пойнтинга и возможности ее представления в виде (5) может быть распространен на произвольно изменяющиеся во времени электромагнитные процессы в средах с нелинейной зависимостью между напряженностями и индукциями в условиях наличия дисперсионной их взаимосвязи. Для этого удобно исходить из развернутого представления формулы Пойнтинга:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}E^2+\frac{\mu_0}{2}H^2\right)+\operatorname{div}[\mathbf{E},\mathbf{H}]+(\mathbf{j},\mathbf{E})+\left(\mathbf{E},\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\right)+\mu_0\left(\mathbf{H},\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}\right), \tag{6}$$

которое получается из (3) с помощью электромагнитных тождеств:

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P},\quad \mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}+\mu_0\mathbf{J}. \tag{7}$$

Как и в работах [1] и [4], первое слагаемое в (6) будем рассматривать как скорость изменения плотности энергии электромагнитного поля w_0, а три последних слагаемых в (6) — как работу, совершаемую в результате взаимодействия поля и вещества в единице объема за единицу времени.

В классической электродинамике взаимодействие электромагнитного поля с веществом описывается зависимостью электромагнитных характеристик вещества, таких как плотность тока $\mathbf{j}$, поляризация $\mathbf{P}$ и намагниченность $\mathbf{J}$, от напряженностей электромагнитного поля. В достаточно общем случае локального взаимодействия с релаксацией эта зависимость может затрагивать все характеристики вещества и представляться выражениями, часто называемыми материальными уравнениями:

$$\tau_j\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}+\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E},\quad \tau_e\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}+\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi_e\mathbf{E},\quad \tau_m\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}+\mathbf{J}=\chi_m\mathbf{H}, \tag{8}$$

в которых τ_j, τ_e, τ_m — времена релаксации. Следует отметить, что все уравнения (8) одновременно не выполняются: первое уравнение выполняется в металлах [3] и плазме [7], второе в диэлектриках [8], а третье в ферромагнетиках. Нетрудно видеть, что при $\tau\to 0$ первая из формул в (8) превращается в закон Ома, а вторая и третья — в вытекающие из (4) и (7) законы Пуассона:

$$\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi_e\mathbf{E},\qquad \mathbf{J}=\chi_m\mathbf{H}, \tag{9}$$

где χ_e и χ_m — диэлектрическая и магнитная восприимчивости. В дальнейшем будем рассматривать выражения (8) и (9) как нелинейные зависимости, полагая, что $\sigma=\sigma(j)$, $\chi_e=\chi_e(P)$, $\chi_m=\chi_m(J)$ — положительные функции соответствующих модулей.

Для ряда диэлектриков характерно наличие резонансного поглощения. Такой процесс описывается моделью Лоренца [3,4–6]:

$$\frac{1}{\omega_0^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\mathbf{P} + \tau_{0e}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{P} + \mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_e\,\mathbf{E}, \tag{10}$$

где ω_0 — резонансная частота.

С помощью выражений (8) оказывается возможным представить работу, совершаемую в результате взаимодействия поля и вещества, для каждого из трех последних слагаемых в (6) в виде суммы скоростей изменения соответствующих составляющих плотностей энергии вещества $w_\bullet$ и энергии тепла q. Действительно, имеют место тождества:

$$(\mathbf{j}, \mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^j \frac{\tau_f}{\sigma}\,j' + \frac{1}{\sigma^2}\,j^2 = \frac{\partial}{\partial t}\,w_{\bullet j} + q_j,$$

$$\left(\mathbf{E}, \frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{P}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^P \frac{1}{\varepsilon_0\chi_e}\,P'dP' + \frac{\tau_e}{\varepsilon_0\chi_e}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,P\right)^2 = \frac{\partial}{\partial t}\,w_{\bullet e} + q_e,$$

$$\mu_0\left(\mathbf{H}, \frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{J}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^J \frac{\mu_0}{\chi_m}\,J'dJ' + \frac{\tau_m\mu_0}{\chi_m}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,J\right)^2 = \frac{\partial}{\partial t}\,w_{\bullet m} + q_m,$$

которые справедливы тогда и только тогда, когда имеют место выражения (8). Полагая:

$$w_\bullet = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^j \frac{\tau_j}{\sigma}\,j'dj' + \int\limits_0^P \frac{1}{\varepsilon_0\chi_e}\,P'dP' + \int\limits_0^J \frac{\mu_0}{\chi_m}\,J'dJ', \tag{11}$$

$$q = \frac{1}{\sigma}\,j^2 + \frac{\tau_e}{\varepsilon_0\chi_e}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,P\right)^2 + \frac{\tau_m\mu_0}{\chi_m}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,J\right)^2, \tag{12}$$

формулу Пойнтинга (6) можно представить в виде (5), в котором в качестве плотности электромагнитной энергии w выступает суммарная энергия поля и вещества:

$$w = w_0 + w_\bullet = \frac{\varepsilon_0}{2}\,E^2 + \frac{\mu_0}{2}\,H^2 + w_\bullet, \tag{13}$$

а в качестве скорости генерации тепла — выражение (12). Если $\tau_j = \tau_e = \tau_m = 0$, а χ_e и χ_m — положительные числа или функции точки пространства, то формула (13) совпадает с (1).

В статическом случае вместо формулы (2) будем иметь выражения:

$$W_e = \int\limits_{\Sigma_3} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + w_{\bullet e} \right) dV, \quad W_m = \int\limits_{\Sigma_3} \left(\frac{\mu_0}{2} H^2 + w_{\bullet m} \right) dV,$$

которые всегда положительны и определены при всех вариантах зависимостей (9); они могут быть распространены также и на случай гистерезисных зависимостей. Из условия минимума величин W_e и W_m по всем возможным поляризациям или намагничениям в качестве уравнений Эйлера получаются уравнения (9):

$$\frac{\partial w_{\bullet e}}{\partial \mathbf{P}} = \frac{1}{\varepsilon_0 \chi_e(P)} \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial w_{\bullet m}}{\partial \mathbf{J}} = \frac{1}{\chi_m(J)} \mathbf{J} = \mathbf{H},$$

заданные в области пространства, занятого диэлектриком или магнетиком. Подробнее эти вопросы рассмотрены в [9].

Учет резонансного поглощения, определяемого выражением (10), также может быть осуществлен в рамках использованной схемы. В этом случае предпоследнее слагаемое в (6) можно представить в виде:

$$\left(\mathbf{E}, \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int\limits_0^P \frac{1}{\varepsilon_0 \chi} P' dP' + \frac{1}{2\omega_0^2 \varepsilon_0 \chi_e} \left(\frac{\partial}{\partial t} P \right)^2 \right)$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon_0 \chi_e} \left(\frac{\partial}{\partial t} P \right)^2 + \frac{1}{2\omega_0 \varepsilon_0 \chi_e^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} P \right)^3 \frac{\partial \chi_e}{\partial P};$$

и, следовательно, учет резонансного поглощения может быть сведен к добавке в выражения для $w_\bullet$ и q слагаемых:

$$\frac{1}{2\omega_0^2 \varepsilon_0 \chi_e} \left(\frac{\partial}{\partial t} P \right)^2 \quad \text{в выражение (11)}$$

$$\text{и} \quad \frac{1}{2\omega_0^2 \varepsilon_0 \chi_e^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} P \right)^3 \frac{\partial \chi_e}{\partial P} \quad \text{в выражение (12).}$$

Добавка в q отличается от остальных слагаемых в (12) тем, что не для всех процессов может быть обоснована ее положительность, по крайней мере, это можно сделать в случае, когда на вещество воздействует П-образный импульс E; если χ_e — число, то эта добавка есть нуль.

В случае когда $\sigma = 0$, $\tau_j = 0$, $\tau_m = 0$, а τ_e, χ_e, χ_m и ω_0 — положительные числа, при $E = E_0 \cos\omega t$, согласно (10), будем иметь:

$$P = E_0 \frac{\varepsilon_0 \chi_e \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \omega_0^4 \tau_0^2} \big((\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + \omega\omega_0^2 \tau_0 \sin\omega t\big).$$

В этом случае для электрических составляющих плотности электромагнитной энергии w_e и скорости генерации тепла q_e, определяемых формулами:

$$w_e = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\omega_0^2 \varepsilon_0 \chi_e} \left(\frac{\partial}{\partial t} P\right)^2 + \frac{1}{2\varepsilon_0 \chi_e} P^2, \quad q_e = \frac{\tau_0}{\varepsilon_0 \chi_e} \left(\frac{\partial}{\partial t} P\right)^2,$$

получим выражения:

$$w_e = \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2 \Bigg\{ \left(1 + \chi_e \omega_0^2 \frac{\big((\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_0^4 \tau_0^2\big)(\omega_0^2 - \omega^2)}{\big((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \omega_0^4 \tau_0^2\big)^2}\right) \cos 2\omega t + 1$$

$$+ \chi_e \omega_0^2 \frac{2\omega\tau_0 \omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\big((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \omega_0^4 \tau_0^2\big)^2} \sin\omega t + \frac{\chi_e \omega_0^2 (\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \omega_0^4 \tau_0^2} \Bigg\},$$

$$q_e = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \omega^2 \chi_e \tau_0 \omega_0^4$$

$$\times \Bigg\{ \frac{\big((\omega^2 \omega_0^4 \tau_0^2 - (\omega_0^2 - \omega^2)^2\big) \cos 2\omega t - 2\omega\tau_0 \omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2) \sin 2\omega t}{\big((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \omega_0^4 \tau_0^2\big)^2}$$

$$+ \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \omega_0^4 \tau_0^2} \Bigg\}.$$

Эти выражения совпадают с выражениями, полученными в [4] и приводимыми в [6], если учесть, что в [4] вещество моделируется газом электронных осцилляторов, который характеризуется параметрами ω_e, γ и ω_0', связанными с используемыми здесь величинами χ_e, τ и ω_0 соотношениями:

$$\chi_e \omega_0^2 = \omega_e^2, \quad \tau_e \omega_0^2 = \gamma, \quad \omega_0 = \omega_0'.$$

Приведенные результаты и данные показывают, что использованный здесь подход к определению электромагнитной энергии как энергии поля и вещества является корректным, т. е. согласуется с формулой Пойнтинга, а в предельных случаях совпадает с известными выражениями, и, таким образом, может быть использован для определения энергетических характеристик более широкого класса электромагнитных процессов, чем это было возможно до настоящего времени.

Список литературы

[1] *Краснов И.П.* // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. В. 3. С. 89–96.
[2] *Максвелл Дж.К.* Трактат об электричестве и магнетизме. Т. II. М.: Наука, 1959. С. 222.
[3] *Стрэттон Дж.* Теория электромагнетизма. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. С. 125.
[4] *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А.* Электромагнетизм и электромагнитные волны. М.: Высш. шк., 1985. 504 с.
[5] *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
[6] *Давидович М.В.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 22. С. 53–63.
[7] *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 703 с.
[8] *Дебай П.* Избранные труды. Л.: Наука, 1987, 550 с.
[9] *Краснов И.П.* Основы классической теории намагничения тел. СПб.: ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, 2008.