

09

Управляемая стохастизация колебаний хаотической системы с запаздыванием

© Э.В. Кальянов

Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН
(Фрязинский филиал), Фрязино (Моск. обл.)
E-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

В окончательной редакции 8 июня 2009 г.

Рассмотрена математическая модель кольцевой автоколебательной системы с хаотической динамикой, состоящей из нелинейного усилителя, содержащего в цепи обратной связи дифференцирующий элемент, нелинейный колебательный контур и линию задержки. Численный анализ проведен при нерегулярно изменяющихся начальных условиях, задаваемых решениями уравнений хаотической системы, имитирующей собственные шумы, имеющиеся в реальных автоколебательных системах. Показано, что в случае нерегулярно изменяющихся во времени условий возбуждения хаотические колебания могут изменяться под их воздействием, преобразовываясь в стохастические, когда невозможно воспроизвести реализации колебательного процесса.

PACS: 05.45.-a

Обычно при решении уравнений, описывающих различные системы с хаотической динамикой, начальные условия задаются в виде единичного толчка, так что процесс хаотических движений, в отличие от стохастических колебаний, является детерминированным. Однако в реальных автоколебательных системах, в том числе и в генераторах с хаотической динамикой, мягкое возбуждение движений определяется собственными шумами, воздействие которых на автоколебания продолжается и после возбуждения системы. Представляется, что эти шумы могут оказывать существенное влияние на колебания систем с хаотической динамикой, делая колебания невоспроизводимыми. Исследованию этого вопроса посвящена настоящая работа. В ней на примере системы с хаотической динамикой, описываемой уравнением, подобным уравнению типа Ван дер Поля–Дюффинга, но с запаздывающей обратной связью, рассматривается влияние на динамику системы нерегулярных колебаний, имитирующих ее собственные шумы.

Автономный генератор типа Ван дер Поля–Дюффинга с учетом запаздывания в достаточно общем виде (при произвольной амплитудной характеристике) можно представить в виде усилительного элемента, в цепи обратной связи которого содержатся дифференцирующий элемент, нелинейный колебательный контур и линия задержки.

Предположим, что на выходе колебательного контура реализуется колебательный процесс $x(t)$. В этом случае, после задержки сигнала на время τ , на входе усилителя будем иметь запаздывающие колебания $x(t - \tau)$. На выходе усилителя колебательный процесс определяется выражением $F[x(t - \tau)]$. После дифференцирующего устройства с постоянной времени σ (на входе колебательного контура) будем иметь $(1/\sigma)\{dF[x(t - \tau)]/dt\}$. Таким образом, при наличии в колебательном контуре нелинейной возвращающей силы уравнение системы принимает вид

$$d^2x/dt^2 + \varepsilon(dx/dt) + x + \mu x^3 = (1/\sigma)[dF(x_\tau)/dt], \quad (1)$$

где $x_\tau = x(t - \tau)$; ε — параметр потерь колебательного контура; μ — постоянный коэффициент, характеризующий интенсивность нелинейной восстанавливающей силы.

При $\tau = 0$ и кубической характеристике уравнение (1) при дополнении его внешней гармонической силой, действующей на входе колебательного контура, принимает вид уравнения Ван дер Поля–Дюффинга, которое широко используется в различных областях науки и техники. Применительно к генерированию хаоса рассматривались различные способы управления его колебаниями [1–5].

Кубическая характеристика широко использовалась при приближенном аналитическом рассмотрении автоколебательных систем. Однако при численном анализе генераторов целесообразно использовать характеристики, которые, хотя и сложнее, но лучше аппроксимируют реальные нелинейные элементы. Удобными являются аппроксимации характеристик, используемые в уравнениях Дмитриева–Кислова [1] и Мэки–Гласса [6].

При численном анализе уравнения (1) целесообразно, как уже отмечалось, задавать начальные условия, определяющие возбуждение колебаний, не в виде единичного толчка, а в форме нерегулярных колебаний, имитирующих флуктуации. Применительно к генератору, описываемому этим уравнением, удобно использовать простую математическую модель, обладающую хаотическим поведением, уравнения

которой имеют вид

$$du/dt = v - u, \quad dv/dt = u(w - 0.8), \quad dw/dt = 1.2 - uv. \quad (2)$$

Если колебания, формируемые уравнениями (2), воздействуют на входе усилителя как аддитивная добавка $\gamma u(t)$ (где γ — постоянный коэффициент), то колебания на выходе усилителя зависят от $[x(t - \tau) + \gamma u(t)]$. В этом случае для аппроксимации можно записать

$$F(x_\tau + \gamma u) = M(x_\tau + \gamma u) \exp[-(x_\tau + \gamma u)^n], \quad (3)$$

где M — коэффициент усиления, n — параметр нелинейности. В частном случае, когда $n = 2$, соотношение (3) отображает, в соответствии с [1], рэлеевский закон изменения усиления.

С учетом выражения (3) представим уравнение (1) в виде системы, удобной для численного анализа. Полагая при этом, что $M = \sigma B$, будем иметь

$$\begin{aligned} dx/dt &= B(x_\tau + \gamma u) \exp[-(x_\tau + \gamma u)^n] - \varepsilon x - y, \\ dy/dt &= x + \mu x^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Результаты расчетов модели, определяемой уравнениями (2), (4), показаны на рис. 1–3. Численный анализ проводился методом Рунге–Кутты четвертого порядка при шаге интегрирования, равном 0.02. Неизменяемые параметры определялись следующими значениями: $\varepsilon = \mu = 1$, $n = 2$. При использовании задержки параметр запаздывания выбирался относительно небольшим, равным $\tau = 0.8$.

На рис. 1, *a* приведена характерная однопараметрическая бифуркационная диаграмма, наглядно иллюстрирующая изменение максимальных значений колебательного процесса $x(t)$, обозначенных через $[x]$, в зависимости от параметра усиления, когда $\tau = 0.8$. На рис. 1, *b* представлена двухпараметрическая диаграмма, по которой можно судить о грубости системы.

Как следует из однопараметрической диаграммы (рис. 1, *a*), по мере увеличения параметра усиления при достижении им значения $B \approx 2.4$ происходит возбуждение автоколебаний. В соответствии с тем, что максимальные значения колебательного процесса отображаются одной линией, колебания являются одноктактными и им соответствует простой предельный цикл. При $B \approx 4.7$ возникает бифуркация, отображающая переход к трехтактным колебаниям, а при достижении

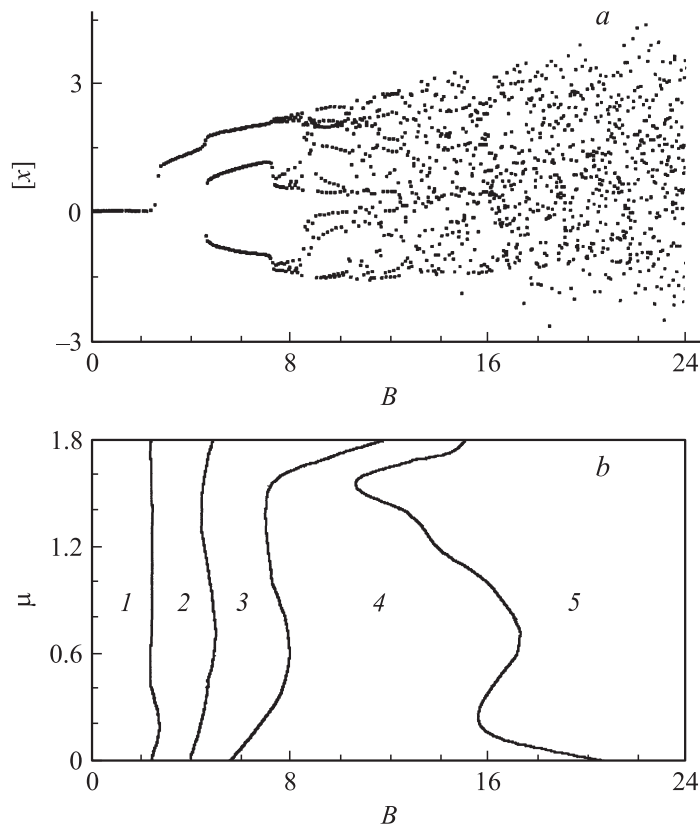


Рис. 1. Однопараметрическая (а) и двухпараметрическая (b) бифуркационные диаграммы.

значения $B \approx 7.2$ возникают более сложные движения. Нерегулярный разброс точек, отображающий возникновение развитого хаоса, наблюдается при $B > 16$. В соответствии с двухпараметрической диаграммой (рис. 1, b) нерегулярные колебания занимают относительно широкую область при изменении параметров μ и B .

Диаграммы, представленные на рис. 1, рассчитаны при увеличении параметра усиления. При его уменьшении диаграммы несколько изменя-

ются: проявляется гистерезис. Так, в случае однопараметрической диаграммы нижняя граница интервала значений параметра усиления, при которых реализуются трехтактные колебания, снижается до величины $B \approx 4.2$. При этом колебания, которым соответствует однооборотный предельный цикл, „затягиваются“ так, что срыв генерации происходит при $B \approx 1$.

Величина коэффициентов γ при расчете диаграмм выбрана малой ($\gamma = 0.000001$), достаточной лишь для выполнения колебаниями $u(t)$ роли флуктуаций, обеспечивающих возбуждение колебаний в системе (4). При этом начальные условия для переменных системы (2) задавались значениями ($u(0) = 0.95$, $v(0) = 1.0$, $w(0) = 1.1$), которые реализовывались по истечении процесса установления в этой системе хаотических колебаний. Однако даже в этом случае проявляется влияние на колебания $x(t)$ незначительных изменений начальных условий уравнений (2).

Естественно, это влияние нарастает с увеличением γ и при значительных значениях этого параметра (например, при $\gamma = 1$) „развитая“ нерегулярность колебательного процесса $x(t)$ может обеспечиваться даже при $\tau = 0$. Однако этот процесс зашумления колебаний $x(t)$ не определяется хаотической динамикой системы, определяющей их генерацию, а внешним воздействием нерегулярных колебаний $u(t)$. В связи с этим можно полагать, что в реальном генераторе с запаздыванием, в котором роль колебаний $u(t)$ выполняют собственные шумы (флуктуации различного происхождения), генерируемые колебания не имеют чисто хаотической природы: существенное значение может иметь стохастичность, определяемая воздействием собственных шумов. Воспроизводимость фрагментов таких колебаний, являющаяся важным свойством в ряде применений хаотических систем, проблематична.

Структура колебаний $u(t)$ и $x(t)$, а также влияние изменения колебаний $u(t)$ на колебательный процесс $x(t)$ иллюстрируется фрагментами реализаций, показанными на рис. 2. На рис. 2, *a* приведен фрагмент реализации воздействующих колебаний, при использовании которых с указанным выше значением коэффициента γ рассчитаны диаграммы рис. 1. На рис. 2, *b* представлен фрагмент реализации, иллюстрирующий структуру развитых хаотических движений $x(t)$, возбуждающихся при параметрах и значениях переменных, соответствующих величине $B = 18.04108$ на рис. 1, *a*. На рис. 2, *c* приведен фрагмент разностных движений (обозначенных через $X(t)$). Он иллюстрирует „разбегание“

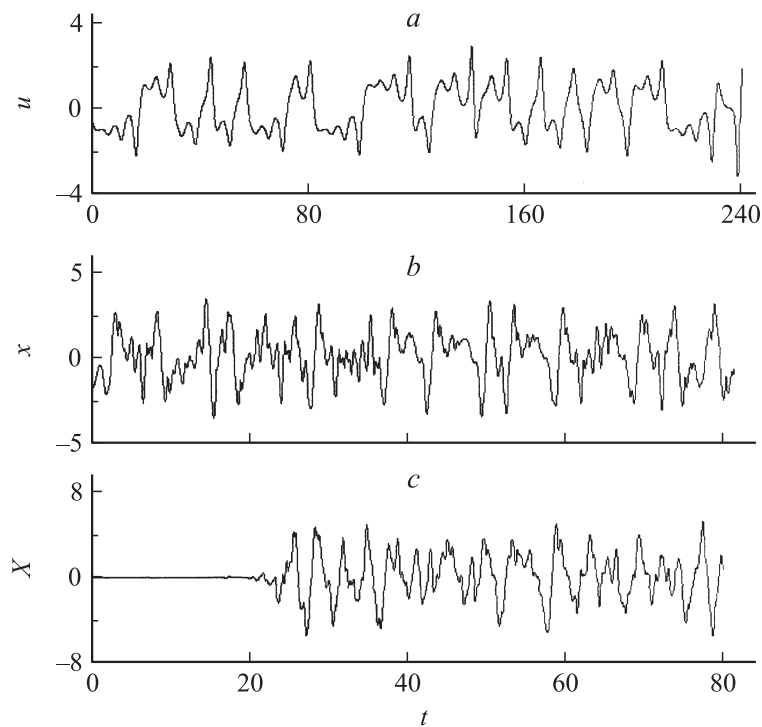


Рис. 2. Фрагменты реализаций колебательных процессов $u(t)$ (a), $x(t)$ (b) и $X(t)$ (c).

траекторий колебательных процессов при незначительном изменении параметра γ . Разностные колебания $X(t)$ рассчитывались как разность колебательного процесса $x(t)$, представленного фрагментом реализации рис. 2, b, и того же процесса $x(t)$, рассчитанного в том же интервале времени, но при другом значении параметра γ , а именно, при $\gamma = 0.000002$. Как видно на рис. 2, c, при изменении начальных условий для уравнений (2), при $t \approx 24$ появляются разностные колебания, свидетельствующие о том, что при этом значении времени структура колебаний при отмеченном незначительном увеличении γ становится существенно иной.

Из анализа фрагментов реализаций колебательных процессов, рассчитанных при различных γ , следует, что собственные шумы, всегда существующие в реальных генераторах с хаотической динамикой, неизбежно изменяют структуру их колебаний, так что в соответствии со стохастической природой собственных шумов генерируемые колебания реальных систем не могут оставаться чисто хаотическими. Этим обусловлена невозможность точного воспроизведения в натурном эксперименте фрагментов реализаций колебательного процесса.

На рис. 3, *a* приведен спектр мощности $S(x)$ (кривая 1), соответствующий колебаниям $x(t)$, фрагмент которых показан на рис. 2, *b*. Кривая 2 отображает спектр мощности $S(u)$, соответствующий воздействию колебаниям $u(t)$. Видно, что в соответствии с диаграммой, представленной на рис. 1, *a*, и фрагментом реализации колебаний, показанным на рис. 2, *b*, спектр мощности $S(x)$ является непрерывным и имеет относительно малые перепады спектральной плотности мощности колебаний. Форма спектра $S(x)$ существенно отличается от спектра $S(u)$, соответствующего воздействию колебаниям, что свидетельствует об отсутствии эффекта хаотической синхронизации. При этом, как показывает численный анализ, даже увеличение γ до значения $\gamma = 1$ не приводит к существенному изменению спектра $S(x)$. В то же время при регулярных колебаниях $x(t)$, полученных за счет уменьшения запаздывания в цепи обратной связи до величины $\tau = 0.04$, при увеличении γ возможно возбуждение нерегулярных движений. Это иллюстрируется рис. 3, *b*, на котором приведены спектры мощности, соответствующие колебаниям, возбуждающимся при различных значениях γ ($\gamma = 0.000001$ (кривая 1), $\gamma = 0.1$ (кривая 2), $\gamma = 1$ (кривая 3)) в случае, когда $\tau = 0.04$, а остальные параметры те же, что и при расчете рис. 2, *b*. Видно (кривая 3), что при $\gamma = 1$ спектр, отображая нерегулярный характер колебаний, становится широкополосным. В то же время он существенно отличается от спектра мощности воздействующих колебаний $u(t)$: по форме кривая 3 рис. 3, *b* даже ближе к кривой 1 на рис. 3, *a*. Возможно, что в этом проявляется асинхронное взаимодействие между управляемыми и управляющими колебаниями, которое, как известно [7], существенно усложняет спектр колебаний управляемых движений даже в простых системах с регулярной динамикой.

Приведенные результаты численного анализа свидетельствуют о возможности возбуждения в генераторе типа Ван дер Поля–Дюффинга, имеющем характеристику рэлеевского типа, развитого хаоса при ис-

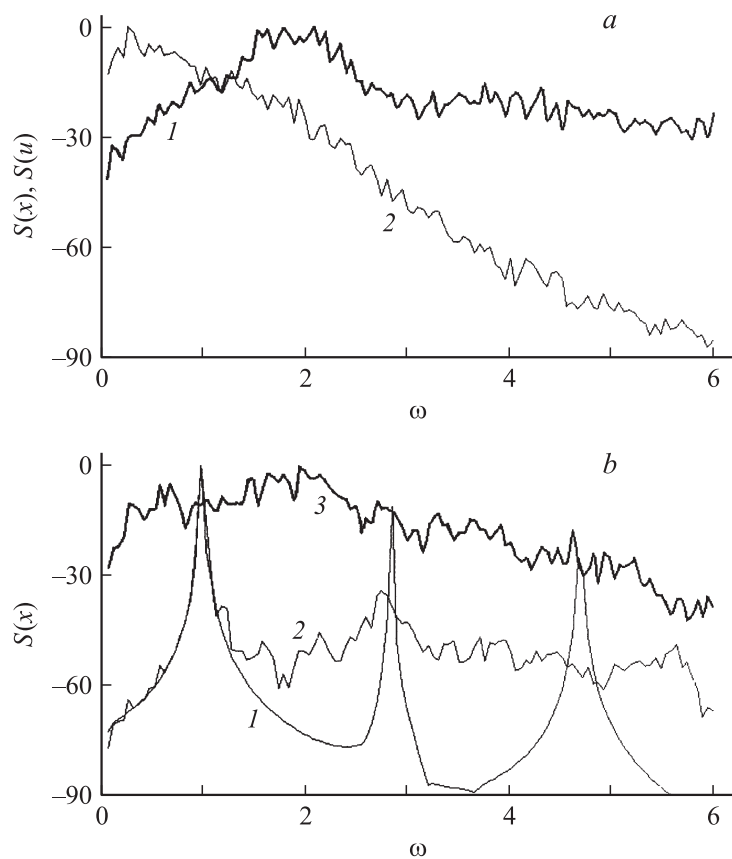


Рис. 3. Спектры мощности колебательных процессов: *a* — спектрограмма колебаний $x(t)$ при $\tau = 0.8$ (кривая 1) и спектрограмма воздействующего сигнала $u(t)$ (кривая 2); *b* — спектры, соответствующие колебаниям $x(t)$ при $\tau = 0.04$, когда $\gamma = 0.000001$ (кривая 1), $\gamma = 0.1$ (кривая 2), $\gamma = 1$ (кривая 3).

пользовании относительно малого запаздывания в цепи обратной связи. Непрерывно действующие нерегулярные колебания, выполняющие роль начальных условий, изменяют структуру колебательного процесса в рассматриваемом генераторе даже при слабых воздействиях, в связи с чем представляется, что в реальных генераторах с хаотической

динамикой неизбежна стохастизация колебаний. Время установления процесса стохастизации сокращается при увеличении интенсивности собственных шумов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-02-00351).

Список литературы

- [1] *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989, гл. 2. С. 107.
- [2] *Xu J., Chung K.W.* // *Physica D.* 2003. V. 180. P. 17–39.
- [3] *Kakmeni F.M.M., Bowong S., Tchawoua C., Kaptauom E.* // *Journal of Sound and Vibration.* 2004. V. 277. N 11. P. 783–799.
- [4] *Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 6. С. 29–35.
- [5] *Талагаев Ю.В., Тараканов А.Ф.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 24. С. 1–9.
- [6] *Maskey M.C., Glass L.* // *Science.* 1977. V. 197. N 4300. P. 287–289.
- [7] *Железовский Б.Е., Кальянов Э.В.* Многочастотные режимы в приборах СВЧ. М.: Связь, 1978. гл. 4. С. 151.