01;05

Биметаллический цилиндр в импульсном магнитном поле

© Г.Ш. Болтачев, Н.Б. Волков

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: grey@iep.uran.ru

Поступило в Редакцию 4 мая 2009 г.

Аналитически решена задача о диффузии внешнего магнитного поля в биметаллический цилиндр, представляющий собой стержень и оболочку из разных проводящих материалов. В случае импульса внешнего поля в виде одной полуволны $B_e = B_m \sin(\pi t/T)$ проанализировано расслоение цилиндра, обусловленное расширением оболочки под действием остаточного магнитного поля в ее внутренней полости. Выявлена немонотонная зависимость силового действия остаточного поля от проводимости стержня.

PACS: 41.20.Gz, 81.20.Ev

Высокую эффективность в процессах магнитно-импульсного прессования нанопорошков [1–3] демонстрирует так называемая схема θ-пинча, когда сжатие проводящей цилиндрической оболочки достигается за счет силового действия импульсного магнитного поля внешнего коаксиально расположенного соленоида [4]. Помимо сжатия теоретически предсказана [4,5] возможность индукционного расширения оболочек во внешнем магнитном поле. Так, в работе [5] для импульса внешнего поля в виде одной полуволны синуса, что характерно для схемы θ-пинча [1], проанализировано расширение проводящего полого цилиндра, сжатию которого препятствует непроводящий стержень. Реализация такого процесса при магнитно-импульсном прессовании рассматривается как перспективный способ бесконтактной выпрессовки предварительно сформированного порошкового изделия из металлической трубы. Однако в условиях реальных экспериментов по прессованию порошков часто используются стержни с ненулевой электропроводностью [1–3]. Роль проводящего стержня может выполнять и сама заготовка, например при изготовлении металлокерамики [6].

В связи с этим значительный интерес представляет задача о диффузии магнитного поля в биметаллический цилиндр, состоящий из стержня и оболочки. Уравнение диффузии в условиях цилиндрической симметрии имеет вид

$$\frac{1}{\kappa} B_t = B_{rr} + \frac{1}{r} B_r, \tag{1}$$

где $B(r,t)$ — индукция магнитного поля, $\kappa = \rho/\mu$ — коэффициент диффузии, ρ — удельное электросопротивление, $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m — магнитная проницаемость. Поставленная задача предполагает одновременное решение уравнений (1) для стержня и оболочки при начальном условии — $B(r, t = 0) = 0$, и граничных условиях —

$$B_c(b,t) = B_b(t) \quad (r = b), \quad B_m(a,t) = B_c(a,t) \quad (r = a),$$

$$\rho_c \frac{\partial B_c}{\partial r} = \rho \frac{\partial B_m}{\partial r} \quad (r = a), \quad \frac{\partial B_m}{\partial r} = 0 \quad (r = 0), \tag{2}$$

где a и b — внутренний и внешний радиусы оболочки соответственно, $B_b(t)$ — внешнее по отношению к оболочке магнитное поле; нижний индекс „c“ обозначает величины, относящиеся к оболочке, „m“ — к стержню. В рамках преобразования Лапласа [7]

$$A(r,p) = \hat{L}\{B(r,t)\} = \int\limits_0^\infty e^{-pt} B(r,t)dt \tag{3}$$

сформулированная задача для изображения $A(r)$ искомой функции (зависимость от параметра p для краткости будем опускать) сводится к уравнениям Бесселя, решение которых, получаемое аналогично решению для полой оболочки [5], имеет вид

$$A(r) = \frac{A_b}{F_b} \Phi(x,p), \quad \Phi(x,p) = \begin{cases} 2\gamma J_0(\alpha x)/(\pi\beta x_a) & (0 \leqslant x \leqslant x_a), \\ F(x) & (x_a \leqslant x \leqslant 1). \end{cases} \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем используются обозначения: $x = r/b$, $x_a = a/b$,

$$F(x) = J_1(\alpha x_a)\big[J_0(\beta x)Y_0(\beta x_a) - Y_0(\beta x)J_0(\beta x_a)\big]$$
$$- \gamma J_0(\alpha x_a)\big[J_0(\beta x)Y_1(\beta x_a) - Y_0(\beta x)J_1(\beta x_a)\big],$$

$$\beta = b\sqrt{\frac{-p}{\kappa_c}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\rho_c}{\rho_m}} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad F_b = F(1), \quad A_b = \hat{L}\{B_b(t)\},$$

$$s_1 = J_0(\beta)Y_0(\beta x_a) - Y_0(\beta)J_0(\beta x_a), \quad s_2 = J_0(\beta)Y_1(\beta x_a) - Y_0(\beta)J_1(\beta x_a),$$

$$s_3 = J_1(\beta)Y_0(\beta x_a) - Y_1(\beta)J_0(\beta x_a), \quad s_4 = J_1(\beta)Y_1(\beta x_a) - Y_1(\beta)J_1(\beta x_a),$$

J_k, Y_k — функция Бесселя первого и второго рода k-го порядка.

Как известно [7], решение для произвольного граничного условия $B_b(t)$, включаемого в момент времени $t = 0$, может быть легко сконструировано на основе решения, отвечающего „постоянным“ граничным условиям:

$$B_b(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ B_0, & t \geq 0, \end{cases} \quad A_b = \tfrac{B_0}{p}. \tag{5}$$

Обратное преобразование Лапласа при условии (5) дает для магнитного поля

$$\frac{B(r,t)}{B_0} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(x,\beta_n)}{\beta_n g(\beta_n)} \exp\left(-\beta_n^2 \frac{\kappa_c t}{b^2}\right), \tag{6}$$

где $g(\beta) = \gamma J_0(\gamma\beta x_a)s_4 - J_1(\gamma\beta x_a)\left[x_a(1-\gamma^2)s_2 + s_3\right]$, а β_n — корни уравнения $F_b(\beta) = 0$. Решение задачи для произвольного граничного условия $B_b(t)$ выражается через интеграл Дюамеля [7]:

$$B(r,t) = -\frac{2\kappa_c}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \Phi(x,\beta_n)}{g(\beta_n)} \int\limits_0^t B_b(y) \exp\left(-\beta_n^2 \frac{\kappa_c}{b^2}(t-y)\right) dy. \tag{7}$$

В экспериментах по магнитно-импульсному прессованию в условиях θ-пинча [1–3] импульс внешнего магнитного поля близок по виду к одной полуволне синуса —

$$B_b(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \quad t > T, \\ B_{\max}\sin(\pi t/T), & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{8}$$

Общее выражение (7) для импульса (8) на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ дает

$$\frac{B(r,t)}{B_{\max}} = \sin(\pi\tau) - 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \Phi(x,\beta_n)}{g(\beta_n)}$$

$$\times \frac{\exp(-\pi\beta_n^2\lambda\tau) - \cos(\pi\tau) - (\beta_n^2\lambda)^{-1}\sin(\pi\tau)}{1 + (\beta_n^2\lambda)^2}, \tag{9}$$

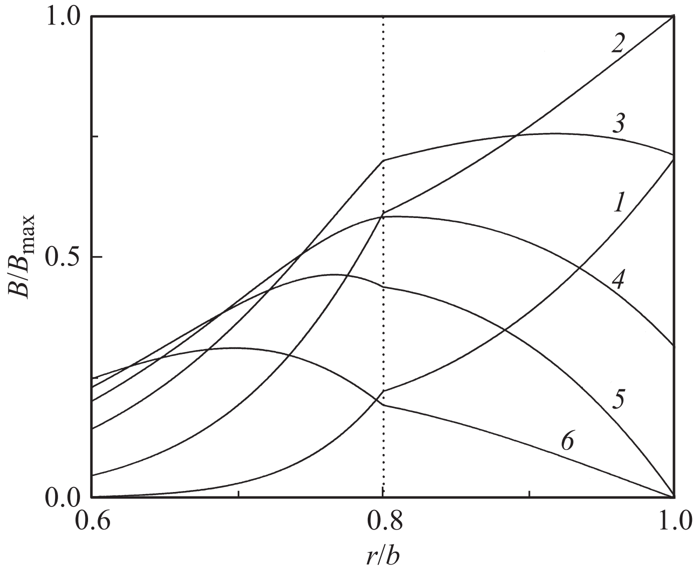

Рис. 1. Пространственное распределение магнитного поля в системе „стержень + оболочка“ при $x_a = 0.8$, $\gamma = 2$ и $\lambda \cong 0.034$ в моменты времени: *1* — $\tau = 0.25$, *2* — 0.5, *3* — 0.75, *4* — 0.9, *5* — 1.0, *6* — 1.2.

где $\tau = t/T$, $\lambda = \kappa_c T/(\pi b^2)$, и при $t > T$ —

$$\frac{B(r,t)}{B_{\max}} = -2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \Phi(x,\beta_n)}{g(\beta_n)} \frac{\exp(-\pi\beta_n^2\lambda)+1}{1+(\beta_n^2\lambda)^2} \exp\left[-\pi\beta_n^2\lambda(\tau-1)\right]. \quad (10)$$

В приведенных величинах $(B/B_{\max}, x, \tau)$ решение (9), (10) определяется значениями безразмерных комплексов x_a, γ и λ. Пространственные распределения магнитного поля в системе „стержень + оболочка“ при определенных значениях этих комплексов представлены на рис. 1. Использованное значение λ соответствует медной оболочке ($\rho_c = 1.7 \cdot 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$) диаметром $2b = 10\,\mathrm{mm}$ при длительности внешнего импульса $T = 200\,\mu\mathrm{s}$. Вертикальным пунктиром на рис. 1 отмечена граница между стержнем и оболочкой. Магнитное поле на

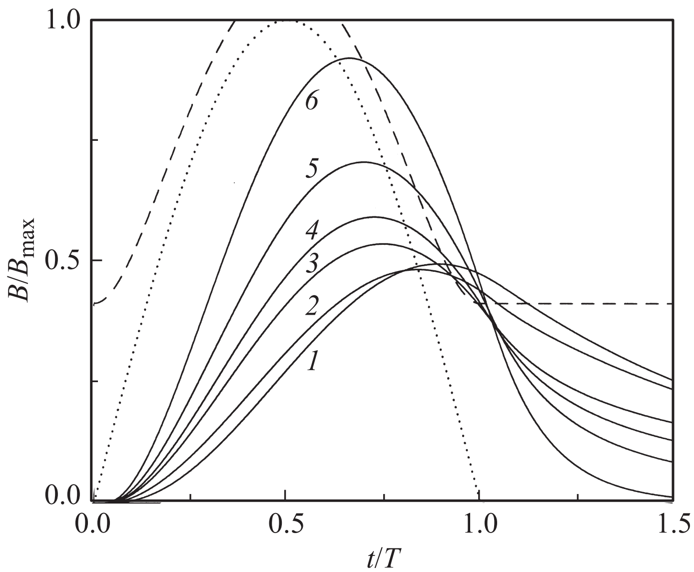

Рис. 2. Временны́е развертки магнитного поля на внутренней поверхности оболочки B_a при $x_a = 0.8$, $\lambda \cong 0.034$ для значений γ^2: *1* — 0, *2* — 0.1, *3* — 0.5, *4* — 1.0, *5* — 4.0, *6* — ∞. Пунктирная линия — импульс внешнего магнитного поля B_b. Штриховая линия — поле $B_{a,\min}$, соответствующее пределу текучести оболочки.

этой границе $B_a = B(a, t)$ определяет силовое воздействие на оболочку, отождествляемое с движущей разностью давлений [3,5]:

$$\Delta p = \frac{B_a^2 - B_b^2}{2\mu} - \Delta p_{el}, \quad \Delta p_{el} = \tau_e \sqrt{2} \ln(b/a), \tag{11}$$

где Δp_{el} — максимальная разность давлений, которая может быть скомпенсирована упругими напряжениями в оболочке, τ_e — предел текучести. Временны́е развертки поля B_a, соответствующие различным значениям параметра γ, представлены на рис. 2. Кривая 1 (при $\gamma = 0$) описывает магнитное поле внутри полой оболочки и построена по уравнению (12) работы [5]. На том же рисунке показано значение поля $B_{a,\min} = \sqrt{B_b^2 + 2\mu\Delta p_e}$, определяемое условием $\Delta p = 0$. В моменты времени, когда $B_a(t) > B_{a,\min}$, оболочка получает „импульс“ расширения $I = \int \Delta p\, dt$. Пренебрегая смещением оболочки в течение действия магнитных давлений B_b и B_a, что вполне оправданно, для высокоинерционной оболочки, и принимая поле скоростей, соответствующее модели несжимаемой среды [3], можем записать для приобретенного импульса

$$I \equiv \int \Delta p(t) dt = m_c b v_b \ln(b/a), \tag{12}$$

где m_c — плотность, а $v_b = db/dt$ — скорость расширения оболочки.

Оценим необратимое пластическое расширение оболочки $x_b = \Delta b/b$, которое может произойти в результате приобретенного ею импульса. Для этого воспользуемся равенством кинетической энергии (на единицу длины)

$$E_k \equiv \int\limits_a^b \frac{v^2(r,t)}{2} m_c 2\pi r\, dr = \frac{\pi I^2}{m_c \ln(b/a)} \tag{13}$$

и работы A, производимой силами внутренних напряжений при пластическом диформировании. Используя приближение несжимаемости материала оболочки в ходе пластического течения и результаты решения задачи Ламе для упругих напряжений в цилиндрической трубе [8], нетрудно получить для единицы объема

$$\delta A = \tau_e \sqrt{2}\, \frac{v(r,t) dt}{r}. \tag{14}$$

Интегрируя последнее соотношение по объему и по времени, приходим к

$$A = \frac{\pi \tau_e b^2}{\sqrt{2}} \big[2(1+x_b)^2 \ln(1+x_b) - (x_a^2 + 2x_b + x_b^2)$$
$$\times \ln(x_a^2 + 2x_b + x_b^2) + x_a^2 \ln(x_a^2)\big]. \tag{15}$$

Равенство $E_k = A$ теперь позволяет определить искомую величину x_b. Помимо комплексов x_a, λ, γ относительное расширение оболочки x_b зависит от амплитуды внешнего импульса $B_{\max}$ и параметров τ_e, m_c. Влияние проводящих свойств стержня на величину расширения медных оболочек ($\tau_e \cong 60\,\text{MPa}$, $m_c = 8.96\,\text{g/cm}^3$) иллюстрирует рис. 3. Видно, что слабо проводящие стержни ($\rho_c/\rho_m \to 0$) по сравнению с абсолютно непроводящим ($\rho_c/\rho_m = 0$) уменьшают силовое действие остаточного

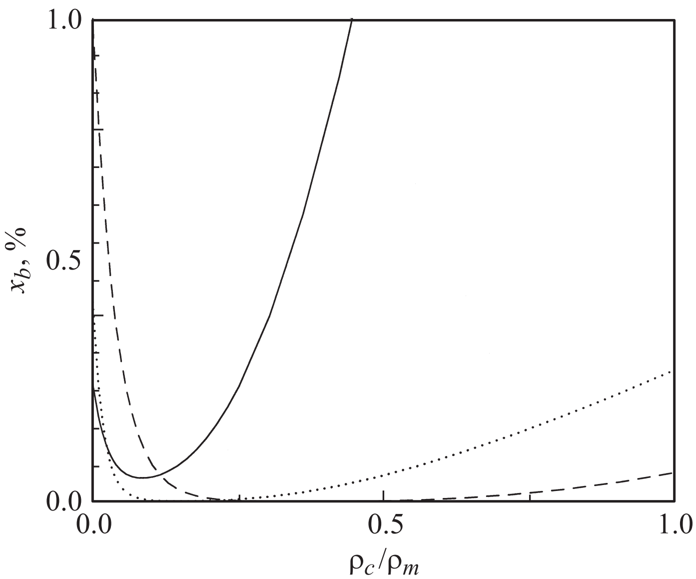

Рис. 3. Относительное увеличение радиуса медной оболочки в зависимости от приведенной проводимости стержня. Сплошная линия — $\lambda \cong 0.017$, $x_a = 0.8$, $B_{\max} = 25\,\mathrm{T}$, штриховая — $\lambda \cong 0.034$, $x_a = 0.8$, $B_{\max} = 16.7\,\mathrm{T}$, пунктирная — $\lambda \cong 0.017$, $x_a = 0.88$, $B_{\max} = 15\,\mathrm{T}$.

магнитного поля, в то время как с ростом величины $\gamma = \sqrt{\rho_c/\rho_m}$ характер влияния может измениться. В результате расслоение биметаллического цилиндра по величине x_b может многократно превосходить расслоение системы „оболочка + непроводящий стержень“. Особенно сильно это проявляется с уменьшением параметра λ.

Таким образом, в результате проведенного исследования получено точное решение задачи о диффузии внешнего магнитного поля в систему, состоящую из проводящих стержня и оболочки. На основе полученного решения проанализировано расслоение биметаллических цилиндров, и выявлен немонотонный характер влияния проводящих свойств стержня на силовое действие магнитного поля.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 08-08-00123-а и 09-08-00198-а.

Список литературы

[1] *Paranin S., Ivanov V., Nikonov A., Spirin A., Khrustov V., Ivin S., Kaygorodov A., Korolev P.* // Advances in Science and Technology. 2006. V. 45. P. 899.
[2] *Болтачев Г.Ш., Волков Н.Б., Добров С.В., Иванов В.В., Ноздрин А.А., Паранин С.Н.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. В. 10. С. 58.
[3] *Болтачев Г.Ш., Волков Н.Б., Иванов В.В., Паранин С.Н.* // ПМТФ. 2008. В. 2. С. 211.
[4] *Шнеерсон Г.А.* Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. Л.: Энергоиздат, 1981.
[5] *Болтачев Г.Ш., Волков Н.Б.* // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. В. 7. С. 86.
[6] *Ivanov V.V., Zajats S.V., Medvedev A.I., Shtol'ts A.K., Pereturina I.A., Rhee C.K., Lee G.H.* // J. Mater. Sci. 2004. V. 39. P. 5231.
[7] *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
[8] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 536 с.