01;05

Моделирование неоднородных материалов по заданным спектрам отражения и прохождения электромагнитных волн

© *В.Н. Емец, И.В. Бычков, В.Д. Бучельников*

Челябинский государственный университет
E-mail:bychkov@csu.ru

В окончательной редакции 23 апреля 2009 г.

Приводятся результаты моделирования неоднородных по толщине материалов по заданным спектрам отражения и прохождения электромагнитных волн с использованием методов Галёркина и Левенберга–Марквардта. Из решения обратной задачи определяются неоднородные диэлектрические проницаемости слоев. Показана возможность моделирования прозрачных и поглощающих материалов с хорошей точностью.

PACS: 41.20.-q, 02.30.Zz

Определение электрофизических характеристик материалов по известным спектрам отражения и прохождения электромагнитных волн является обратной задачей. В отличие от прямых задач, когда электрофизические характерстики известны и требуется определить либо распределение электромагнитного поля в материале и на его границах, либо коэффициенты отражения и прохождения, в обратной задаче, наоборот, по известным спектрам отражения и прохождения необходимо найти зависимости диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостей материала. Обратным задачам посвящено довольно много работ (см., например, [1–3] и ссылки в них). К обратным задачам относятся задачи синтеза слоистых материалов с заданными спектрами отражения и прохождения. В работе [3] приводится синтез многослойных структур из материалов с однородными показателями преломления при заданных спектрах отражения R или прохождения T электромагнитных волн. Задачи на восстановление электрофизических характеристик или синтез материалов являются некорректными обратными задачами и могут иметь несколько решений или не иметь вообще. Отсутствие решения для задачи восстановления может быть связано с зашумленностью измеренных спектров R и T. Существование нескольких решений объясняется тем, что слои с разными профилями ε и μ в рассматриваемой области длин волн могут давать очень похожие спектры. Для устранения неоднозначности нужно использовать априорную информацию о решении. Во-первых, необходимо ограничить класс и вид профилей, во-вторых, использовать спектры в диапазоне длин волн, где они чувствительны к небольшим изменениям искомых характеристик. Выбор вида профилей и такого диапазона не всегда очевиден. В данной работе предлагается расчетный метод, основанный на методах Галёркина и Левенберга–Марквардта, пригодный как для определения неоднородных ε и μ по толщине пластины при известных спектрах отражения и/или пропускания электромагнитных волн, так и для синтеза неоднородных по толщине слоистых материалов.

Поставим прямую задачу. Рассмотрим находящуюся в вакууме неоднородную пластину толщиной d, на которую нормально падает плоская электромагнитная волна $e_0\exp(-i\omega t+ikz)$ с волновым числом $k=2\pi/\lambda$ и циклической частотой ω. Предположим, что амплитуда падающей волны e_0 равна единице; обозначим через r, t амплитуды отраженной и прошедшей волн. В случае неоднородных $\varepsilon(z)$ и $\mu(z)$ из системы уравнений Максвелла и граничных условий на электромагнитное поле получим уравнение для определения напряженности электрического поля ТЕ-волны $E(z)$ в пластине:

$$\frac{d^2E}{dz^2}-\frac{d\ln\mu(z)}{dz}\frac{dE}{dz}+k^2\varepsilon(z)\mu(z)E=0, \tag{1}$$

$$E(0)=1+r,\quad E(d)=t,\quad E'(0)=ik\mu(0)(1-r),\quad E'(d)=ik\mu(d)t.$$

С помощью замены $E(z)=U(z)\exp(\frac{1}{2}\int\frac{d\ln\mu}{dz}dz)$ уравнение (1) сводится к виду

$$\frac{d^2U}{dz^2}+Q(z)U=0,\, Q(z)=k^2\varepsilon(z)\mu(z)-\frac{1}{4}\left(\frac{d\ln\mu(z)}{dz}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d^2\ln\mu(z)}{dz^2}, \tag{2}$$

$$U(0)\sqrt{\mu(0)}=1+r,\quad (U\sqrt{\mu})'|_{z=0}=ik\mu(0)(1-r),$$
$$U(d)\sqrt{\mu(d)}=t,\quad (U\sqrt{\mu})'|_{z=d}=ik\mu(d)t.$$

Решение уравнения (2) находится методом Галёркина [4]. Этот метод обладает большой устойчивостью в сравнении с методами численного интегрирования, поскольку является вариационным, что существенно при использовании его в решении обратной задачи. Решение уравнения (2) представим в виде

$$U(z) = U_0(z) + \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(z), \tag{3}$$

где $U_0(z) = A_1 e^{-iqz} + A_2 e^{iqz}$ вводится для удовлетворения граничным условиям, $q = \sqrt{Q(0)}$, $\phi_i(z)$ — известные аналитические ортонормированные базисные функции, удовлетворяющие условию $\phi_i(0) = \phi_i(d) = 0$, N — число базисных функций A_i, a_i — коэффициенты, подлежащие определению. Подстановка выражения (3) в уравнение (2) приводит к отличной от нуля невязке R, имеющей вид

$$R = U'' + Q(z)U = -q^2(A_1 e^{-iqz} + A_2 e^{iqz})$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i''(z) + Q(z)\Big(A_1 e^{-iqz} + A_2 e^{iqz} + \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(z)\Big). \tag{4}$$

В методе Галёркина неизвестные коэффициенты a_i, входящие в выражение (3), определяются из решения системы уравнений:

$$(R, \phi_i(z)) = 0, i = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

Дополнительно к a_i необходимо определить еще четыре неизвестных: A_1, A_2, r, t. Они определяются из граничных условий на электромагнитное поле. Таким образом, в результате получается линейная неоднородная алгебраическая система уравнений, которую для компактности можно записать в матричном виде

$$M(\lambda, \varepsilon, \mu, d)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\lambda, \varepsilon, \mu, d), \mathbf{x} = [r, t, A_1, A_2, a_1, \ldots, a_N]^T. \tag{6}$$

Подстановка величин A_i, a_i, полученных при решении системы уравнений (6), в (3) дает приближенное решение $U(z)$. Энергетические коэффициенты отражения и прохождения выражаются через амплитуды отраженной и прошедшей волн, также полученных из системы (6), по формулам $R = |r|^2$, $T = |t|^2$.

Теперь обратимся к обратной задаче, в которой необходимо определить проницаемости слоя по известным зависимостям $R(\lambda)$ и $T(\lambda)$.

Из вида дифференциального уравнения (2) видно, что эта задача относится к классу коэффициентных обратных задач. Запишем постановку задачи в абстрактном операторном виде

$$\mathbf{A}(\lambda, \varepsilon, \mu, d) = y(\lambda), \tag{7}$$

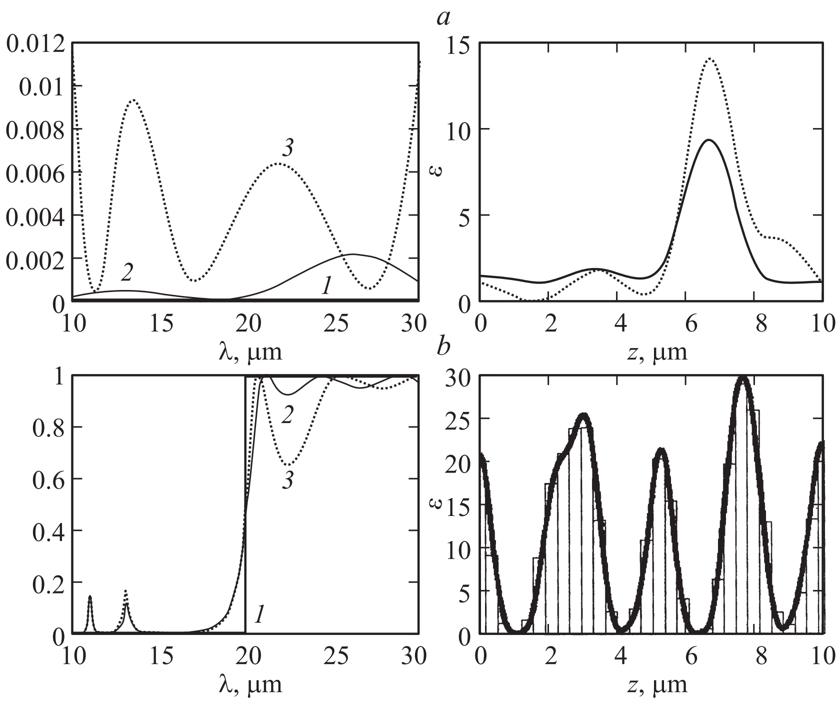
где $\mathbf{A}$ — оператор отражения или прохождения, $y(\lambda)$ — коэффициент отражения или прохождения.

Операторы отражения и прохождения можно записать в следующем виде: $\mathbf{R} = |M_1^{-1}\mathbf{b}|^2$, $\mathbf{T} = |M_2^{-1}\mathbf{b}|^2$, индекс указывает на номер строки обратной матрицы M^{-1}. Проницаемости $\varepsilon(z)$ и $\mu(z)$ можно представить в виде разложения: $\varepsilon(z) = \sum_{i=1}^{M} c_i\psi_i(z)$, где c_i — неизвестные коэффициенты, $\psi_i(z)$ — известные базисные функции. В этом случае задача сводится к нахождению коэффициентов c_i. Для их определения вводится функция оценки

$$F(\mathbf{c}, d) = \sum_i (\mathbf{A}(\lambda_i, \mathbf{c}, d) - y_i)^2, \tag{8}$$

где y_i — известное значение коэффициента отражения (прохождения). Коэффициенты c_i находятся из процедуры минимизации функции F. Для этого используется метод Левенберга–Марквардта [5]. Данный метод выбран в связи с тем, что оператор $\mathbf{A}$ может иметь разрывной обратный оператор $\mathbf{A}^{-1}$. Минимизация выполняется с ограничениями такими, чтобы $\varepsilon(z)$ и $\mu(z)$ были неотрицательными. В качестве функций $\psi_i(z)$ используются базисные сплайны третьей степени [6]. Эти базисные сплайны положительно определены, поэтому неизвестные коэффициенты должны быть неотрицательными. При расчетах априорно задается точность минимизации δ и минимизация выполняется до тех пор, пока не получится значение функции $F \leqslant \delta$. В качестве начального приближения берутся случайные неотрицательные значения. Если найден минимум F, больший δ, то минимизация повторяется с другим начальным приближением.

Пример моделирования диэлектрической проницаемости полностью поглощающего неоднородного слоя в заданном диапазоне длин волн представлен на рисунке, *a*. Коэффициенты отражения и прохождения



Примеры моделирования диэлектрической проницаемости: *a* — неоднородного полностью поглощающего слоя; *b* — прозрачного „отрезающего" слоя. Левая часть рисунка *a*: *1* — заданные коффициенты прохождения и отражения ($R = 0$, $T = 0$); *2*, *3* — восстановленные с помощью прямой задачи по смоделированным с помощью обратной задачи диэлектрическим проницаемостям (правые части рисунков) коэффициенты прохождения и отражения соответственно. Левая часть рисунка *b*: *1* — заданный коэффициент прохождения (ступенька); *2*, *3* — восстановленные коэффициенты прохождения для неоднородной $\varepsilon(z)$ и слоистой структуры соответственно. Правая часть рисунка *a*: действительная (сплошная кривая) и мнимая (пунктирная кривая) части диэлектрической проницаемости, полученной при решении обратной задачи. Правая часть рисунка *b*: восстановленная диэлектрическая проницаемость пластины (сплошная кривая), полученная с помощью обратной задачи; гистограмма — аппроксимация пластины слоистой структурой.

во всем диапазоне заданы нулевыми. Комплексная диэлектрическая проницаемость представлялась в форме $\varepsilon(z) = 1 + \sum_{n=1}^{10}(a_n + ib_n)\psi_n(z)$, численные значения неизвестных коэффициентов a_i и b_i варьировались в интервале от 0 до 20. Справа на рисунке, *a* представлены полученные при решении обратной задачи действительная и мнимая части диэлектричекой проницаемости (сплошная и пунктирная линии соответственно). Слева на рисунке, *a* приведены восстановленные с помощью прямой задачи по смоделированной при решении обратной задачи диэлектрической проницаемости коэффициенты пропускания (кривая *2*, сплошная линия) и отражения (кривая *3*, пунктирная линия) TE-волны. Видно, что при выбранной точности обратной задачи ($\delta = 10^{-4}$) восстановленные коэффициенты отражения и пропускания неоднородного слоя согласуются с заданными нулевыми коэффициентами отражения и пропускания с точностью $< 10^{-2}$.

На рисунке, *b* приведен пример моделирования прозрачной „отрезающей“ пластины, которая до некоторой длины волны является полностью отражающей, а после этой длины волны — полностью пропускающей. Справа на рисунке, *b* представлена диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(z)$ (сплошная кривая) пластины, полученная с помощью обратной задачи. Неоднородную пластину $\varepsilon(z)$ можно представить слоистой структурой из 30 слоев одинаковой толщины. Аппроксимация исходной пластины слоями показана на рисунке, *b* гистограммой. При моделировании в каждом слое структуры вычислялось среднее значение $\varepsilon(z)$, и оно бралось за диэлектрическую проницамость слоя. На рисунке, *b* слева показазаны зависимости коэффициентов пропускания пластины (сплошная кривая) и слоистой системы из 30 слоев (пунктирная кривая), восстановленные с помощью прямой задачи с полученными из обратной задачи диэлектрическими проницаемостями. Видно, что восстановленные коэффициенты пропускания в пределах точности вычислений хорошо моделируют исходную пластину.

Таким образом, в данной работе представлен метод решения коэффициентной обратной задачи. Дилектрическая проницаемость в волновом уравнении представляется в виде разложения по известным базисным функциям с неизвестными коэффициентами, которые подлежать определению. Для совместного решения прямой и обратной задач используются методы Галёркина и Левенберга–Марквардта. Приведены примеры моделирования прозрачных и поглощающих покрытий. Реализация предложенного метода показывет его хорошую применимость для моделирования сред с заранее заданными спектрами отражения, прохождения и поглощения электромагнитных волн.

Список литературы

[1] *Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Абрамов А.В., Боголюбов А.С.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. В. 5. С. 112–117.

[2] *Митры Р.* Вычислительные методы в электродинамике. М.: Мир, 1977.

[3] *Гласко В.Б., Тихонов А.Н., Тихонравов А.В.* // ЖВФиМ. 1974. Т. 14. № 1. С. 135–144.

[4] *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галёркина. М.: Мир, 1988.

[5] *Васин В.В., Мокрушин А.А.* // Доклады Академии наук. 2000. Т. 371. С. 35–37.

[6] *Калиткин Н.Н., Шляхов Н.М.* // Математическое моделирование. 1999. Т. 11. № 11. С. 64–74.