01;04

Изучение продольной диэлектрической проницаемости плазмы с использованием двухпараметрического уравнения

© А.В. Латышев, Т.В. Терешина, А.А. Юшканов

Московский государственный областной университет
E-mail: avlatyshev@mail.ru, tv_nikitina@mail.ru, yushkanov@inbox.ru

В окончательной редакции 1 апреля 2009 г.

Рассматривается случай, когда электрон-электронные столкновения начинают сказываться на свойствах максвелловской плазмы. Применяется двухпараметрическое кинетическое уравнение, учитывающее эти столкновения. Получено аналитическое выражение продольной проницаемости плазмы. Когда частота электрон-электронных столкновений стремится к нулю, полученные результаты переходят в классические. Проведен анализ различных предельных случаев.

PACS: 52.35.-g, 52.20.-j, 52.25.-b

Диэлектрическая проницаемость является одной из основных характеристик плазмы. Знание этой величины необходимо для описания процесса распространения и затухания плазменных волн, скин-эффекта и механизма проникновения электромагнитных волн в плазму (см., например, [1–3]).

В настоящее время широко применяется интеграл с постоянной частотой столкновений [4]. В частности, для слабоионизованной плазмы используется τ — приближение интеграла столкновений: $J_1[f] = \nu_1(f_0^{ei} - f)$, $\nu_1 = 1/\tau_1$, где ν_1 — частота электрон-ионных столкновений, f_0^{ei} — максвелловская функция распределения электронов, устанавливающаяся в результате столкновений электронов с тяжелой компонентой (с ионами и нейтральными атомами),

$$f_0^{ei} = n\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}\exp[-\beta v^2],$$

$\beta = \frac{m}{2k_{\mathrm{B}}T}$, m — масса электрона, $n(\mathbf{r}, t)$ — их концентрация, k_{B} — постоянная Больцмана, T — температура плазмы.

Эта модель основана на предположении, что рассеяние электронов носит изотропный характер, при этом в результате рассеяния электроны утрачивают полностью свой первоначальный импульс. Известно, что τ-модель [5,6] адекватно описывает динамику слабоионизованной плазмы [4]. Для сильноионизованной плазмы становятся существенными электрон-электронные столкновения. При таких столкновениях полный импульс электронной подсистемы сохраняется. Это обстоятельство оказывает существенное влияние на динамику плазмы, особенно на ее электропроводность, а именно электропроводность плазмы определяет ее диэлектрическую проницаемость.

Аналогичная проблема возникла при описании свойств плазмы в металле, где при низких температурах становятся существенными электрон-электронные столкновения (см., например, [5–7]). Для описания влияния этих столкновений на поведение плазмы был разработан двухпараметрический интеграл столкновений, который является обобщением релаксационной τ-модели [8]. Этот обобщенный интеграл столкновений был успешно применен для описания электропроводности тонких пленок (см. [8,9]), а также при изучении аномального скин-эффекта в металле (см. [10–14]). Цель нашей работы состоит в применении аналогичного подхода для описания диэлектрической проницаемости сильноионизованной плазмы, когда электрон-электронные столкновения оказывают существенное влияние на ее динамику.

Итак, τ-модель [12,13] не во всех случаях адекватно описывает рассеяние электронов. Эта модель предполагает, что рассеяние полностью изотропное. В действительности электроны, претерпевшие рассеяние в объеме, могут частично сохранять свой импульс. Чтобы учесть это обстоятельство, в работе предлагается естественно обобщение интеграла столкновений $J_1[f]$:

$$J_2[f] = \nu_1(f_0^{ei} - f) + \nu_2(f_0^{ee} - f),$$

где $\tau_2 = 1/\nu_2$, ν_2 — частота столкновений электронов с электронами, f_0^{ee} — максвелловская функция распределения электронов, устанавливающаяся в результате электрон-электронных столкновений с сохранением полного импульса электронной подсистемы, $f_0^{ee} = n\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \exp[-\beta(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2]$, где $\mathbf{u}(r, t)$ — скорость электронов.

Интеграл столкновений $J_2[f]$ естественно называть (τ_1, τ_2)-модельным интегралом столкновений, а кинетическое уравнение с этим интегралом столкновений

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \nu_1(f_0^{ei} - f) + \nu_2(f_0^{ee} - f)$$

будем называть двухпараметрическим кинетическим уравнением [12,13].

Найдем выражение для продольной диэлектрической проницаемости сильноионизованной плазмы, которая характеризует электромагнитные свойства плазмы по отношению к продольному полю. Для изотропной плазмы тензоры σ_{ij} и ε_{ij} можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij} = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\varepsilon^{tr} + \frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon^{l}, \quad \sigma_{ij} = \left(\sigma_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\sigma^{tr} + \frac{k_i k_j}{k^2}\sigma^{l}.$$

Тензоры ε_{ij} и σ_{ij} связаны соотношением $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi}{\omega}\sigma_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Будем считать, что электрическое поле в плазме меняется по гармоническому закону как в пространстве, так и во времени. Ось x проведем вдоль направления изменения электрического поля. Тогда будем иметь $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$, где $E(x,t) = E_0 e^{i(kx-\omega t)}$. Введем безразмерные параметры: $\mathbf{C} = \sqrt{B}\mathbf{v}$, $b = \frac{\nu_2}{\nu}$, $e(x,t) = \frac{\sqrt{2}eE(x,t)}{\nu\sqrt{mk_{\mathrm{B}}T}}$, $\nu = \nu_1 + \nu_2$. Если искать функцию f в виде $f = f_0(C)[1 + f_1]$, где $f_0(C) = n_0\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}\exp(-C^2)$, то для функции f_1 получаем уравнение:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + C_x\frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1 = e(x,t)C_x + \frac{1}{\pi^{3/2}}\int \exp(-C'^2)[1 + 2b\mathbf{C}\mathbf{C}']f_1(x,\mathbf{C}',t)d^3C'. \quad (1)$$

Параметр b $(0 \leqslant b < 1)$ есть отношение частоты межэлектронных столкновений к полной частоте рассеяния электронов. Для слабоионизованной плазмы $b \ll 1$. Для сильноионизованной плазмы $b \sim 1$. Этот параметр будем называть столкновительным параметром частотности или, кратко, параметром частотности.

Решение уравнения (1) ищем в виде бегущей волны $f_1 = e^{j(kx-\Omega t)}\varphi(C_x)$, $\Omega = \omega\tau = \frac{\omega}{\nu}$. Получаем уравнение относительно функции φ:

$$\varphi(\mu)(w_0 + ik\mu) = (\alpha_0 E_0 + 2bA_1)\mu + A_0, \quad w_0 = 1 - i\Omega, \ \mu = C_x, \quad (2)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{2e}}{\nu\sqrt{mk_{\mathrm{B}}T}}, \quad A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int \exp(-u^2)u^n\varphi(u)du, \quad n = 0, 1. \tag{3}$$

Из уравнений (2) и (3) находим

$$\varphi(\mu) = \frac{\alpha_0 E_0}{w_0 + ik\mu}\frac{(1-T_0)\mu + T_1}{(1-T_0) - 2b[(1-T_0)T_2 + T_1^2]}.$$

Здесь

$$T_m \equiv T_m(\Omega, k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\mu^2)\mu^m}{1 + i(k\mu - \Omega)}d\mu, \quad m = 0, 1, 2.$$

Рассмотрим плотность электрического тока $j_x = \sigma^l E_0$, откуда для продольной проводимости получаем:

$$\sigma^l = \sigma_0 f^l(\Omega, k, b), \qquad \sigma_0 = \frac{ne^2}{m\nu}, \tag{4}$$

где σ_0 — стандартная проводимость плазмы, а $f^l(\Omega, k, b)$ — безразмерная продольная проводимость

$$f^l(\Omega, k, b) = \frac{1}{\Phi(\Omega, k) - b}, \qquad \Phi(\Omega, k) = \frac{0.5}{T_2 + T_1^2/(1-T_0)}.$$

Нетрудно проверить, что $f^l(0, 0, 0) = 1$. Следует подчеркнуть, что изменение параметра b существенно влияет на значения продольной проводимости (рис. 1). Анализ графика показывает, что с ростом параметра частотности b модуль продольной проводимости монотонно возрастает. В то же время с увеличением Ω наблюдается его убывание.

В высокочастотном пределе $(\Omega \to \infty)$ продольная проводимость имеет вид

$$\sigma^l(\Omega, k, b) = \frac{i\sigma_0}{\Omega - 2b}.$$

Отсюда при $b = 0$ получаем классическое выражение для продольной проводимости для слабоионизованной газовой плазмы [1,14].

Из формулы (4) при $b = 0$ в длинноволновом пределе $(k \to 0)$ получаем известную формулу проводимости Друде $\sigma_D(\Omega) : \sigma_D(\Omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\Omega}$.

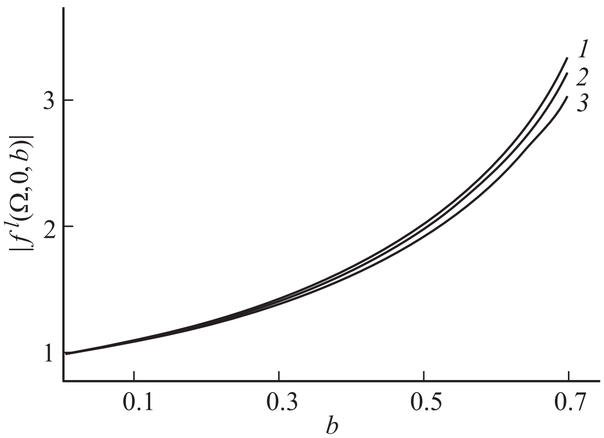

Рис. 1. Зависимость $|f^l(\Omega, 0, b)|$ от параметра частотности b. Кривые *1, 2, 3* отвечают значениям $\Omega = 0,\ 10^{-2},\ 10^{-1}$.

Для описания продольной диэлектрической проводимости при промежуточных значениях величины $\Omega(0 \leqslant \Omega < \infty)$ будем исследовать отношение $\psi(\Omega, k, b) = \sigma^l(\Omega, k, b)/\sigma_D(\Omega)$.

На рис. 2 представлена зависимость действительной части $\psi(\Omega, k, b)$ от величины Ω. Из приведенных графиков следует, что с возрастанием волнового числа k максимумы действительной части $\psi(\Omega, k, b)$ увеличиваются, сдвигаясь вправо.

На рис. 3 представлены графики зависимости модуля $\psi(\Omega, k, b)$ от частоты внешнего поля. Из рисунков видно, что при данных значениях параметра частотности зависимость модуля величины $\psi(\Omega, k, b)$ носит немонотонный характер. Проведенный анализ показывает, что наиболее существенный вклад в поведение модуля рассматриваемого отношения параметр b вносит в низкочастотном случае и при промежуточных значениях Ω. При этом в указанном частотном диапазоне $|\psi(\Omega, k, b)|$ увеличивается с ростом параметра b.

Учитывая связь тензора диэлектрической проницаемости плазмы с тензором проводимости, имеем

$$\varepsilon^l(\Omega, k, b) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega}\,\sigma_0 f^l(\Omega, k, b).$$

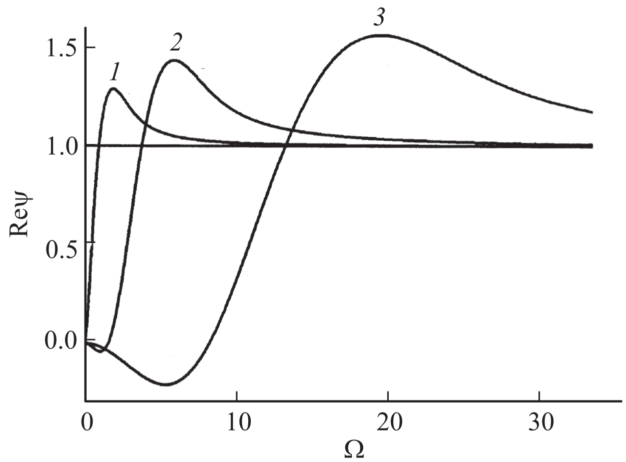

Рис. 2. Зависимость Reψ от величины Ω. Кривые *1, 2, 3* отвечают значениям $k = 1, 3, 10$; $b = 0.35$.

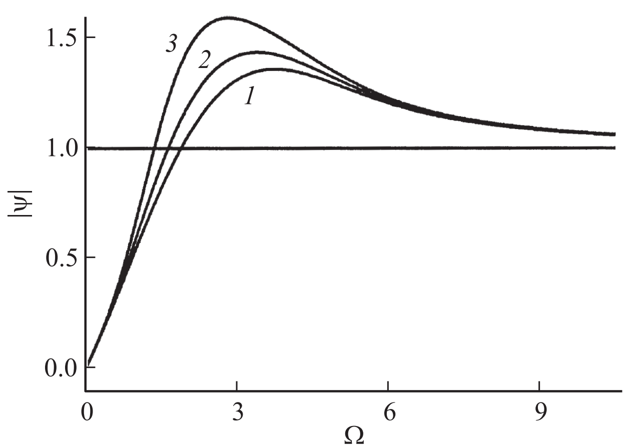

Рис. 3. Зависимость $|\psi|$ от величины Ω. Кривые *1, 2, 3* отвечают значениям $b = 0.1, 0.35, 0.7$; $k = 2$.

Заметим, что продольная диэлектрическая проницаемость связана с дисперсионной функцией $\Lambda(z) = 1 - w_0^{-1} + \lambda_C(z)w_0^{-1} - 2z^2\lambda_C(z)(\gamma w_0)^{-2}$ в задаче о колебаниях плазмы [15] равенством

$$\varepsilon^l = \frac{w_0\Lambda(z)}{w_0 - 1 + \lambda_C(z) + 2bw_0(w_0-1)z^2\lambda_C(z)}, \quad \gamma = \frac{\nu}{\omega_p}, \tag{5}$$

где ω_p — частота плазменных колебаний, $\lambda_C(z)$ — дисперсионная функция ван Кампена

$$\lambda_C(z) = 1 + \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-u^2)du}{u-z}.$$

Величина ε^l, согласно (4) и (5), является комплексной, что означает наличие диссипации энергии электрического поля в плазме [1,2].

В данной работе получены формулы для вычисления продольной диэлектрической проницаемости в сильноионизованной невырожденной плазме. Установлено существенное влияние межэлектронных столкновений на эту характеристику плазмы. Следовательно, электрон-электронные столкновения необходимо учитывать в экспериментальных разработках.

Выявлена зависимость решения от параметра частотности b. Проведен анализ зависимости импеданса от величины частотного параметра плазмы. Полученные результаты совпадают с классическими в случае $b = 0$.

Учет скорости обмена энергией в столкновениях электронов с электронами и с тяжелой компонентой существенен для рассмотрения термических свойств плазмы. Для расчета проводимости и диэлектрической проницаемости плазмы наиболее существенным является учет релаксации импульса электронов. Существенно то, что при электрон-электронных столкновениях суммарный импульс электронной подсистемы сохраняется, в то время как при электрон-ионных столкновениях электроны устрачивают свой импульс. Это обстоятельство решающим образом сказывается на проводимости и диэлектрической проницаемости плазмы.

Аналогичный двухпараметрический интеграл стлкновений ранее был уже успешно использован для описания влияния электрон-электронных столкновений на электропроводность металлических пленок и поверхностный импеданс металла. Отметим, что случай, когда время релаксации зависит линейно от скорости электронов, рассмотрен в [16], где исследована проводимость и диэлектрическая проницаемость невырожденной плазмы.

Список литературы

[1] *Силин В.П., Рухадзе А.А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М.: Госатомиздат, 1961. 244 с.
[2] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 424 с.
[3] *Морозов И.В., Норман Г.Э.* // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. В. 2. С. 412.
[4] *Opher M., Morales G.J., Leboeuf J.N.* // Physical Review. 2002. V. 66 (2). N 1. P. 016407.1.
[5] *Levy B., Sinvani M., Greenfield A.J.* // Phys. Rew. Lett. 1979. V. 43. P. 1822.
[6] *Borchi E., De Gennaro S.* // J. Phys. F. 1980. V. 10. L. 271.
[7] *Zhao J., Bass J., Pratt Jr.P.W., Schroeder P.A.* // J. Phys. F: Met. Phys. 1986. V. 16. L. 271.
[8] *De Gennaro S., Rettory A.* // J. Phys. F. 1984. V. 14. L. 237.
[9] *Qiant Y.J., Pratt W.P., Schroedert P.A., Movshovitz D., Wiser N.* // J. Phys. C. 1991. V. 3. P. 9459.
[10] *De Gennaro S., Rettory A.* // J. Phys. F. 1985. V. 15. L. 227.
[11] *Kaveh M., Wiser N.* // J. Phys. F. 1985. V. 15. L. 1085.
[12] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ЖВММФ. 2004. Т. 44. № 10. С. 1861.
[13] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ЖВММФ. 2005. Т. 45. № 4. С. 677.
[14] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитические решения в теории скин-эффекта. М.: МГОУ, 2008. 285 с.
[15] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Фунд. физ.-матем. проблемы и модел. тех.-техн. систем. М.: МГТУ „Станкин“, 2008. В. 11. С. 80.
[16] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Физика плазмы. 2007. Т. 33. № 7. С. 1.