

09

Хаос в бистабильной цепочке двух однаправленно связанных автоколебательных систем с запаздыванием

© Б.Е. Железовский, Э.В. Кальянов

Саратовский государственный университет
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
(Фрязинский филиал)
E-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

Поступило в Редакцию 19 февраля 2009 г.

Исследована динамика цепочки из двух однаправленно связанных автоколебательных систем с запаздыванием, имеющих мягкие асимметричные амплитудные характеристики и разные по знаку начальные условия, благодаря чему в такой цепочке формируются два бассейна притяжения. Приведены результаты численного анализа хаотизации движений в управляемой автоколебательной системе, а также процесса перехода ее колебаний в режим принудительной синхронизации с изменением бассейна притяжения. Рассмотрен механизм хаотизации колебаний.

PACS: 05.45.-a

Известное дифференциально-разностное уравнение Мэки–Гласса, предложенное для описания кроветворения у человека [1], обладает сложной динамикой. Это уравнение, а также подобные ему модели, отличающиеся амплитудной характеристикой и являющиеся по существу лишь некоторыми его модификациями, исследовались во многих работах, находя новые приложения [2,3], в том числе и для скрытой передачи информации [4]. Неавтономный режим работы модели Мэки–Гласса мало исследован [5]. В то же время он представляет значительный интерес в связи с особенностями, проявляющимися в модификации дифференциально-разностного уравнения при использовании в нем симметричной жесткой характеристики [6].

В данной работе исследуются особенности принудительной синхронизации в цепочке, состоящей из двух однаправленно связанных

автоколебательных систем Мэки–Гласса, модифицированных путем использования в них асимметричных характеристик. При этом управляемая система имеет характеристику с преобладанием ее положительной части, а управляющая — с преобладанием ее отрицательных значений, так что автономное возбуждение колебаний систем при соответствующих начальных условиях (положительных для управляемой системы и отрицательных для управляющей) реализуется в разных бассейнах притяжения.

В качестве исходных уравнений для рассматриваемой модели двух однонаправленно связанных автоколебательных систем с запаздыванием воспользуемся уравнениями взаимно связанных систем, исследованными в [7] при симметричных характеристиках. Без учета запаздывания по связи эти дифференциально-разностные уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned} dx_1/dt + r_1x_1 &= F_1(x_{\tau_1}) + D_1x_2, \\ dx_2/dt + r_2x_2 &= F_2(x_{\tau_2}) + D_2x_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где индексы 1 и 2 относятся соответственно к первой и второй системам. При этом $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$; $x_{\tau_1} = x_1(t - \tau_1)$, $x_{\tau_2} = x_2(t - \tau_2)$; τ_1 , τ_2 — задержки сигналов в цепях обратной связи парциальных систем; r_1 , r_2 — постоянные параметры; $F_1(x_{\tau_1})$, $F_2(x_{\tau_2})$ — нелинейные функции, определяющие амплитудные характеристики; D_1 , D_2 — коэффициенты связи.

Нелинейные функции, определяющие асимметричные амплитудные характеристики, благодаря которым формируются различные бассейны притяжения (положительный или отрицательный), можно записать так:

$$F_i(x_{\tau_i}) = B_i x_{\tau_i} / [1 + (x_{\tau_i} - \beta_i)^n], \quad (2)$$

где $i = 1, 2$; B_1 , B_2 — коэффициенты, характеризующие усиление; β_1 , β_2 — параметры асимметрии; n — параметр нелинейности.

При $\beta_i = 0$ соотношение (2) описывает мягкую симметричную характеристику, расположенную в первом и третьем квадрантах плоскости $\{x_{\tau_i}, F_i(x_{\tau_i})\}$; в таком виде она предложена в работе [1]. При $\beta_i > 0$ проявляется асимметрия, причем так, что максимальная величина нелинейной функции $F_i(x_{\tau_i})$ возрастает в первом квадранте, а абсолютное ее значение в третьем квадранте уменьшается. При $\beta_i < 0$ имеет место обратное изменение характеристики.

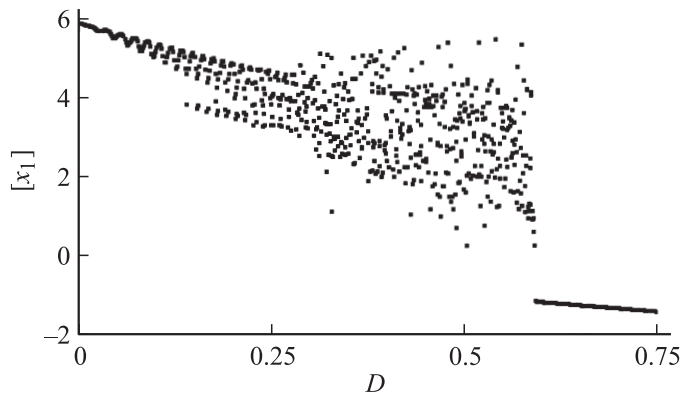


Рис. 1. Изменение максимальных значений колебательного процесса $x_1(t)$ при увеличении параметра однонаправленной связи.

Рассматривая соотношения (1), (2) применительно к однонаправленному взаимодействию подсистем с асимметричными амплитудными характеристиками, положим, что $D_1 = D$, $D_2 = 0$, и выберем параметры асимметрии, а также начальные условия для колебательных процессов, определяемые следующими значениями: $\beta_1 = x_1(0) = 1$, $\beta_2 = x_2(0) = -1$. Величины остальных неизменяемых параметров положим равными $n = 4$, $r_1 = r_2 = 1$, $B_1 = B_2 = 6$, $\tau_1 = 1.2$, $\tau_2 = 1.36$. При этих параметрах управляемая и управляющая системы не идентичны, а их автономные колебания являются регулярными и реализуются в разных бассейнах притяжения (положительном и отрицательном соответственно); частота генерации первой подсистемы равна $\omega \approx 1.7$, а второй — $\omega \approx 1.6$.

На рис. 1 приведена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая изменение максимальных значений колебательного процесса $x_1(t)$ (обозначенных через $[x_1]$) при адиабатическом увеличении коэффициента связи. Как видно, существует некоторое „пороговое“ значение параметра связи ($D = D_p \approx 0.3$), при превышении которого возникает нерегулярный разброс точек, соответствующих максимальным значениям управляемых движений, свидетельствующий о хаотизации. По мере увеличения D область нерегулярного разброса точек смещается так, что нижняя граница этой области приближается к нулевому значе-

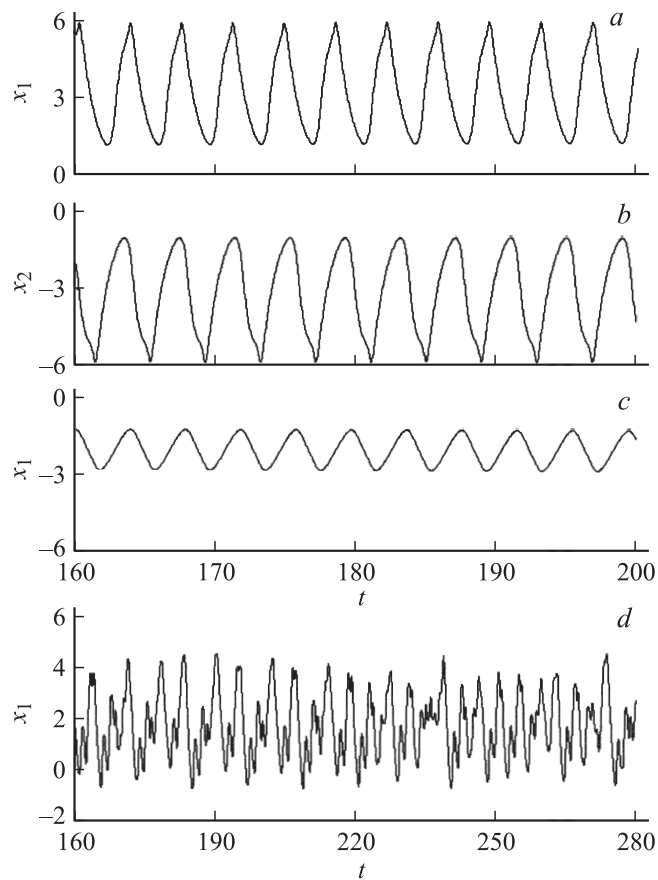


Рис. 2. Фрагменты реализаций колебаний в подсистемах, рассчитанные в интервалах времени $t \in [160; 200]$ ($a-c$) и $t \in [160; 280]$ (d) при различных режимах работы: a, b — автономные колебания управляемой (a) и управляющей (b) систем при $D = 0$; b — синхронизированные управляемые колебания при $D = 0.6$; d — хаотические управляемые колебания при $D = 0.55$.

нию $[x_1]$. При достижении величины $D \approx 0.58$ реализуется дехаотизация колебаний: происходит жесткий переход хаотического колебательного процесса $x_1(t)$ к регулярным движениям. При этом колебания $x_1(t)$, как это следует из фрагментов временных реализаций, показанных

на рис. 2, *b, c*, принудительно синхронизированы колебаниями $x_2(t)$ с изменением бассейна притяжения.

Фрагменты реализаций колебательных процессов управляемой и управляющей систем рассчитаны при характерных режимах работы, соответствующих параметрам при различных значениях коэффициента связи на диаграмме рис. 1. Реализации, приведенные на рис. 2, *a, b*, рассчитаны при автономных колебаниях систем (при $D = 0$), а реализации, представленные на рис. 2, *c, d*, — при колебаниях первой подсистемы в синхронном (при $D = 0.6$) и хаотическом (при $D = 0.55$) режимах работы. Как видно, при $D = 0.6$ колебания $x_1(t)$ синхронизованы: частота управляемых колебаний совпадает с частотой управляющего воздействия, но колебания $x_1(t)$ сдвинуты относительно воздействующего сигнала $x_2(t)$ на $\pi/2$.

В соответствии с фрагментами реализаций, полученных при автономной работе систем, аттрактор управляемых колебаний находится в первом (положительном) квадранте плоскости $\{x_1, x_1(t - \tau_1)\}$, а аттрактор управляющего источника — в третьем (отрицательном) квадранте плоскости $\{x_2, x_2(t - \tau_2)\}$. Аттракторы, соответствующие синхронным и хаотическим фрагментам реализаций, расположены в третьем (регулярный) и в первом (хаотический) квадрантах плоскости $\{x_1, x_1(t - \tau_1)\}$. При этом аттракторы, соответствующие регулярным движениям, имеют вид простых предельных циклов, а хаотический аттрактор отображает сложное перемешивание траекторий движения изображающей точки в фазовом пространстве.

На рис. 3 иллюстрируются спектры мощности S_1 колебательного процесса $x_1(t)$, рассчитанные при параметрах, при которых получены фрагменты реализаций, показанные на рис. 2, *a, c, d*. Видно, что частоты автономных и синхронизированных колебаний различаются. Спектр мощности хаотических колебаний является непрерывным и занимает широкий диапазон частот; виден резонансный „всплеск“ колебаний на частоте колебаний управляющей системы.

Хаотизация колебаний при воздействии на управляемую систему регулярного сигнала, формируемого управляющей системой в другом бассейне притяжения, является интересной особенностью взаимодействия систем с асимметричными характеристиками. При одинаковых знаках параметров β_1, β_2 и начальных условий, когда взаимодействующие колебания формируются в одном бассейне притяжения, хаотизация не возникает. В этом случае, как и в системах с простой регулярной динамикой [8], при увеличении однонаправленной связи (или уменьшении

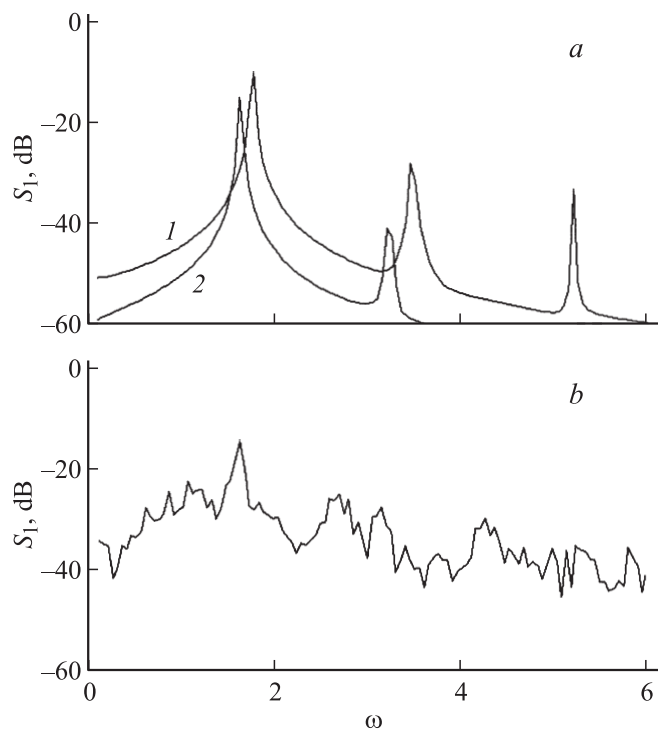


Рис. 3. Спектры мощности при автономном (*a*, кривая 1), синхронном (*a*, кривая 2) и хаотическом (*b*) режимах работы управляемой системы.

расстройки) мягко развивается режим асинхронного взаимодействия, сопровождающийся увеличением частоты, которое приводит к переходу в синхронный режим.

Приведенные результаты дают основание полагать, что существенное значение при хаотизации колебаний имеют переходные процессы, возникающие при „перетягивании“ управляемых колебаний внешним сигналом в другой бассейн притяжения, формируемый в соответствии с иной структурой амплитудной характеристики. Воздействие колебаний, возбуждающихся в другом бассейне притяжения, обуславливает возникновение асинхронных взаимодействий, а переходные процессы приводят к сбою асинхронных движений, усложняющихся наличием в управляе-

мой системе падающего участка характеристики и запаздывания в цепи обратной связи.

Рассмотренная математическая модель бистабильной цепочки однонаправленно связанных автоколебательных систем с запаздыванием позволяет надеяться на большую надежность при ее использовании для скрытой передачи информации, а также при шифровании информации методами [9,10], основанными на применении хаоса. В отличие от одной автономной системы, применительно к которой, как показано [4], возможна реконструкция амплитудной характеристики по временным реализациям, восстановление характеристик последовательно соединенных систем с разными бассейнами притяжения представляется проблематичным.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-02-00351).

Список литературы

- [1] *Mackey M.C., Glass L.O.* // Science. 1977. V. 197. N 4300. P. 287–289.
- [2] *Ikeda K.* // Opt. Comm. 1979. V. 30. N 2. P. 257–261.
- [3] *Кислов В.Я.* // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25. № 8. С. 1683–1690.
- [4] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 16. С. 37–44.
- [5] *Ланда П.С., Перминов С.М.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 3. С. 437–439.
- [6] *Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. В. 6. С. 88–94.
- [7] *Железовский Б.Е., Кальянов Э.В., Кислов В.Я.* // Радиотехника. 2005. № 3. С. 57–61.
- [8] *Железовский Б.Е., Кальянов Э.В.* Многочастотные режимы в приборах СВЧ. М.: Связь, 1978. Гл. 4. С. 151.
- [9] *Гуляев Ю.В., Беляев Р.В., Воронцов Г.М.* и др. // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48. № 10. С. 1157–1185.
- [10] *Кальянов Г.Н., Кальянов Э.В.* Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53. № 4. С. 459–467.