

11

## Сингулярность в распределении плотности тока на поверхности плоского катода на границе эмитирующей области

© Г.Ш. Болтачев, Н.М. Зубарев

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург  
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 13 мая 2008 г.

Рассмотрена эмиссия электронов с поверхности плоского катода на границе областей с бесконечной и нулевой эмиссионной способностями в режиме ограничения тока объемным электрическим зарядом. Описаны пространственные распределения плотности объемного заряда, электрического поля и поля скоростей с использованием автономных решений уравнений движения заряженных частиц. Показано, что на границе возникает сингулярность плотности тока эмиссии: она обращается в бесконечность при приближении к особенности по степенному закону. Электроны эмитируют из особой точки под углом в  $103^\circ$  к поверхности электрода.

PACS: 41.20.Cv, 52.59.Sa

В классических работах Чайлда [1] и Ленгмюра [2] был установлен универсальный закон для эмиссии в режиме ограничения электрического тока объемным электрическим зарядом  $I \sim U_0^{3/2}$ , связывающий величину тока  $I$  и приложенную к межэлектродному промежутку разность потенциалов  $U_0$ . Для простейшей ситуации, когда электроды представляют собой бесконечные параллельные плоскости, плотность

тока эмиссии  $J$  определяется формулой

$$J = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{2e\epsilon_0^2 U_0^3}{mL_0^4}}, \quad (1)$$

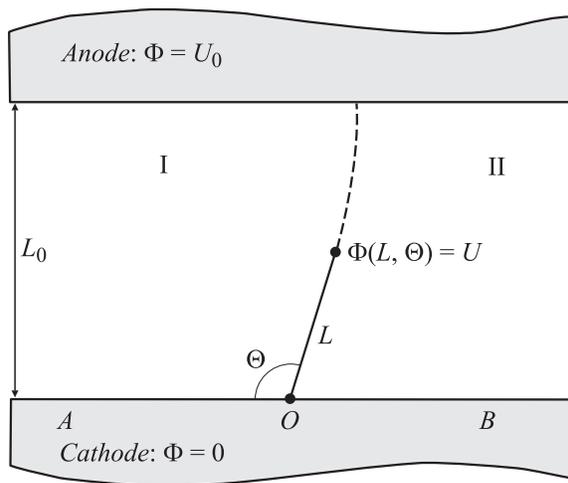
где  $e$  — элементарный заряд,  $m$  — масса электрона,  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума,  $L_0$  — межэлектродное расстояние. Возникает вопрос, каким образом будут влиять на распределение плотности тока различные краевые эффекты, связанные с тем, что реальный пучок электронов не может быть бесконечно протяженным. Данная проблема требует рассмотрения уже не одномерных, а по крайней мере двумерных уравнений движения. Существенная нелинейность уравнений, описывающих поток эмитированных электронов, не позволяет дать их решение аналитическими методами в общем случае. Определенный прогресс в изучении краевых эффектов был достигнут в рамках модели, в которой вводится бесконечное магнитное поле, вынуждающее заряженные частицы двигаться по параллельным прямым (см., например, [3] и ссылки там). Так, в частности, удалось дать описание эффекта „токовых крыльев“ — появление сингулярностей в распределении плотности тока на границе пучка [4].

В настоящей работе мы не будем вводить магнитное поле, обеспечивающее одномерность движения электронов. Поток электронов близи границы эмитирующей области мы опишем с использованием автотомельной редукции уравнений движения, возможность которой была обнаружена в работе [5] и затем использовалась в ряде исследований [6,7]. Подобный подход позволит нам описать явление „токовых крыльев“, а также определить угол, на который будут отклоняться электроны от нормали при эмиссии с границы пучка (это, как оказывается, примерно  $13^\circ$ ).

Рассмотрим поток электронов, эмитируемых из области с бесконечной эмиссионной способностью на плоском бесконечном катоде. Будем полагать начальную скорость частиц равной нулю. Тогда движение электронов в электрическом поле удобно описывать, вводя потенциал скорости  $\Psi$ . Скорость потока определяется соотношением  $\mathbf{v} = \nabla\Psi$ . Исходную систему уравнений можно записать в виде [5,7]:

$$\nabla^2\Phi = eN/\epsilon_0, \quad m(\nabla\Psi)^2/2 = \Phi e, \quad \nabla(N\nabla\Psi) = 0, \quad (2)$$

где  $N$  — концентрация электронов. Первое уравнение — уравнение Пуассона для потенциала электрического поля  $\Phi$ . Движение частиц



Схематическое изображение геометрии анализируемой задачи.

определяется вторым уравнением, имеющим смысл закона сохранения энергии электрона в электростатическом поле. Третье уравнение — уравнение непрерывности потока частиц.

Геометрия анализируемой задачи представлена на рисунке. На плоском катоде имеются области с бесконечной ( $OA$ ) и нулевой ( $OB$ ) эмиссионными способностями. Считаем, что поток электронов, эмитируемых с границы областей, имеет наклон  $\Theta$  к поверхности. Левее соответствующего луча (область I) объемный электрический заряд имеется, а правее (область II) — отсутствует. В качестве внешнего управляющего параметра введем значение потенциала электрического поля  $U$  на границе областей I и II на некотором расстоянии  $L$  от особой точки  $O$  — границы областей на катоде. Параметры  $U$  и  $L$  связаны с приложенной к межэлектродному промежутку разностью потенциалов  $U_0$  и межэлектродным расстоянием  $L_0$ .

Уравнения движения удобно рассматривать в полярных координатах  $R$  и  $\theta$ , где полюс  $R = 0$  совпадает с точкой  $O$ , а поверхность катода в областях I и II определяется условиями  $\theta = 0$  и соответственно  $\theta = \pi$ . Отметим, что в достаточно малой окрестности особой точки границу

областей I и II можно считать прямой. Ей соответствует условие  $\theta = \Theta$ . Перейдем для удобства к безразмерным обозначениям при помощи замен:

$$r = \frac{R}{L}, \quad n = N \frac{eL^2}{\varepsilon_0 U}, \quad \varphi = \frac{\Phi}{U}, \quad \psi = \Psi \sqrt{\frac{m}{2eUL^2}}.$$

В итоге система уравнений (2) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{rr} + r^{-1}\varphi_r + r^{-2}\varphi_{\theta\theta} &= n, \\ \psi_r^2 + r^{-2}\psi_\theta^2 &= \varphi, \\ n_r\psi_r + r^{-2}n_\theta\psi_\theta + n[\psi_{rr} + r^{-1}\psi_r + r^{-2}\psi_{\theta\theta}] &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В области II, где объемный заряд отсутствует ( $n = 0$ ), распределение электрического поля описывается уравнением Лапласа:  $\nabla^2\varphi = 0$ .

Уравнения (3) допускают следующую автомодельную замену [5,7]:

$$\varphi = r^\gamma A(\theta), \quad n = r^{\gamma-2} B(\theta), \quad \psi = r^{\gamma/2+1} C(\theta), \quad (4)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — неизвестные функции полярного угла, а  $\gamma$  — показатель автомодельности. В результате подстановки (4) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета угловых распределений  $A(\theta)$ ,  $B(\theta)$  и  $C(\theta)$  на интервале  $0 \leq \theta \leq \Theta$  (т.е. в области I):

$$\begin{aligned} \gamma^2 A + A_{\theta\theta} - B &= 0, \\ (\gamma/2 + 1)^2 C^2 + C_\theta^2 - A &= 0, \\ (3\gamma/2 - 1)(\gamma/2 + 1)BC + B_\theta C_\theta + BC_{\theta\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Записанную систему следует решать в сочетании с условием нормировки функции  $A$ , условиями эквипотенциальности поверхности катода и полной экранировки поля на ней, а также условиями равенства нулю угловых компонент скорости и напряженности электрического поля на границе областей I и II:

$$A(\Theta) = 1, \quad A_\theta(\Theta) = C_\theta(\Theta) = A_\theta(0) = A(0) = 0.$$

В области II ( $\Theta \leq \theta \leq \pi$ ), в которой объемный заряд отсутствует ( $B = 0$ ), уравнение для распределения электрического поля легко

решается аналитически. Находим:

$$A = \sin(\gamma(\pi - \Theta)), \quad \gamma = \pi/(2\pi - 2\Theta). \quad (7)$$

Уравнения (5) и (6) допускают точное решение при  $\Theta = \pi/2$  и  $\gamma = 4/3$ , что соответствует интегрируемой одномерной задаче о потоке электронов между бесконечными плоскими электродами [1,2]. В наших переменных оно имеет вид:

$$A = \sin^{4/3} \theta, \quad B = \frac{4}{9} \sin^{-2/3} \theta, \quad C = \frac{3}{5} \sin^{5/3} \theta.$$

Из этих выражений становится ясно, в какой форме удобно искать приближенное решение уравнений (6):

$$A = \sin^{4/3}(\lambda\theta), \quad B = s \sin^{-2/3}(\lambda\theta), \quad C = p \sin^{5/3}(\lambda\theta),$$

где  $s$ ,  $p$  и  $\lambda$  — некоторые константы. Для этих выражений граничные условия (6) выполняются при

$$\lambda = \pi/(2\Theta). \quad (8)$$

Наша дальнейшая задача состоит в том, чтобы, подбирая коэффициенты  $s$ ,  $p$  и  $\lambda$ , минимизировать невязки уравнений (5) при заданном  $\gamma$ . Мы положим

$$s = 4\lambda^2/9, \quad p = 3/(5\lambda), \quad \gamma = 4\lambda/3, \quad (9)$$

что обеспечивает, в частности, обращение в тождество первого уравнения системы (5), т.е. уравнения Пуассона.

Собирая воедино соотношения между коэффициентами (7)–(9), получаем систему уравнений, однозначно определяющих угол  $\Theta$  и коэффициенты  $\gamma$  и  $\lambda$ . Находим в итоге:

$$\Theta = 4\pi/7 \approx 102.86^\circ, \quad \gamma = 7/6 \approx 1.1666, \quad \lambda = 7/8.$$

Важно, что значение  $\lambda$  оказывается близким к единице, где наши решения уравнений (5) и (6) становятся точными. Это означает, что мы находимся в области параметров, когда ошибка аппроксимации незначительна. Действительно, численное решение уравнений дает  $\Theta \approx 103.55^\circ$  и  $\gamma \approx 1.1773$ , что лишь незначительно отличается от наших приближенных аналитических решений. Следует отметить, что

в недавней работе Рохленко [4], в которой вводилось бесконечное магнитное поле и электроны были вынуждены двигаться по нормали к поверхности катода (т.е.  $\Theta \equiv 90^\circ$ ), для показателя автомодельности было найдено  $\gamma \approx 1.1728$ , что практически совпадает с нашими результатами. Возвращаясь к размерным величинам, находим в области  $0 \leq \theta \leq 4\pi/7$ :

$$\begin{aligned}\Phi &= U(R/L)^{7/6} \sin^{4/3}(7\theta/8), \\ N &= \frac{49}{144} \frac{\varepsilon_0 U}{eL^2} (R/L)^{-5/6} \sin^{-2/3}(7\theta/8), \\ \Psi &= \frac{24}{35} \sqrt{\frac{2eUL^2}{m}} (R/L)^{19/12} \sin^{5/3}(7\theta/8).\end{aligned}$$

В области  $4\pi/7 \leq \theta \leq \pi$  имеем

$$\Phi = U(R/L)^{7/6} \sin(7(\pi - \theta)/6), \quad N \equiv 0.$$

Полученные решения дают для плотности тока на поверхности катода в области I:

$$J = eR^{-1}(\Psi_{\theta}N)|_{\theta=0} = \frac{49}{144} \sqrt{\frac{2e\varepsilon_0^2 U^3}{mL^4}} (R/L)^{-1/4}.$$

При значительном удалении от особенности справедлива известная формула (1). Из общих соображений, отношение параметров  $U$  и  $U_0$ , а также параметров  $L$  и  $L_0$  отличаются лишь множителем порядка единицы. Отсюда ясно, что значения плотности тока, задаваемые этими выражениями, становятся близкими на расстояниях  $R$  порядка  $L_0$ , т.е. пространственный масштаб области, в которой сингулярности существенно влияют на поведение системы, определяется межэлектродным расстоянием.

Таким образом, мы описали распределение плотности тока эмиссии вблизи особенности, не вводя используемое в работах [3,4] приближение бесконечного магнитного поля, приводящее к одномерному движению частиц. Плотность тока обращается в бесконечность по степенному закону  $J \sim R^{-1/4}$  в рамках наших приближенных аналитических решений. Численные расчеты позволяют уточнить значение показателя степени. В соответствии с ними  $J \sim R^{-0.234}$ .

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал (проект 07-02-96035), Совета по грантам при президенте РФ (проект МД-2553.2007.2) и Фонда „Династия“, в рамках Целевой программы поддержки междисциплинарных проектов УрО РАН и СО РАН и Программы президиума РАН „Фундаментальные проблемы нелинейной динамики“.

## Список литературы

- [1] *Child C.D.* // Phys. Rev. 1911. V. 32. P. 492.
- [2] *Langmuir I.* // Phys. Rev. 1913. V. 2. P. 450.
- [3] *Luginsland J.W., Lau Y.Y., Umstadtd R.J., Watrous J.J.* // Phys. Plasmas. 2002. V. 9. P. 2371.
- [4] *Rokhlenko A.* // J. Appl. Phys. 2006. V. 100. N 013305.
- [5] *Кирштейн П., Кайно Г., Уотерс У.* Формирование электронных пучков. М.: Мир, 1970. (Translated from Kirstein P.T., Kino G.S., Waters W.E. Space-Charge Flow. McGraw-Hill Book Company, New York, 1967).
- [6] *Finn J.M., Antonsen T.M., Manheimer W.M.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 1988. V. 16. P. 281.
- [7] *Boltachev G.Sh., Zubarev N.M.* // Europhysics Letters. 2006. V. 76. P. 36.