

09

## **О возможности реализации в автоколебательной системе с внешним периодическим воздействием универсального поведения, характерного для перехода к хаосу через удвоения периода в консервативных системах**

© А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, А.В. Савин, Д.В. Савин

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

E-mail: SavinA@info.sgu.ru

В окончательной редакции 23 марта 2008 г.

Предложена допускающая физическую реализацию модель автоколебательной системы, в которой возможна реализация характерного для консервативных систем „гамильтоновского“ критического поведения на пороге перехода к хаосу. Для этой модели получено приближенное дискретное отображение, в котором численно определены координаты соответствующей критической точки.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

В нелинейных диссипативных системах различной физической природы распространен сценарий перехода к хаосу каскад бифуркаций удвоения периода, которому присущи универсальные свойства масштабного подобия — скейлинга, установленные и объясненные Фейгенбаумом [1,2]. Аналогичные по характеру закономерности обнаруживают двумерные отображения, сохраняющие площадь, однако в этом случае константы скейлинга другие. В частности, константа, ответственная за сходимости точек бифуркаций удвоения к пределу — критической точке, оказывается равной  $\delta_H = 8.7210972 \dots$  [3] вместо  $\delta_F = 4.6692 \dots$  в диссипативных системах. Простейшим примером может служить консервативное отображение Эно

$$x_{n+1} = 1 - Ax_n^2 + y_n, y_{n+1} = -x_n. \quad (1)$$

В нем последовательность бифуркаций удвоения периода устойчивых периодических орбит имеет место при увеличении параметра  $A$ , и

критическая точка располагается при  $A = 4.13616680390428$ . Следуя работе [4], будем называть данный тип критического поведения гамильтоновым и обозначать символом  $H$ . Соответствующий класс универсальности включает множество гамильтоновых неавтономных систем с одной степенью свободы, для которых отображением Пуанкаре является сохраняющее площадь двумерное отображение.

Известно, что для систем с постоянной диссипацией (отображения с постоянным определителем Якоби), гамильтонов и фейгенбаумовский типы критичности сосуществуют в том смысле, что гамильтоновой критичности отвечает концевая точка фейгенбаумовской линии на плоскости параметров [4]. Вблизи этой точки устройство пространства параметров характеризуется свойством масштабного подобия (скейлинга): при надлежащем выборе локальной системы координат конфигурация областей воспроизводит себя при пересчете масштабов на факторы  $\delta_1 = \delta_H$  и  $\delta_2 = 2$  по двум осям координат. Таким образом, гамильтонова критичность выступает как двухпараметрический феномен или, используя терминологию теории бифуркаций, феномен коразмерности два. Пример такого поведения дает диссипативное отображение Эно

$$x_{n+1} = 1 - Ax_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = -bx_n, \quad (2)$$

которое превращается в (1) при  $b = 1$ . Его определитель Якоби равен  $b$ , так что этот параметр непосредственно управляет величиной диссипации.

Чтобы пронаблюдать гамильтоново критическое поведение в физическом эксперименте, например, с электронными цепями, самым естественным кажется попытаться по возможности исключить потери энергии и реализовать систему типа нелинейного консервативного осциллятора под внешним периодическим воздействием. Понятно, что при этом, в принципе, возможно только более или менее удовлетворительное приближение к идеальной консервативной системе. Оказывается, однако, что при удвоениях периода в присутствии даже весьма малой диссипации для бифуркаций достаточно высокого порядка (тем выше, чем меньше диссипация) имеет место переход к классическому фейгенбаумовскому закону накопления, характеризуемому константой  $\delta_F$  [5,6]. В настоящей статье мы указываем альтернативную возможность наблюдения критического поведения  $H$ -типа не в консервативной, а в автоколебательной системе (с дополнительным внешним воздействием). При этом требуется „подстройка“ двух параметров, один из

которых отвечает за удвоения периода, а второй — за средний уровень диссипации в системе. Таким образом, мы вводим в рассмотрение пример гамильтоновой критической точки для системы общего вида, не ограниченной условием постоянства диссипации (постоянства определителя Якоби).

Рассмотрим систему типа осциллятора Ван-дер-Поля под действием периодической последовательности импульсов, предполагая, что их амплитуда зависит от мгновенного значения динамической переменной посредством функции  $F(x) = 1 - Ax^2$ :

$$\ddot{x} - (\varepsilon - \mu x^2)\dot{x} + x = \sum_m F(x)\delta(t - mT). \quad (3)$$

Такая система характеризуется „внутренними“ параметрами  $\varepsilon$  и  $\mu$  и „внешним“ параметром  $\lambda$ . Параметр  $\varepsilon$  отвечает за величину линейной диссипации при  $\varepsilon < 0$  и отрицательного трения при  $\varepsilon > 0$ , параметр  $\mu$  характеризует нелинейную диссипацию в автономной системе. При положительных значениях  $\varepsilon$  и  $\mu$  автономная система демонстрирует устойчивый предельный цикл, размер которого порядка  $r \approx \sqrt{\varepsilon/\mu}$ . „Внешний“ параметр нелинейности  $\lambda$  управляет степенью зависимости амплитуды импульсов от мгновенного состояния осциллятора.

Если значения параметров таковы, что в автономной системе существует устойчивый предельный цикл, то динамику неавтономной системы можно качественно представить следующим образом. Воздействие  $\delta$ -импульса приводит (в математической модели) к мгновенному увеличению обобщенной скорости осциллятора  $\dot{x}$  на величину, определяемую амплитудой этого импульса, как бы „выбивая“ систему с предельного цикла, после чего система начинает вновь релаксировать к предельному циклу [7]. Следующий импульс опять приводит к мгновенному изменению скорости осциллятора и уходу от предельного цикла и т. д. В результате в неавтономной системе возможно возникновение новых динамических режимов. Экспериментально требуемый тип воздействия может быть реализован с использованием последовательности импульсов с большой скажностью (см., например, [8]). При этом схема подачи импульсов должна содержать элемент управления, обеспечивающий изменение амплитуды импульса в зависимости от мгновенного значения обобщенной координаты колебательной системы.

Примем момент очередного импульса за начало отсчета времени и предположим, что перед этим толчком координата  $x$  и скорость  $\dot{x}$  имели

значения  $x_n$  и  $y_n$  соответственно. После импульса получим, очевидно,

$$x_{+0} = x_n, y_{+0} = y_n + F(x_n). \quad (4)$$

Для описания динамики в промежутках времени между толчками используем известный метод медленно меняющихся амплитуд (см., например, [7]). Полагаем  $x = ae^{it} + a^*e^{-it}$  и  $\dot{x} = y = ia e^{it} - ia^*e^{-it}$ . Как следует из (4),

$$a_{+0} = a - \frac{1}{2} iF(x). \quad (5)$$

Подстановка выражений для  $x$  и  $\dot{x}$  в уравнение Ван-дер-Поля с последующим умножением на  $e^{-it}$  и усреднением по времени приводит к уравнению для медленной амплитуды

$$\dot{a} = \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \mu |a|^2 a, \quad (6)$$

решение которого с начальным условием (5) имеет вид

$$a(t) = \frac{1}{2} (x - iy) \exp it = \frac{a_{+0} \exp(\varepsilon t/2)}{\sqrt{1 + (\mu/\varepsilon)(\exp \varepsilon t - 1)|a_{+0}|^2}}. \quad (7)$$

Подставляя сюда  $t = T$ , находим координату и скорость непосредственно перед следующим импульсом:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= B \frac{x_n \cos T + (y_n + F(x_n)) \sin T}{\sqrt{1 + C[x_n^2 + (y_n + F(x_n))^2]}}, \\ y_{n+1} &= B \frac{-x_n \sin T + (y_n + F(x_n)) \cos T}{\sqrt{1 + C[x_n^2 + (y_n + F(x_n))^2]}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $B = \exp \frac{1}{2} \varepsilon T$ ,  $C = \mu T (\exp \varepsilon T - 1) / 4 \varepsilon T$ . Положим для простоты  $T = \frac{\pi}{2} (4k + 1)$  и используем конкретный вид функции  $F(x) = 1 - Ax^2$ . Тогда отображение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= B \frac{1 - Ax_n^2 + y_n}{\sqrt{1 + C[x_n^2 + (1 - Ax_n^2 + y_n)^2]}}, \\ y_{n+1} &= -B \frac{x_n}{\sqrt{1 + C[x_n^2 + (1 - Ax_n^2 + y_n)^2]}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Если нелинейная диссипация отсутствует, т.е.  $\mu \rightarrow 0$  и  $C = 0$ , в автономном режиме мы имеем линейный осциллятор, а соотношения (9) приводятся к отображению Эно:

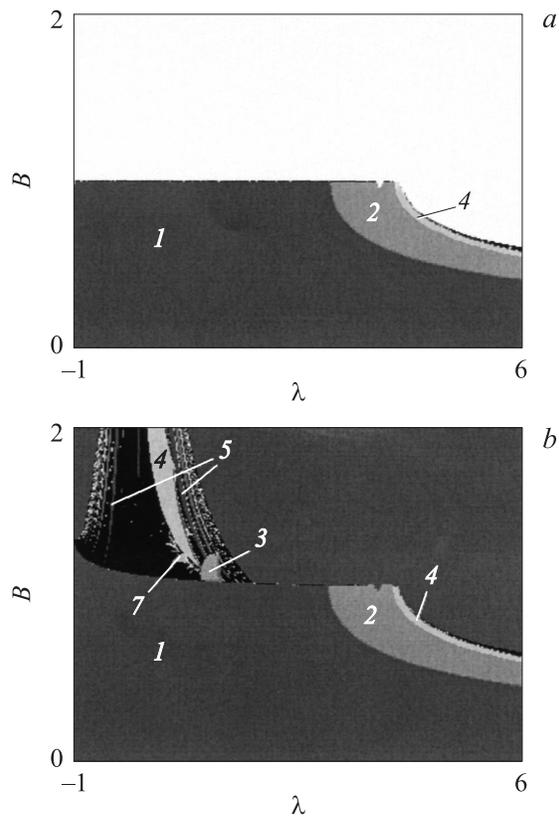
$$x_{n+1} = B(1 - Ax_n^2 + y_n), y_{n+1} = -Bx_n. \quad (10)$$

Если при этом отсутствует и линейная диссипация, т.е.  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $B = 1$ , то (10) переходит в консервативное отображение Эно.

Таким образом, внешнее воздействие, интенсивность которого зависит от координаты  $x$ , обеспечивает поведение, ассоциирующееся с удвоениями периода, даже если автономная система линейна; при этом параметр нелинейности воздействия  $\lambda$  управляет удвоениями. Линия на плоскости параметра  $(B, \lambda)$ , отвечающая отсутствию диссипации, дается соотношением  $B = 1$ , и ее пересечение с линией накопления бифуркаций удвоения периода отвечает критической точке  $H$ -типа. Линия  $B = 1$  разграничивает области „разбегания“ траекторий (отрицательное трение,  $B > 1$ ) и периодических режимов (диссипативный осциллятор,  $B < 1$ ).

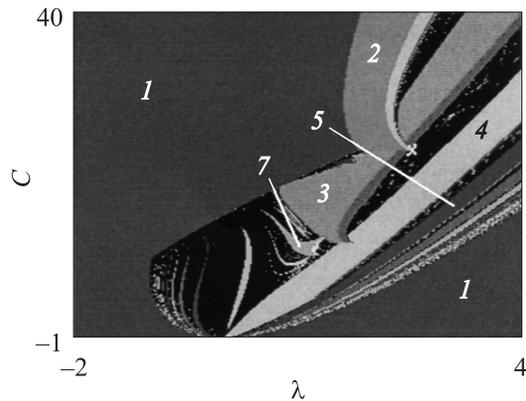
На рис. 1 показана карта динамических режимов [2] отображения (9) на плоскости  $(B, \lambda)$  для  $C = 0$  (а) и  $C = 0.25$  (б). На ней различными оттенками серого цвета отмечены области, в которых в системе реализуются различные режимы. Рис. 1, б отвечает введению небольшой нелинейной диссипации и переходу к режиму, когда автономная система автоколебательная и характеризуется присутствием устойчивого предельного цикла. Можно видеть, что в этом случае область разбегания траекторий исчезает (это происходит при сколь угодно малых значениях параметра  $C$ ), а линия отсутствия диссипации (на которой определитель Якоби отображения равен 1) представляет собой линию бифуркации Неймарка–Сакера, в окрестности которой появляются области квазипериодических режимов и система языков синхронизации. Линия фейгенбаумовского перехода к хаосу пересекает эту линию в точке коразмерности два, которая расположена в области, соответствующей отрицательному трению в автономной системе.

Рис. 2 иллюстрирует аналогичные особенности динамики при вариации параметра  $C$ , отвечающего за нелинейную диссипацию (и, фактически, за размер предельного цикла), и параметра удвоений  $\lambda$ . На рис. 2 можно также видеть точку коразмерности два, являющуюся пересечением линии компенсированной диссипации и фейгенбаумовской линии. Покажем, что она представляет собой критическую точку типа  $H$ .



**Рис. 1.** Карты динамических режимов отображения (9) при фиксированных значениях параметра  $C$ :  $C = 0$  (*a*) и  $C = 0.25$  (*b*). Области существования устойчивых циклов различных периодов обозначены различными оттенками серого, периоды основных циклов подписаны. Черным цветом обозначена область неперiodических (квазипериодических и хаотических режимов), белым — область неустойчивых по Лагранжу режимов.

Для поиска координат этой точки целесообразно воспользоваться методом равных мультипликаторов [9], который основан на асимптотическом свойстве мультипликаторов неустойчивых циклов в критической точке. А именно, с увеличением периода цикла они стремятся к фикси-



**Рис. 2.** Карта динамических режимов отображения (9) при фиксированном значении параметра  $B = 4$ . Положение критической точки  $H$ -типа отмечено крестиком. Соответствие оттенков серого различным режимам такое же, как на рис. 1.

рованным значениям, представляющим собой универсальные константы, специфические для каждого типа критического поведения. Последовательность точек в пространстве параметров, где мультипликаторы для некоторого цикла и цикла удвоенного периода совпадают, с увеличением периода циклов должна быстро сходиться к критической точке, а мультипликаторы этих циклов — к соответствующим универсальным значениям. Этот метод также позволяет оценить константы скейлинга в пространстве параметров, как собственные числа матрицы  $\Gamma$

$$\Gamma = \Gamma_n^{-1} \Gamma_{2n}, \quad \Gamma_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_n}{\partial \lambda} & \frac{\partial S_n}{\partial C} \\ \frac{\partial J_n}{\partial \lambda} & \frac{\partial J_n}{\partial C} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $S_n$  и  $J_n$  — след и определитель матрицы монодромии цикла периода  $n$  в данной точке.

Координаты найденных точек и значения мультипликаторов циклов приведены в табл. 1, а оцененные в соответствии с (11) значения констант скейлинга в пространстве параметров — в табл. 2. Видно, что точки демонстрируют хорошую сходимость к  $\lambda_c = 2.641973\dots$ ,  $C_c = 22.212355\dots$ . Поскольку мультипликаторы и константы скей-

**Таблица 1.** Последовательность точек равных мультипликаторов отображения (9) при  $B = 4$ 

$n$	$2n$	$\lambda$	$C$	$\mu_1$	$\mu_2$
16	32	2.641979414	22.21231986	-2.057641674	-0.486079481
32	64	2.641972827	22.21235779	-2.057456301	-0.486025619
64	128	2.6419732641	22.21235527	-2.057481305	-0.486032664
128	256	2.641973235	22.212355441	-2.057477956	-0.486031738

**Таблица 2.** Константы скейлинга в пространстве параметров, оцененные по последовательности точек равных мультипликаторов

$n$	$2n$	$\delta_1$	$\delta_2$
16	32	8.721435908	2.000128521
32	64	8.721042264	1.998814272
64	128	8.721096857	1.999608640
128	256	8.721095561	2.002160475

линга в пространстве параметров явно стремятся к характерным для  $H$ -типа универсальным значениям  $\delta_1 = 8.7210972\dots$ ,  $\delta_2 = 2$ ,  $\mu_1 = -2.0574783\dots$ ,  $\mu_2 = -0.4860318\dots$ , можно сделать вывод, что эта точка действительно является критической точкой  $H$ -типа.

Таким образом, в работе рассмотрена автоколебательная система с нелинейным импульсным возбуждением, в которой внешнее воздействие инициирует последовательность бифуркаций удвоения периода, а отрицательное трение компенсирует их диссипативный характер. Для модельного отображения, построенного с использованием квазигармонического приближения, показана возможность критического поведения, характерного для консервативных систем. Отсюда следует, что такой тип поведения может встречаться не только в системах с постоянной диссипацией, но и в системах более общего вида. Ему отвечает точка коразмерности два на плоскости параметров, в окрестности которой можно наблюдать не только удвоения периода, но и квазипериодические режимы со встроенной системой языков синхронизации.

Работа выполнена при поддержке CRDF (грант Y4-P-06-06), программы РАН поддержки молодых кандидатов наук, фонда „Династия“ и РФФИ (грант 06-02-16619).

## Список литературы

- [1] *Feigenbaum M.J.* // J. of Stat. Phys. 1978. V. 19. N 1. P. 25–52.
- [2] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006.
- [3] *MacKay R.S.* // Long Time Predictions in Dynamics. New York: J. Wiley and Sons, 1983.
- [4] *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* // Physica D. 1997. V. 109. P. 91.
- [5] *Reick C.* // Phys. Rev. 1992. A45. P. 777.
- [6] *Reinout C., Quispel W.* // Phys. Rev. A. 1985. V. 32. N 6.
- [7] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
- [8] *Безручко Б.П., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П.* // Изв. вузов: Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1. № 1. С. 117.
- [9] *Kim S.Y.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 59. N 6. P. 6585–6592.