01

О „холодной“ и „тепловой“ силах Казимира–Полдера при взаимодействии атома с поверхностью нагретой пластины

© Г.В. Дедков, А.А. Кясов

Кабардино-Балкарский государственный университет, Нальчик
E-mail: gv dedkov@mail.ru

Поступило в Редакцию 29 апреля 2008 г.

В рамках теории флуктуационно-электромагнитного взаимодействия для конфигурации малая частица — пластина анализируется выражение для „холодной“ и тепловой части силы Казимира–Полдера при взаимодействии атома с поверхностью пластины, имеющей произвольную температуру T. Обращается внимание на неравновесность данной ситуации, поскольку для атома в основном состоянии $T = 0$. Получено общее выражение для неравновесной (температурной) части силы Казимира–Полдера.

PACS: 34.50.Dy, 42.50.Vk, 42.50.Nn

Сила консервативного флуктуационного электромагнитного взаимодействия нейтрального атома с протяженным телом впервые рассчитывалась Казимиром и Полдером [1]. Одним из наиболее часто используемых теоретических подходов к ее вычислению является метод Лифшица [2], основанный на предельном переходе от силы Казимира между двумя пластинами, разделенными плоской вакуумной щелью (конфигурация 1), к силе взаимодействия одной пластины с разреженным веществом второй. При этом $\varepsilon_2 - 1 \to 4\pi n\alpha$, где ε_2 — диэлектрическая проницаемость вещества второй пластины, n — концентрация атомов, α — атомная поляризуемость. В случае, когда температурные эффекты не существенны, этот метод позволяет получить общее выражение для силы Казимира–Полдера в конфигурации атом–поверхность с учетом эффектов запаздывания и материальных свойств протяженного тела.

Учет температуры принципиально изменяет физическую ситуацию, поскольку в результате вышеуказанной процедуры осуществляется переход от термодинамически равновесной системы, состоящей из двух пластин с одинаковой температурой T, к неравновесной системе, включающей атом при нулевой температуре (основное состояние атома, как известно, соответствует $T = 0$ [2,3]), и пластину при температуре T. Такой переход от равновесной системы к неравновесной, очевидно, не может считаться корректной процедурой, поэтому рассмотрение конфигурации атом–поверхность должно проводиться другим методом [4].

Другой момент, в котором проявляется неадекватность предельного перехода [2], касается расчета силы Казимира между малой металлической частицей и поверхностью. В этом случае, как было нами показано в [5,6], сила Казимира, вычисленная в конфигурации малая частица–пластина (конфигурация 2), включает существенные дополнительные члены, обусловленные магнитной поляризацией частицы, которые нельзя получить из формулы Лифшица для взаимодействия двух полубесконечных диэлектрических пластин. Между тем учет магнитной поляризации даже не магнитной частицы необходим также при вычислении ее радиационного теплообмена и силы вакуумного трения при движении вблизи поверхности другого тела [7,8].

Конфигурация 2 в методическом отношении является наиболее предпочтительной по сравнению с конфигурацией 1 и при вычислении силы Казимира–Полдера между атомом и поверхностью, поскольку в этом случае частица изначально характеризуется определенной температурой, равной температуре пластины или отличной от нее. Соответственно наличие или отсутствие у атома не равной нулю температуры не выходит за рамки исходной постановки задачи.

В статическом случае при тепловом равновесии с температурой T выражение для силы Казимира между нейтральной не магнитной частицей и пластиной было получено в [5,6]. Если же температура частицы T_1 отличается от температуры T_2 пластины, то соответствующая формула имеет вид [9]

$$F_z = -\frac{2\hbar}{\pi^2} \iiint\limits_{k>\omega/c} d\omega dk_x dk_y \exp(-2q_0 z)$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} &\coth\frac{2\hbar\omega}{2k_B T_1} \left[\mathrm{Re} R_e(\omega, \mathbf{k})\alpha_e''(\omega) + \mathrm{Re} R_m(\omega, \mathbf{k})\alpha_m''(\omega)\right] \\ &+ \coth\frac{\hbar\omega}{2k_B T_2} \left[\mathrm{Im} R_e(\omega, \mathbf{k})\alpha_e'(\omega) + \mathrm{Im} R_m(\omega, \mathbf{k})\alpha_m'(\omega)\right] \end{aligned} \right\}$$

$$- \frac{2\hbar}{\pi^2} \iiint\limits_{k<\omega/c} d\omega dk_x dk_y \cos(2\tilde{q}_0 z)\{R_e, R_m \to \tilde{R}_e, \tilde{R}_m\} \tag{1}$$

$$- \frac{2\hbar}{\pi^2} \iiint\limits_{k<\omega/c} d\omega dk_x dk_y \sin(-2\tilde{q}_0 z)$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} &\coth\frac{\hbar\omega}{2k_B T_1} \left[\mathrm{Im} \tilde{R}_e(\omega, \mathbf{k})\alpha_e''(\omega) + \mathrm{Im} \tilde{R}_m(\omega, \mathbf{k})\alpha_m''(\omega)\right] \\ &- \coth\frac{\hbar\omega}{2k_B T_2} \left[\mathrm{Re} \tilde{R}_e(\omega, \mathbf{k})\alpha_e'(\omega) + \mathrm{Re} \tilde{R}_m(\omega, \mathbf{k})\alpha_m'(\omega)\right] \end{aligned} \right\}.$$

Входящие в (1) величины заданы соотношениями [4–6]

$$q_0 = (k^2 - \omega^2/c^2)^{1/2}, \quad \tilde{q}_0 = (\omega^2/c^2 - k^2)^{1/2},$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y),$$

$$q = \left(k^2 - \varepsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2/c^2\right)^{1/2}, \quad \tilde{q} = \left(\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2/c^2 - k^2\right)^{1/2}, \tag{2}$$

$$\Delta_e(\omega) = \left(\frac{\varepsilon(\omega)q_0 - q}{\varepsilon(\omega)q_0 + q}\right), \quad \tilde{\Delta}_e(\omega) = \left(\frac{\varepsilon(\omega)\tilde{q}_0 - \tilde{q}}{\varepsilon(\omega)\tilde{q}_0 + \tilde{q}}\right), \tag{3}$$

$$\Delta_m(\omega) = \left(\frac{\mu(\omega)q_0 - q}{\mu(\omega)q_0 + q}\right), \quad \tilde{\Delta}_m(\omega) = \left(\frac{\mu(\omega)\tilde{q}_0 - \tilde{q}}{\mu(\omega)\tilde{q}_0 + \tilde{q}}\right), \tag{4}$$

$$R_e(\omega, \mathbf{k}) = \chi_e(\omega, \mathbf{k})\Delta_e(\omega) + \chi_m(\omega, \mathbf{k})\Delta_m(\omega), \tag{5}$$

$$R_m(\omega, \mathbf{k}) = \chi_e(\omega, \mathbf{k})\Delta_m(\omega) + \chi_m(\omega, \mathbf{k})\Delta_e(\omega), \tag{6}$$

$$\tilde{R}_e(\omega, \mathbf{k}) = \chi_e(\omega, \mathbf{k})\tilde{\Delta}_e(\omega) + \chi_m(\omega, \mathbf{k})\tilde{\Delta}_m(\omega), \tag{7}$$

$$\tilde{R}_m(\omega, \mathbf{k}) = \chi_e(\omega, \mathbf{k})\tilde{\Delta}_m(\omega) + \chi_m(\omega, \mathbf{k})\tilde{\Delta}_e(\omega), \tag{8}$$

$$\chi_e(\omega, \mathbf{k}) = 2k^2(1 - \omega^2/k^2c^2) + \frac{\omega^2}{c^2}, \tag{9}$$

$$\chi_m(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{10}$$

Кроме того, $\alpha_{e,m}(\omega)$ — комплексные электрическая и магнитная поляризуемость частицы как функции частоты, их вещественная и мнимая компоненты обозначены одним и двумя штрихами, $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ — комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемость вещества пластины (в дальнейшем будем считать материал пластины не магнитным, т.е. $\mu(\omega) = 1$). Интегрирование по проекциям волновых векторов k_x, k_y в плоскости пластины в (1) осуществляется в первом координатном квадранте, а по частотам — от 0 до ∞. Структура выражения $\{R_e, R_m \to \tilde{R}_e, \tilde{R}_m\}$ точно такая же, как и в фигурных скобках в первом интегральном слагаемом, с выполнением указанной замены.

При тепловом равновесии $T_1 = T_2 = T$ формула (1) приобретает наиболее компактный вид после поворота контура интегрирования по частоте на угол $\pi/2$ (в комплексной плоскости). Тогда интегралы по областям $k > \omega/c$ и $k < \omega/c$ объединяются в один интеграл по комплексной частоте $i\xi$ и результат записывается в виде [9]

$$F_z = -2k_BT \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} dkk[R_e(i\xi_n, k)\alpha_e(i\xi_n) + R_m(i\xi_n, k)\alpha_m(i\xi_n)]$$
$$\times \exp\left(-2\sqrt{k^2 + \xi_n^2/c^2}z\right), \tag{11}$$

где $\xi_n = 2\pi k_B T n/\hbar$, $a_n = 1 - \delta_{0n}/2$. При $\alpha_m(\omega) = 0$ формула (11) тождественно совпадает с результатом работы [10], а в случае $T = 0$ — с результатом [7,8]

$$F_z = -\frac{\hbar}{\pi} \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} dkk \exp\left(-2\sqrt{k^2 + \xi^2/c^2}z\right)$$
$$\times [R_e(i\xi, k)\alpha_e(i\xi) + R_m(i\xi, k)\alpha_m(i\xi)]. \tag{12}$$

Таким образом, и формула (11), и формула (12) относятся к случаю термодинамического равновесия: первая — при конечной температуре системы $T \neq 0$, а вторая — при температуре $T = 0$. В последнем случае сила Казимира целиком обусловлена нулевыми флуктуациями электромагнитного поля.

В неравновесном случае $T_1 = 0$, $T_2 = T$ из (1) следует, что сила Казимира определяется формулой (11) с добавлением еще одного слагаемого вида

$$\Delta F_z = \frac{2\hbar}{\pi}\int\limits_0^\infty d\omega \Pi(\omega, T)\alpha_e''(\omega)\mathrm{Re}\left\{\int\limits_0^\infty dkk[\exp(-2q_0 z)R_e(\omega, k)]\right\}$$
$$+\{\alpha_e'' \to \alpha_m'', R_e \to R_m\}, \qquad (13)$$

где $\Pi(\omega, T) = \big(\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1\big)^{-1}$, а внеинтегральный член в фигурных скобках идентичен первому интегралу с соответствующей модификацией подынтегральных функций. Соответственно при взаимодействии не магнитного атома в основном состоянии с нагретой пластиной сила Казимира–Полдера будет определяться суммой выражений (11) и (13) при условии $\alpha_m(\omega) = 0$.

Полученная форма записи для силы Казимира, однако, не очень удобна по той причине, что ее „холодная“ и температурная части не отделены друг от друга. Для того чтобы это сделать, воспользуемся в (1) представлением гиперболического котангенса в виде $\coth(x) = 1 + 2\big(\exp(x) - 1\big)^{-1}$. Тогда формула (1) приводится к виду

$$F_z(z, T) = F_z^{(0)}(z) + F_z^{(T)}(z, T), \qquad (14)$$

где „холодная“ часть $F_z^{(0)}(z)$ определяется формулой (12), а тепловая часть $F_z^{(T)}(z, T)$ (при $\alpha_m(\omega) = 0$) равна

$$F_z^{(T)}(z, T) = -\frac{2\hbar}{\pi}\int\limits_0^\infty d\omega\alpha_e'\Pi(\omega, T)\left\{\int\limits_{\omega/c}^\infty dkkR_e''\exp(-2q_0 z)\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^{\omega/c} dkk\mathrm{Im}[\tilde{R}_e\exp(2i\tilde{q}_0 z)]\right\}. \qquad (15)$$

При $\alpha_m(\omega) \neq 0$, очевидно, к правой части (15) добавляется аналогичное выражение с заменой электрических величин (с индексом e) на магнитные (с индексом m). Именно формула (15) и определяет неравновесную (тепловую) часть силы Казимира–Полдера для атома или „холодной“ частицы вблизи нагретой поверхности (ср. с результатами [10,11]).

В заключение укажем на принципиально важное преимущество общей формулы (1), заключающееся в том, что она демонстрирует полное отсутствие противоречий с термодинамической теоремой Нернста для материала пластины с диэлектрической функцией Друде, имеющей в низкочастотном пределе асимптотику $\varepsilon(\omega) \sim \omega^{-1}$ [12]. Такая асимптотика имеет место для металлических тел и диэлектриков с остаточной проводимостью на низких частотах. Между тем расчеты энтропии системы, основанные на применении формулы Лифшица в конфигурации 1 [13] и ее модификации для конфигурации 2 [14], свидетельствуют о парадоксальном нарушении теоремы Нернста: при $T = 0$ энтропия не обращается в нуль, если асимптотика диэлектрической функции имеет вид $\varepsilon(\omega) \sim \omega^{-1}$.

Список литературы

[1] *Casimir H.B.G., Polder D.* // Phys. Rev. 1984. V. 73. P. 360.
[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 2002. С. 493.
[3] *Бараш Ю.С.* // Силы Ван-дер-Ваальса. М.: Наука, 1988. С. 344.
[4] *Дедков Г.В., Кясов А.А.* // ФТТ. 2003. Т. 45. С. 1729; NIM. 2002. V. B195. P. 247.
[5] *Dedkov G.V., Kyasov A.A.* // Europhys. Lett. 2007. V. 74. P. 44 005.
[6] *Дедков Г.В., Кясов А.А.* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. В. 9. С. 61.
[7] *Дедков Г.В., Кясов А.А.* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. В. 7. С. 71.
[8] *Дедков Г.В., Кясов А.А.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. В. 4. С. 1.
[9] *Дедков Г.В., Кясов А.А.* // ФТТ. 2009 (в печати).
[10] *Antezza M., Pitaevskii L.P., Stringari S.* // Phys. Rev. 2004. V. A70. P. 053 619.
[11] *Henkel C., Joulain K., Mulet J.-P., Greffet J.-J.* // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 2002. V. 4. P. S109.
[12] *Дедков Г.В., Кясов А.А.* // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. В. 21. С. 33.
[13] *Bezerra V.B., Klimchitskaya G.L., Mostepanenko V.M.* // Phys. Rev. 2003. V. A66. P. 062 112; Phys. Rev. 2004. V. A69. P. 022 119.
[14] *Klimchitskaya G.L., Mostepanenko V.M.* // arXiv: 0801.1978v2 [quant-ph] 15Jan 2008.