

05:11

Статистика длин и зависимость суммарной длины контактов от нормальной силы для фрактальных поверхностей с различным индексом Хирша

© В.Л. Попов, А.Э. Филиппов

Берлинский технический университет, Берлин, Германия
Донецкий физико-технический институт, Украина

Поступило в Редакцию 31 января 2008 г.

Во многих прикладных задачах основную роль играет не площадь, а полная длина реального контакта между двумя шероховатыми поверхностями L . В настоящей работе впервые исследована зависимость полной длины контакта для произвольных фрактальных поверхностей от сдвливающей силы F и показано, что она определяется скейлинговым соотношением $L \propto F^{3/4}$.

PACS: 91.30.-f, 91.30.Bi.

Конфигурация микроконтактов между двумя шероховатыми поверхностями стала ввиду ее прикладной актуальности в последние годы предметом интенсивных исследований [1–4]. При этом исследовалась площадь реального контакта между шероховатыми поверхностями. Между тем имеется целый ряд прикладных задач, в которых основную роль играет не площадь, а полная длина реального контакта. Примером являются электрические и тепловые контакты. Этот аспект контактной механики пока остается полностью открытым. Насколько нам известно, в настоящей работе мы впервые исследуем зависимость полной длины контакта для произвольных фрактальных поверхностей от сдвливающей силы.

Электрическая проводимость Λ ($\Lambda = 1/R$, где R есть переходное сопротивление) круглого контакта радиуса a в отсутствие оксидного

слоя дается соотношением

$$\Lambda = \frac{2a}{\rho}, \quad (1)$$

где ρ — удельное сопротивление. Проводимость контакта, таким образом, пропорциональна диаметру контакта $2a$, а не его площади. Этим же свойством обладают тепловая проводимость (величина обратная тепловому сопротивлению) контакта, а также тангенциальная и нормальная жесткость контакта [5]. Все названные величины обладают свойством аддитивности при условии, что радиус отдельных микроконтактов много больше среднего расстояния между ними. В случае эллиптических контактов вместо диаметра следует брать величину, пропорциональную квадратному корню из площади контакта. Для вычисления названных физических величин представляет интерес вычисление суммы диаметров всех микроконтактов как функции сдвигающей силы.

Элементарная оценка для отношения длины контакта к сдвигающей силе может быть получена следующим образом. Для одиночного контакта между неоднородностью с радиусом кривизны R_c при глубине вдавливания δ диаметр контакта, согласно Герцу, равен $\Delta l = 2a = 2\delta^{1/2}R_c^{1/2}$, а сила равна $\Delta F = \frac{4}{3}E^*R_c^{1/2}\delta^{3/2}$, где E^* есть эффективный упругий модуль $E^* = E/(1 - \nu^2)$, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона [5]. Их отношение не зависит от радиуса кривизны и равно $\frac{\Delta l}{\Delta F} = \frac{3}{2E^*\delta}$. Поскольку характерное значение глубины вдавливания при „средних“ значениях сдвигающей силы порядка среднеквадратичного значения разброса высот микроконтактов h , то можно ожидать, что и для отношения средних значений суммы диаметров всех контактов $L = \sum \Delta l_i$ к суммарной силе сдвигания $F = \sum \Delta F_i$ будет иметь соотношение $\frac{L}{F} \propto \frac{1}{E^*h}$. Нетривиальное изменение функции распределения длин контактов с силой может привести к тому, что отношение длины контакта к силе будет отклоняться от этого соотношения на слабые степенные или логарифмические множители. Корректное соотношение, однако, должно в любом случае обладать следующими строгими скейлинговыми свойствами: при умножении вертикального масштаба поверхностной неоднородности на некоторый фактор сила F должна умножаться на этот же фактор. Она также должна быть строго пропорциональна упругому модулю E^* . С учетом анализа размерности возможная общая степенная форма контактной

длины от силы, удовлетворяющая этим скейлинговым свойствам, имеет вид

$$L = \lambda \left(\frac{F}{E^*} \right)^\alpha h^{-2\alpha+1} (\nabla h)^{\alpha-1}. \quad (2)$$

Отношение $\lambda = \frac{L}{h^{-2\alpha+1} (\nabla h)^{\alpha-1}} \left(\frac{E^*}{F} \right)^\alpha$ должно согласно этой гипотезе оставаться постоянным. Ниже мы вычисляем показатель степени α и соответствующую константу λ в рамках метода редукции размерности.

Гайке и Поповым [6] было показано, что вычисление контакта между упругим континуумом, ограниченным 2D поверхностью $f(x)$ со спектральной плотностью

$$C_{2D}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi^2} \int \langle f(\mathbf{x})f(0) \rangle e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} d^2x, \quad (3)$$

и твердой поверхностью, можно заменить вычислением контакта 1D цепочки материальных точек, упруго связанных с „шероховатой“ линией, имеющей спектральную плотность

$$C_{1D}(q) = \pi q C_{2D}(q). \quad (4)$$

Жесткость связи материальных точек с линией на единицу длины нужно выбрать равной $c_n = E^*$. Длина всех микроконтактов в одномерной модели непосредственно воспроизводит сумму диаметров контактов реальной трехмерной задачи.

С этой целью мы генерируем жесткую „шероховатую“ линию методом, использованным в работах [7–9]:

$$f(x) = f_0 \int_{q_1}^{q_2} dq C_{1D}(q) \cos(qx + \xi). \quad (5)$$

Случайная фаза $\xi(x)$ здесь представляет собой δ -коррелированный шум $\langle \xi(q)\xi(q') \rangle = 2\pi\delta(q - q')$, а пределы интегрирования q_1 и q_2 определяются волновыми векторами, на которых ограничивается масштабнo-инвариантное поведение реальной системы. Масштабно-инвариантная спектральная функция $C_{1D}(q) = C_0 q^{-\beta}$ содержит показатель $\beta = H + 1/2$, задаваемый индексом Хирша H двумерной фрактальной поверхности $f(x)$, и, как правило [2–4], варьируется в интервале

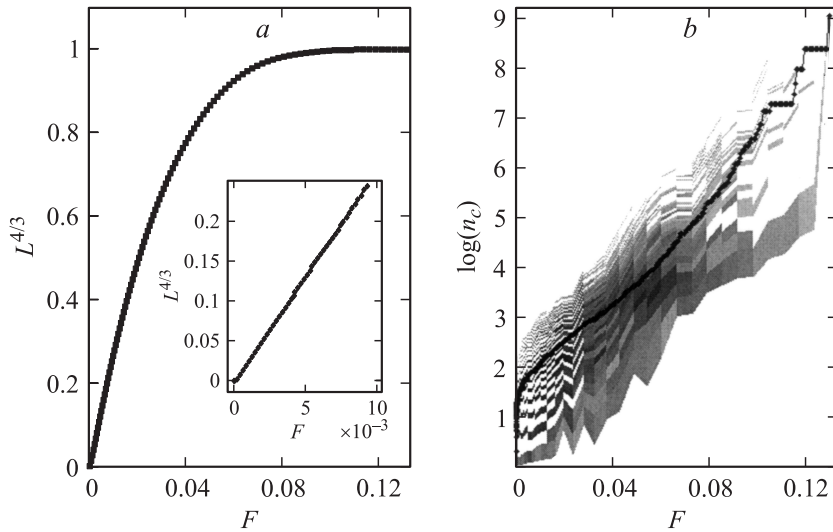


Рис. 1. Зависимость суммарной длины контакта, нормированной на полную длину системы, в степени $3/4$ от силы давления F (в безразмерных единицах) (а). На вставке — линейный участок при малых F . Гистограмма распределения связанных контактов по длине $P(n_c)$ показана градациями серого на фрагменте (б). Черная линия отображает зависимость $\langle n_c \rangle$ от F .

$0 \leq H \leq 1$, так что $\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{3}{2}$. Применяя данный алгоритм, мы получаем некоторую конкретную реализацию линии $f(x)$ для $N = 10\,000$ сегментов при $\beta = 1$. Численный эксперимент состоит в „опускании“, упругой „поверхности“ y на $f(x)$. При этом возникают множественные микроконтакты, число N_c и суммарная длина L которых постепенно увеличиваются. В областях контакта поверхность деформируется $y(x_j) \rightarrow y_0 + \delta y(x_j)$, так что для преодоления сопротивления необходима сила давления F , равная сумме упругих сил: $F = E^* \sum \delta y(x_k)$. Зависимости суммарной длины контакта L и давления F от положения y вычисляются непосредственно. Используя их, величину F можно численно сопоставить с суммарной длиной контакта L . На рис. 1, а показана определенная таким образом зависимость $L^{4/3}$ от сдавливающей силы F . Степень $4/3$ использована, поскольку именно для такой зависимости при малых F имеется линейный участок, выделенный на вставке к

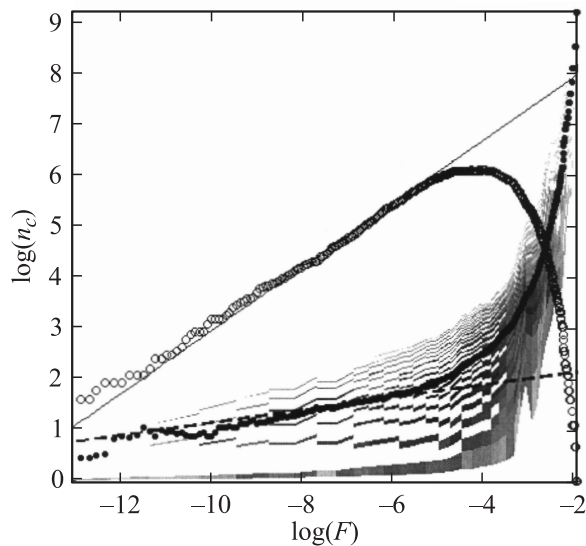


Рис. 2. Зависимость $\langle n_c \rangle$ от силы давления F (в безразмерных единицах) и количества контактных областей N_c (белые кружки) в логарифмическом масштабе. Скейлинговые зависимости $\langle n_c \rangle \propto F^{1/8}$ и $\langle n_c \rangle \propto F^{5/8}$ помечены штриховой и сплошной прямыми соответственно.

фрагменту рис. 1, *a*. Для прояснения природы такой зависимости мы используем гистограмму распределения связанных контактов по длине $P(n_c)$ при различных давлениях, которая показана градациями серого на фрагменте рис. 1, *b*. Формированию гистограммы рис. 1, *b* соответствует развитие вдоль x некоторой реализации связанных контактных областей. Под связным контактом мы понимаем совокупность последовательных сегментов (с длиной n_c , равной их числу), каждый из которых находится в контакте с линией y . Черная линия на рис. 1, *b* отображает зависимость от F средней длины контакта $\langle n_c \rangle$. Интегрируя полученные распределения, можно вычислить показанные на рис. 2 зависимости от давления F средней длины контактов $\langle n_c \rangle$ и количества контактных областей N_c (белые кружки). На рис. 2 они показаны в логарифмическом масштабе. Можно убедиться, что в обоих случаях имеют место скейлинговые области, где реализуются зависимости

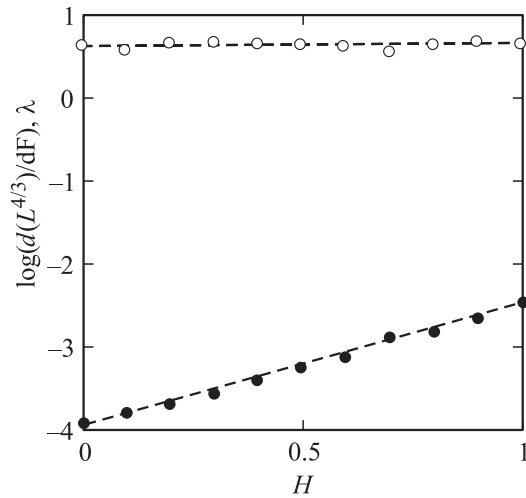


Рис. 3. Зависимость наклона $dL^{4/3}/dF$ в области линейности и постоянной λ от фрактального индекса Хирша H (черные и белые кружки соответственно).

$\langle n_c \rangle \propto F^{1/8}$ и $N_c \propto F^{5/8}$ (помечены штриховой и сплошной прямыми соответственно). Суммарная контактная область, таким образом, должна увеличиваться как $L \propto n_c N_c \propto F^{1/8} F^{5/8} = F^{3/4}$, т.е. можно ожидать, что показатель $\alpha = 3/4$. Зависимость наклона $dL^{4/3}/dF$ в скейлинговой области от фрактального индекса Хирша H показана на рис. 3 черными кружками. Знание ее позволяет определить самосогласованно и искомое соотношение $\lambda = Lh^{2\alpha-1}(\nabla h)^{1-\alpha}E^*F^{-\alpha}$. На рис. 3 приведен результат вычисления λ в том же интервале $0 \leq H \leq 1$ (белые кружки). Из рисунка видно, что с хорошей точностью $\lambda \simeq 0.63$.

Таким образом, в рамках редуцированной модели нами установлено, что суммарная длина контактов определяется скейлинговым соотношением $L = \lambda h^{-1/2}(\nabla h)^{-1/4}E^{*-3/4}F^{3/4}$. Полученная величина λ практически не зависит от индекса Хирша H и приближенно равна $\lambda \simeq 0.63$.

Один из авторов (АФ) благодарит Deutsche Forschungsgemeinschaft за финансовую поддержку во время пребывания в Берлинском ТУ.

Список литературы

- [1] *Hyun S., Pei L., Molinari J.F., Robbins M.O.* // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. P. 026 117.
- [2] *Persson B.N.J.* // Surface Science Reports. 2006. V. 61. P. 201–227.
- [3] *Hyun S., Robbins M.O.* // Tribology International. 2007. V. 40. P. 1413–1422.
- [4] *Campana C., Müser M.* // Phys. Rev. B. 2006. V. 74. P. 075 420.
- [5] *Johnson K.L.* Contact mechanics. Cambridge University Press, 2001. 6th ed.
- [6] *Geike T., Popov V.L.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. P. 036 710. P. 5.
- [7] *Filippov A.E., Popov V.* // Journ. Phys. Condensed Matter. 2007. V. 19. P. 096 012.
- [8] *Filippov A.E., Popov V.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. P. 27 103.
- [9] *Popov V., J. Starceвич, Filippov A.E.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. P. 066 104.