

09

О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием

© С.П. Кузнецов, В.И. Пономаренко

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН,
Саратов, Россия
E-mail: vip@sgu.ru

В окончательной редакции 15 марта 2008 г.

Предложен и реализован в эксперименте радиотехнический генератор хаоса на основе неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля с запаздыванием. Осциллятор пребывает поочередно в режиме возбуждения и затухания в силу периодического изменения параметра, ответственного за бифуркацию рождения предельного цикла. Возбуждение колебаний на каждой новой стадии активности стимулируется сигналом, который поступает через линию задержки, будучи порожденным на предыдущей стадии активности. Благодаря квадратичному нелинейному преобразованию при передаче сигнала на каждой очередной стадии активности имеет место умножение фазовой переменной на фактор 2, так что для фазы реализуется растягивающее отображение окружности (отображение Бернулли) с хаотической динамикой.

PACS: 05.45.-a

В математической теории динамических систем вводится в рассмотрение класс однородно гиперболических странных аттракторов, примерами которых служат математические конструкции — аттрактор Плыкина и соленоид Смейла–Вильямса [1–3]. Это аттракторы

с сильными хаотическими свойствами, допускающие далеко идущий математический анализ. С практической точки зрения, системы с такими аттракторами могли бы представлять интерес в силу присущего им свойства структурной устойчивости („грубости“). До последнего времени было распространено мнение, что данный класс аттракторов не встречается в реальных системах с хаотической динамикой.

Недавно предложена физически реализуемая система, в которой отображение Пуанкаре имеет аттрактор типа Смейла–Вильямса [4,5]. Для этой системы, составленной из двух связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля, была выполнена компьютерная проверка известных из математической литературы достаточных условий наличия гиперболического аттрактора [6,7]. Другие варианты подобных схем обсуждаются в работах [8–10]. Общий принцип их функционирования состоит в манипуляции фазами колебаний при передаче возбуждения между парциальными осцилляторами, которые становятся активными попеременно, с тем чтобы трансформация фаз отвечала итерациям отображения с хаотической динамикой. В настоящей работе указанный принцип предлагается осуществить в схеме с единственным активным элементом в виде осциллятора Ван-дер-Поля с дополнительной цепью запаздывающей обратной связи. С точки зрения возможной реализации, например в радиотехнике или лазерной физике, такое устройство будет проще, чем схема с двумя активными элементами. С позиций математического анализа она сложнее, поскольку системе с запаздыванием отвечает бесконечномерное фазовое пространство.

Рассмотрим модельную систему, описываемую уравнением следующего вида:

$$\ddot{x} - (A \cos \Omega t - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x(t - \tau)\dot{x}(t - \tau) \cos \omega_0 t. \quad (1)$$

Здесь x — динамическая переменная осциллятора Ван-дер-Поля (см. левую часть формулы) с рабочей частотой ω_0 . Параметр, управляющий бифуркацией рождения предельного цикла, медленно изменяется во времени с частотой $\Omega \ll \omega_0$ и амплитудой A , так что осциллятор попеременно пребывает в стадиях возбуждения и затухания колебаний. В правой части уравнения добавлен член, отвечающий за дополнительную запаздывающую обратную связь. Это произведение динамической переменной в момент времени, запаздывающий на τ , ее производной и вспомогательного сигнала на частоте ω_0 . Параметр ε , определяющий

величину запаздывающей обратной связи, считаем малым. Будем предполагать, что частоты ω_0 и Ω находятся в целочисленном отношении, так что внешнее воздействие на систему в целом периодическое.

Функционирование системы (1) как генератора хаоса можно пояснить следующим образом. Благодаря периодической вариации параметра, ответственного за возникновение генерации, осциллятор попеременно пребывает в стадиях возбуждения и затухания колебаний. Надлежащим выбором времени запаздывания $\tau = 3T/4$ можно обеспечить такую ситуацию, что на каждой очередной стадии активности осциллятора затравку для возникновения в нем самоподдерживающихся колебаний будет обеспечивать сигнал, испущенный на предыдущей стадии активности. Предположим, что он имел некоторую фазу φ , т.е. $x(t) \propto \sin(\omega_0 t + \varphi)$ и $\dot{x}(t) \propto \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Тогда член в правой части уравнения будет содержать составляющую на основной частоте ω_0 с удвоенной фазой. В самом деле, поскольку $x(t)\dot{x}(t) \sim \sin 2(\omega_0 t + \varphi)$, то

$$\begin{aligned} x(t - \tau)\dot{x}(t - \tau) \cos \omega_0 t &\sim \sin 2(\omega_0(t - \tau) + \varphi) \cos \omega_0 t \\ &= \frac{1}{2} \sin(\omega_0 t - 2\omega_0 \tau + 2\varphi) + (\dots), \end{aligned}$$

где многоточие означает нерезонансное слагаемое на утроенной частоте. В результате на новой стадии активности фаза колебаний осциллятора будет определяться фазой резонансной составляющей затравочного сигнала. Таким образом, на последовательных стадиях активности осциллятора имеем

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}, \quad (2)$$

где символ $\text{mod} 2\pi$ означает, что фаза определена с точностью до добавки, кратной 2π . Соотношение (2) известно как растягивающее отображение окружности, или отображение Бернулли [11].¹ Известно, что оно демонстрирует хаотическую динамику, характеризуемую положительным показателем Ляпунова $\Lambda = \ln 2$.

В предположении, что по остальным направлениям фазового пространства имеет место сжатие, такого рода динамика должна отвечать присутствию аттрактора Смейла–Вильямса у отображения фазового пространства в себя за период внешнего воздействия.

¹ Заметим, что константу можно устранить сдвигом начала отсчета фазы.

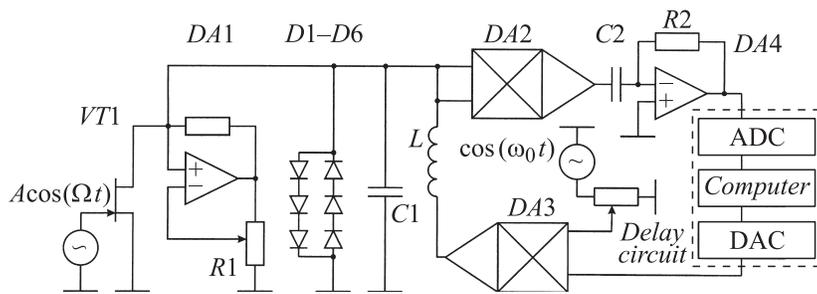


Рис. 1. Блок-схема генератора гиперболического хаоса с запаздывающей обратной связью.

В соответствии с изложенной идеей сконструировано радиотехническое устройство, блок-схема которого показана на рис. 1. Активный элемент реализован с использованием LC -контура, отрицательного сопротивления на усилителе $DA1$ и нелинейного диссипативного элемента из диодов $D1-D6$. Динамика этой части схемы в общих чертах соответствует осциллятору Ван-дер-Поля. Основная частота колебаний автогенератора $f_0 = \omega_0/2\pi$ составляет 3 kHz. Модуляция параметра, ответственного за возбуждение автоколебаний, достигается за счет внесения дополнительной диссипации полевым транзистором $VT1$. Его сопротивление медленно изменяется во времени под действием внешнего сигнала по периодическому закону $\Delta R \sim A \cos \Omega t = A \cos(2\pi t/T)$, причем на одном полупериоде осциллятор находится в режиме генерации, а на втором — под порогом генерации. Возбуждение колебаний с определенной фазой при наступлении очередной стадии генерации обеспечивается приходом сигнала по цепи запаздывающей обратной связи с выхода умножителя $DA3$. В цепи обратной связи сигнал подвергается квадратичному преобразованию (умножитель на микросхеме $DA2$) и дифференцированию посредством стандартной схемы на элементах $R2$, $C2$, $DA4$. Далее сигнал проходит через цифровую линию задержки, содержащую аналого-цифровой преобразователь (ADC), компьютер и цифроаналоговый преобразователь (DAC). Задержка реализована программным образом в компьютере. После прохождения линии задержки имеет место умножение на вспомогательный сигнал частоты f_0 от внешнего генератора. Благодаря выбору

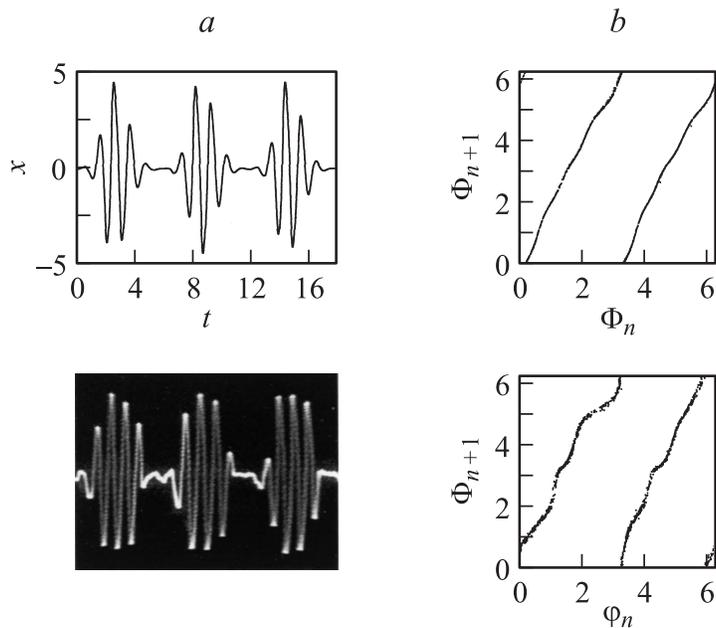


Рис. 2. Зависимость динамической переменной от времени (*a*) и диаграммы, иллюстрирующие трансформацию фазы на последовательных стадиях активности осциллятора (*b*), согласно результатам численного решения уравнения (1) при $\omega_0 = 2\pi$, $T = 2\pi/\Omega = 6$, $\tau = 3/4T$, $A = 5.5$, $\varepsilon = 0.2$ (вверху) и в физическом эксперименте (внизу).

времени задержки $\tau = 3T/4$ сигнал, испущенный в момент достижения максимальной величины параметра возбуждения, поступает в осциллятор как раз к началу очередной стадии активности, обеспечивая заправку для начала генерации на этой стадии. Из-за присутствия в цепи обратной связи квадратичного нелинейного преобразования в схеме реализуется удвоение фазы при переходе от одного цуга колебаний к другому. Отношение частот внешних сигналов в эксперименте было $N = \omega_0/\Omega = f_0T = 6$.

На рис. 2 представлены результаты численного решения уравнения (1) в сравнении с результатами эксперимента. Рис. 1, *a* демон-

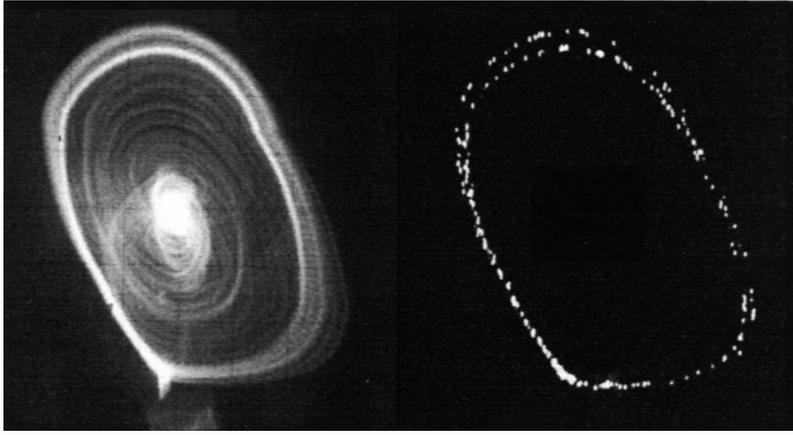


Рис. 3. Полученные в эксперименте иллюстрации режима хаотической динамики: двумерная проекция фазового портрета и стробоскопическое отображение на плоскости $(V_{C1}, dV_{C1}/dt)$.

стрирует зависимость динамической переменной от времени, которая имеет вид последовательность цугов колебаний. Хаос проявляется в нерегулярном изменении положения заполнения относительно огибающей для различных цугов. На рис. 1, *b* показаны диаграммы для фаз колебаний, определенных для последовательных цугов как $\Phi_n = \arg [x(t_n) + i\omega_0^{-1}\dot{x}(t_n)]$. Здесь момент t_n относится к середине активной стадии и фиксирован относительно медленного процесса вариации параметра возбуждения. В эксперименте для построения отображения $\varphi_{n+1} = f(\varphi_n)$ использовались временные ряды, характеризующие выборку с дискретным по времени шагом генерируемого переменного напряжения сигнала и записанные в компьютер при помощи аналого-цифрового преобразователя. Видно, что трансформация фазы за период T приблизительно соответствует отображению Бернулли: это растягивающее отображение, относящееся к тому же топологическому типу.

На рис. 3 приводятся полученные в эксперименте фотографии с экрана осциллографа, иллюстрирующие режим хаотической динамики

в системе: двумерная проекция фазового портрета и стробоскопическое отображение. Спектр шумовых колебаний, полученных в эксперименте, имеет ширину 20% на уровне 0.5 при средней частоте 3 kHz. Стробоскопическое отображение по виду напоминает соленид Смейла–Вильямса, демонстрируя хорошо различимую поперечную фрактальную структуру, характерную для аттракторов этого типа.

Реализация и экспериментальное исследование гиперболических аттракторов представляется интересным и важным направлением в нелинейной динамике. С практической точки зрения, в качестве главного преимущества надо отметить свойство структурной устойчивости таких аттракторов. Для рассмотренной нами системы с запаздыванием утверждение о гиперболической природе аттрактора, вложенного в бесконечномерное фазовое пространство, носит в настоящий момент гипотетический характер, однако наблюдаемые в расчетах и в эксперименте особенности динамики находятся в соответствии с этим предположением. С точки зрения практической реализации, схема с одним активным элементом, очевидно, проще, чем предложенные ранее схемы на основе двух или более активных элементов. Ее преимущества будут существенными для устройств, функционирующих на более высоких частотах, где реализация линии задержки и квадратичной нелинейности обеспечивается достаточно просто.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-02-16619.

Список литературы

- [1] *Синай Я.Г.* // Нелинейные волны / Ред. А.В. Гапонов-Грехов. М.: Наука, 1979. С. 192–212.
- [2] *Shilnikov L.* // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1997. V. 7. N 9. P. 1353–2001.
- [3] *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [4] *Kuznetsov S.P.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. P. 144 101.
- [5] *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 129. № 2. С. 400–412.
- [6] *Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14. № 5. С. 3–29.
- [7] *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* // Physics Letters A. 2007. V. 365. Nos. 1–2. P. 97–104.

- [8] *Isaeva O.B., Jalnina A.Yu., Kuznetsov S.P.* // Phys. Rev. E. 2006. V. 74. P. 046 207.
- [9] *Жалнин А.Ю., Кузнецов С.П.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. В. 4. С. 10–18.
- [10] *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* // Physica D. 2007. V. 232. P. 87–102.
- [11] *Gaspard P.* // Encyclopedia of Nonlinear Science / Scott A., ed. Routledge, New York, 2005. P. 548–553.