

05

## Применимость редуцированной модели для описания реальных контактов между шероховатыми поверхностями с различным индексом Хирша

© В.Л. Попов, А.Э. Филиппов

Берлинский технический университет, Берлин, Германия  
Донецкий физико-технический институт, Украина

Поступило в Редакцию 10 января 2008 г.

Исследована применимость редуцированной модели для описания реальных контактов между шероховатыми поверхностями с различным индексом фрактальной размерности Хирша. Показано, что модель достаточно хорошо воспроизводит аналитические оценки и результаты реалистического, но значительно более громоздкого численного моделирования.

PACS: 91.30.-f, 91.30.Vi

Реальная поверхность контакта между двумя упругими телами определяет такие важные для приложений свойства контактов, как сила сухого трения и контактное сопротивление, обусловленное тонким плохо проводящим слоем (например, слоем оксидов). Вычисление поверхности контакта с измеренной топографией требует решения трехмерной контактной задачи вплоть до масштаба самых малых шероховатостей. Ввиду ее прикладной актуальности эта задача в последние годы стала предметом интенсивных исследований [1–4]. В работах [5,6] был предложен метод быстрого решения трехмерной контактной задачи путем конструирования и анализа эквивалентной одномерной системы. Его применимость была, однако, продемонстрирована в [5] только для одиночных контактов и шероховатых поверхностей с постоянной спектральной плотностью. Необходимым шагом является тестирование метода для поверхностей с различными фрактальными свойствами, которое предпринято в настоящем сообщении, и сравнение результатов с имеющимися в литературе для трехмерных моделей.

Напомним основные соотношения теории контактов и метода редукции. Аналитические расчеты зависимости между сдвливающей силой  $P$

и реальной площадью контакта  $A$  показывают [1–4], что при  $A$  менее 10% номинальной площади  $A_0$  имеет место соотношение

$$A = \frac{\kappa P}{E^* \nabla h}. \quad (1)$$

Здесь  $E^*$  есть эффективный упругий модуль  $E^* = E/(1 - \nu^2)$ ,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\nabla h$  есть среднеквадратичное значение градиента поверхностного профиля, а  $\kappa$  — константа. В приближении независимых микроконтактов Бушем и другими для  $\kappa$  получено значение  $\kappa = (2\pi)^{1/2} \approx 2.51$  [7], а в противоположном приближении независимых масштабных уровней Перссон приходит к значению  $\kappa = (8/\pi)^{1/2} \approx 1.60$  [2]. Численные расчеты Роббинса и др. [1,3] показывают, что константа  $\kappa$  является слабой функцией фрактальной размерности системы. Ниже мы воспроизведем результаты вычисления константы  $\kappa$  в рамках метода редукции размерности. Гайке и Поповым [5] было показано, что вычисление контакта между упругими континуумом, ограниченным 2D поверхностью  $f(\mathbf{x})$  со спектральной плотностью

$$C_{2D}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \langle f(\mathbf{x}) f(0) \rangle e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} d^2x \quad (2)$$

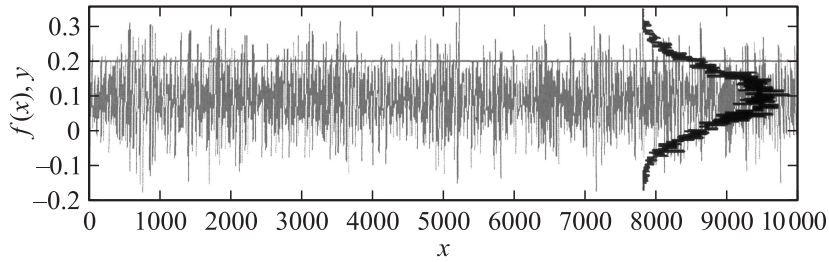
и твердой поверхностью можно заменить вычислением контакта 1D цепочки материальных точек, упруго связанных с „шероховатой“ линией, имеющей спектральную плотность

$$C_{1D}(q) = \pi q C_{2D}(q). \quad (3)$$

Жесткость связи материальных точек с линией на единицу длины нужно выбрать равной  $C_n = E^*$ , а площадь единичного контакта длины  $d$  вычисляется по правилу  $\Delta A = \pi d^2/4$ . Численная процедура вычисления реальной площади контакта в настоящей работе организована следующим образом. Мы генерируем жесткую „шероховатую“ линию в соответствии с алгоритмом, использованным в работах [8–10]:

$$f(x) = f_0 \int_{q_1}^{q_2} dq C_{1D}(q) \cos(qx + \xi). \quad (4)$$

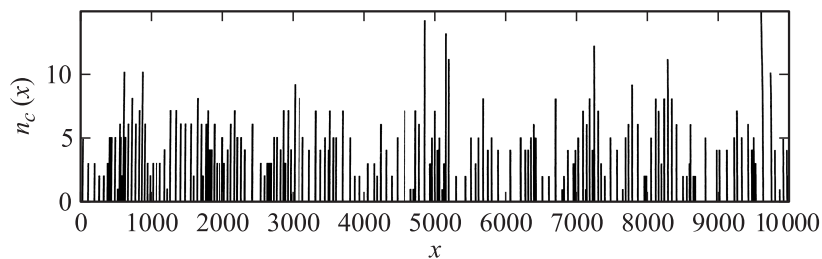
Здесь  $q_1$  и  $q_2$  являются характерными волновыми векторами, на которых ограничивается масштабно-инвариантное поведение, а фаза  $\xi(x)$  представляет собой  $\delta$ -коррелированный шум, удовлетворяющий условию



**Рис. 1.** Типичная численно прогенерированная фрактальная реализация жесткой контактной линии  $f(x)$  (серая кривая) при некотором расположении упругой контактной линии  $y$ .

$\langle \xi(q)\xi(q') \rangle = 2\pi\delta(q - q')$ . Спектральная функция  $C_{1D}(q)$  масштабнo-инвариантна  $C_{1D}(q) = C_0q^{-\beta}$  с показателем  $\beta = H + 1/2$ , определяемым индексом Хирша  $H$  фрактальной двумерной поверхности  $f(x)$ . Следуя работам [2–4], мы варьируем его в интервале  $0 \leq H \leq 1$ , так что  $1/2 \leq \beta \leq 3/2$ .

Типичный результат реализации этого алгоритма (при  $\beta = 1$  для  $N = 10\,000$  сегментов) представлен на рис. 1. Поверх серой кривой  $f(x)$  жирной черной линией изображена гистограмма  $\rho = \rho(y_j)$  распределения высот  $y_j = f(x_j)$ ; где  $j = 1, \dots, N$ , подтверждающая, что данного числа сегментов достаточно для получения относительно гладкой функции  $\rho(y_j)$ . Перестроив зависимость  $\rho$  от переменной  $\exp(-y^2)$ , можно убедиться, что с хорошей точностью распределение  $\rho = \rho(y_j)$  Гауссово, что соответствует как теоретическим представлениям [2], так и экспериментальным данным для большинства натуральных поверхностей. Изрезанность кривой  $f(x)$ , напоминающая случайный шум при большой длине массива  $N = 10\,000$ , иллюзорна. Выделяя короткие фрагменты  $f(x)$ , можно убедиться в ее гладкости и существовании производных. Это означает, что при „опускании“ на нее изначально плоская  $y|_{t=0} = \text{const}$  упругодеформируемая поверхность будет контактировать с  $f(x)$  на некоторой совокупности связанных фрагментов  $\delta x_k$ , которые (в соответствии с гипотезой работы [6]) в одномерном случае и должны быть ассоциированы с локальными площадками контакта:  $\Delta A = \frac{\pi}{4}d^2 \rightarrow \delta A_k = \frac{\pi}{4}\delta x_k^2$ . Индекс  $k = 0, \dots, N_{connected}$  здесь равен нулю в отсутствие контакта и пробегает область допустимых значений вплоть



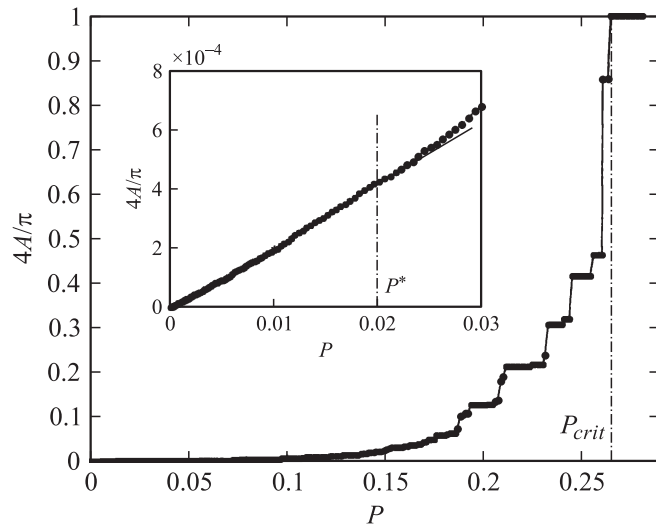
**Рис. 2.** Распределение контактных областей для конкретной реализации  $f(x)$  и мгновенного положения  $y$ , представленных на рис. 1. Высота и расположение столбиков отображают длину и положение середин связанных фрагментов контакта  $n_c(x)$  соответственно.

до полного числа связанных областей  $N_{connected}$ , не превышающего, естественно, полной длины системы  $N_{connected} \leq N$ .

По мере „опускания“ упругой „поверхности“  $y$  на  $f(x)$  количество приходящих в контакт связанных областей  $N_{connected}$  поначалу возрастает, а их длина  $n_c(k) \equiv \delta x_k$  в среднем  $n_c = \langle n_c(k) \rangle$  увеличивается. Затем они начинают объединяться, так что при продолжающемся росте  $n_c$  количество контактов  $N_{connected}$  падает и в пределе, когда  $y$  достигает минимума  $f(x)$ , стремится к единице  $N_{connected} \rightarrow 1$ . При этом  $n_c \rightarrow N$ . Произвольный момент этого процесса, соответствующий конкретной конфигурации рис. 1, проиллюстрирован на рис. 2. Высота и расположение столбиков отображают длину и положение середин связанных фрагментов контакта  $n_c(k)$  соответственно. Не составляет труда также восстановить гистограмму плотности  $\rho(n_c)$  для каждого текущего распределения длин  $\{n_c(k)\}$ . Поскольку для приведения в контакт поверхность должна быть деформирована  $y(x_j) \rightarrow y_0 + \delta y(x_j)$ , необходимо давление  $P$ , равное сумме упругих сил:

$$P = E^* \sum_{k=0}^{N_{connected}} \left[ \sum_{j=0}^{n_c(k)} \delta y_k(x_j) \right]. \quad (5)$$

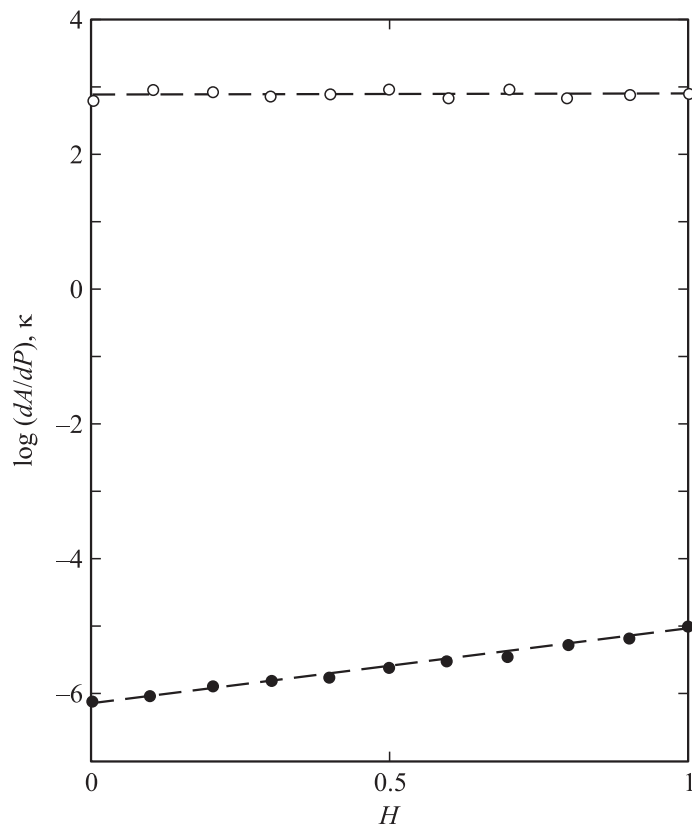
Величина  $P$  может быть найдена численно и поставлена в соответствие суммарной площади контакта  $A = \sum_{k=0}^{N_{connected}} \delta A_k$ . На рис. 3 показана определенная таким образом зависимость суммарной площади контактов  $A$



**Рис. 3.** Зависимость от давления  $P$  суммарной площади контактов  $A$ . При достижении критического давления  $P_{crit}$  все точки поверхности приходят в контакт, так что  $\frac{A}{\pi/4}|_{P > P_{crit}} = 1$ . На вставке выделена область малых давлений, при которых (вплоть до некоторого  $P^* \approx 0.02$ ) зависимость  $A(P)$  практически линейна.

от давления  $P$ . При достижении критического давления  $P_{crit}$  все точки поверхности приходят в контакт, так что  $\frac{A}{\pi/4}|_{P \geq P_{crit}} = 1$ . На вставке выделена область малых давлений  $P < P^*$ , при которых зависимость  $A(P)$  практически линейна. Для проверки описанных выше соотношений достаточно при различных  $H$  вычислить средний наклон  $dA/dP = A/P$  в области линейности и, поделив его на среднеквадратичное значение градиента поверхностного профиля  $\nabla f$ , определить искомую постоянную  $\kappa$ . Результаты этих расчетов суммированы на рис. 4 черными и белыми кружками соответственно. Поскольку даже при  $N = 10\,000$  сегментов поверхности величина  $\kappa$  все еще сильно флуктуирует, этот расчет был усреднен дополнительно по 10 реализациям.

Как видно из рис. 4, полученная в рамках редуцированной модели величина  $\kappa$  практически не зависит от индекса Хирша  $H$  и приближенно равна  $\kappa = 2.785$ , что несколько превосходит аналитические оценки и численные результаты, получаемые в рамках реалистических 3D мо-



**Рис. 4.** Зависимость наклона  $dA/dP$  (черные точки) в области линейности и постоянной  $\kappa$  (белые кружки) от фрактального индекса Хирша  $H$ .

делей, лежащие в интервале от 1.6 до 2.5. Вместе с тем даже такое согласие следует рассматривать как большой успех редуцированной теории, главное достоинство которой состоит в том, что громоздкие, хотя и реалистические 3D расчеты контактных задач могут быть заменены простым и компактным квазиодномерным моделированием. Тем не менее остается открытым вопрос о конкретной природе расхождения между результатами этой модели и теми, что получаются более изощренными методами. Некоторый свет на их природу могут

пролить исследования соотношения между давлением и суммарной длиной контактов и статистических свойств полученного здесь распределения связанных контактов. Эти вопросы мы намерены исследовать в следующей, более полной работе.

Один из авторов (АФ) благодарит Deutsche Forschungsgemeinschaft за финансовую поддержку во время пребывания в Берлинском ТУ.

## Список литературы

- [1] *Hyun S., Pei L. et al.* // Phys. Rev. 2004. V. E 70. P. 026117.
- [2] *Persson B.N.J.* // Surface Science Reports. 2006. V. 61. P. 201–227.
- [3] *Hyun S., Robbins M.O.* // Tribology International. 2007. V. 40. P. 1413–1422.
- [4] *Campana C., Müser M.* // Phys. Rev. 2006. V. B 74. P. 075420.
- [5] *Geike T., Popov V.L.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. P. 036710.
- [6] *Geike T., Popov V.L.* // Tribology International. 2007. V. 40. P. 924–929.
- [7] *Bush A.W., Gibson R.D., Thomas T.R.* // Wear. 1995. P. 35.
- [8] *Filippov A.E., Popov V.* // Journ. Phys. Condensed Matter. 2007. V. 19. P. 096012.
- [9] *Filippov A.E., Popov V.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. P. 27103.
- [10] *Popov V., Starcevich J., Filippov A.E.* // Phys. Rev. 2007. V. E 75. P. 066104.