

09

## **Эффект „вымирания“ квазипериодических режимов в системе диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с импульсным воздействием**

© А.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич, Л.В. Тюрюкина

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: stankevichnv@mail.ru

Поступило в Редакцию 27 ноября 2007 г.

Рассматривается система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля под периодическим импульсным воздействием. Показано, что в случае, когда связанные осцилляторы демонстрируют эффект гибели колебаний, при добавлении импульсного воздействия на плоскости период–амплитуда воздействия возникают острова квазипериодических режимов, которые „вымирают“ при увеличении частотной расстройки.

PACS: 05.45.Xt

Связанные осцилляторы Ван-дер-Поля являются „эталонной“ системой теории колебаний и нелинейной динамики, которой посвящено значительное количество работ (см., например, [1–8]). Она с успехом применяется для описания не только физических, но и химических, биофизических и других вариантов автоколебательных систем [1,2]. Интерес к этой системе, однако, не ослабевает, поскольку она характеризуется большим числом существенных параметров, при вариации которых обнаруживаются все новые особенности динамики и колебательные эффекты [3]. Кроме того, задача допускает описание на разных „уровнях“: с помощью уравнений фазовой динамики [1,2,5], укороченных уравнений в рамках квазигармонического приближения [1–3], численного исследования исходных уравнений [6,8]. В настоящей работе будут обсуждены некоторые колебательные режимы в системе связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с внешним возбуждением. Исходная

система уравнений имеет следующий вид:

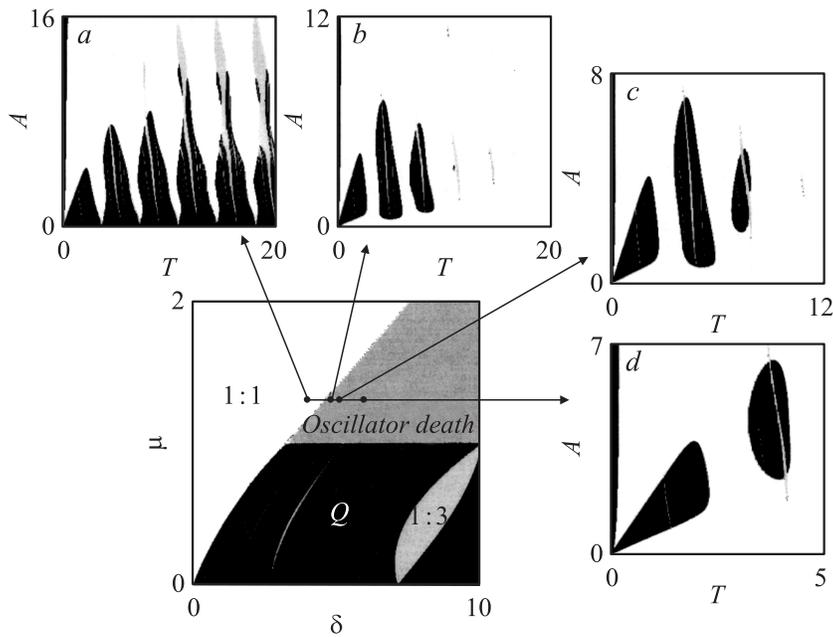
$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda - x^2) \frac{dx}{dt} + x + \mu \left( \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) &= A \sum \delta(t - nT), \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda - y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y + \mu \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $x, y$  — динамические переменные;  $\lambda$  — параметр, характеризующий степень превышения над порогом бифуркации Андронова–Хопфа в отдельных осцилляторах;  $\delta$  — частотная расстройка второго осциллятора относительно первого в отсутствие связи;  $\mu$  — коэффициент диссипативной связи. Мы выбираем внешнее воздействие в виде коротких импульсов, сообщающих системе определенный „толчок“ через моменты времени  $T$ . Амплитуда импульсов  $A$ ,  $n$  — количество импульсов.

Одним из характерных эффектов в системе связанных осцилляторов (1) с выключенным внешним воздействием (будем называть ее автономной) является эффект „гибели колебаний“ (oscillator death) [2,4]. Он состоит в том, что достаточно сильная диссипативная связь может приводить при превышении частотной расстройкой определенной величины к тому, что неподвижная точка в начале координат становится устойчивой и колебания исчезают. Теоретическое рассмотрение этого эффекта дано в [2,4]. Он был обнаружен и экспериментально в некоторых физических системах, например в паре связанных термооптических осцилляторов [7].

На рис. 1 показано устройство плоскости параметров частотная расстройка  $\delta$ –величина связи  $\mu$  системы (1) с выключенным воздействием при  $\lambda = 1$  [8]. На ней обнаруживаются: основная область синхронизации с соотношением частот осцилляторов 1:1, высшие языки взаимной синхронизации осцилляторов, из которых наиболее выражен язык с соотношением частот 1:3, области квазипериодических режимов и характерная область гибели колебаний.

„Включим“ теперь внешнее воздействие. Как и обычно, для неавтономных систем, будем следить за устройством плоскости параметров период  $T$ –амплитуда воздействия  $A$ . Будем постепенно продвигаться по плоскости параметров автономной системы на рис. 1 из основной области синхронизации в область „гибели колебаний“. С этой целью зафиксируем величину связи, и будем постепенно увеличивать



**Рис. 1.** Языки синхронизации, область гибели колебаний и область квазипериодических режимов  $Q$  связанных осцилляторов (1) в отсутствие внешнего воздействия. На вставках: плоскости параметров период  $T$ – амплитуда воздействия  $A$  неавтономной системы (1);  $\mu = 1.3$ ,  $a$  —  $\delta = 4$ ,  $b$  —  $\delta = 4.8$ ,  $c$  —  $\delta = 5$ ,  $d$  —  $\delta = 6$ .

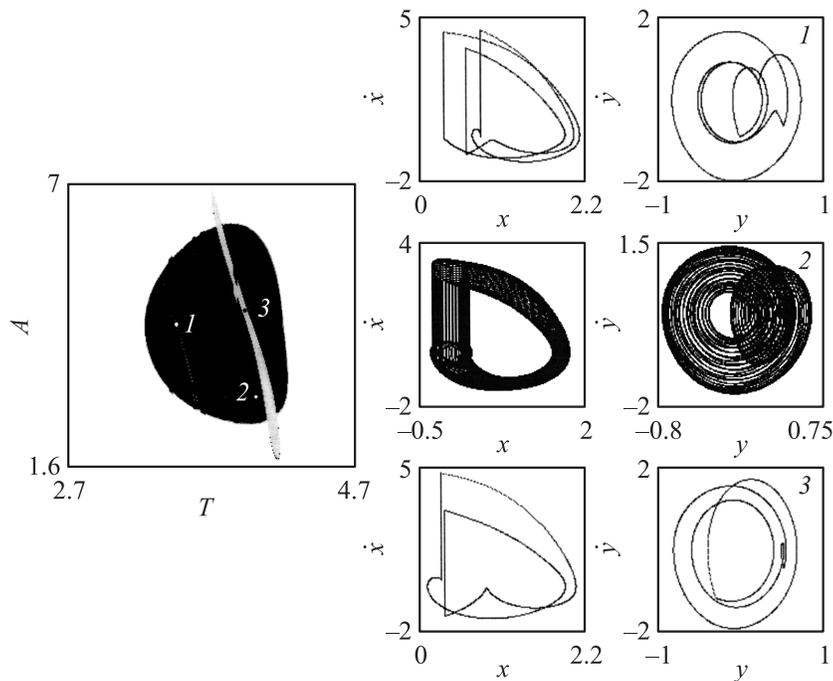
частотную расстройку  $\delta$  второго осциллятора относительно первого. Основной вопрос состоит в том, как проявится на плоскости параметров воздействия переход автономной системы из синхронного режима в режим гибели колебаний?

На рис. 1 на вставках показаны четыре характерные плоскости параметров воздействия  $(T, A)$  системы (1), отвечающие четырем избранным точкам вблизи границы эффекта гибели колебаний. Устройство плоскостей выявлено с помощью метода карт динамических режимов [9], который состоит в том, что численно определяется период режима в сечении Пуанкаре, а затем соответствующая точка плоскости „окрашивается“ в определенный цвет. Сечения Пуанкаре

в неавтономной системе (1) выбирались через период внешнего воздействия. Цветовая палитра выбрана следующим образом: белый цвет отвечает режиму периода 1, светло-серый — 2 и т.д., черный цвет отвечает хаотическим или квазипериодическим режимам. На рис. 1 на вставках можно видеть, что колебательные режимы, причем достаточно разнообразные, сохраняются и внутри области гибели колебаний.

Можно отметить следующие особенности картины. В точке, отвечающей рис. 1, *a*, в автономной системе наблюдается захват частот колебаний осцилляторов с соотношением 1:1. В этом случае картина синхронизации в неавтономном режиме на плоскости  $(T, A)$  в значительной мере аналогична случаю воздействия импульсами на отдельный осциллятор Ван-дер-Поля [10–12]. Соответствие тем лучше, чем больше период воздействия, поскольку в промежутке между импульсами осцилляторы за счет диссипативной связи успевают „подстроить“ режимы колебаний. Некоторое отличие состоит в заметном уменьшении расстояния между вершинами основных языков синхронизации. Это связано с захватом частот первого и второго осцилляторов. Действительно, при  $\delta = 4$ , в соответствии с (1), собственные частоты несвязанных осцилляторов  $\omega_1 = 1$  и  $\omega_2 = \sqrt{1 + \delta} \approx 2.24$ . В режиме синхронизации 1:1 частоты захватываются в окрестности значения  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx 1.62$ , а значит, расстояние между вершинами языков синхронизации периода 1 на рис. 1, *a* должно составлять  $\Delta T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 3.9$ , что находится в хорошем соответствии с рис. 1, *a*.

При продвижении на рис. 1 вдоль выделенной горизонтальной линии в сторону области гибели колебаний, однако, наблюдается существенное изменение картины. С ростом частотной расстройки  $\delta$  в момент перехода в режим гибели колебаний области квазипериодических режимов „отрываются“ от оси нулевой амплитуды воздействия (переход от рис. 1, *a* к рис. 1, *b*). Теперь они отделены от оси областью периода 1. При этом области квазипериодических режимов образуют отдельные изолированные „острова“. При дальнейшем увеличении частотной расстройки осцилляторов острова постепенно уменьшаются в размерах и поэтапно „вымирают“ (переход от рис. 1, *a* к *b* и *c*). Наиболее долгоживущим является остров, отвечающий наименьшему периоду внешнего воздействия. При этом вымирание островов квазипериодических режимов происходит достаточно глубоко внутри области гибели колебаний системы связанных осцилляторов.



**Рис. 2.** Остров квазипериодических режимов, отвечающий режиму гибели колебаний автономной системы, и характерные фазовые портреты. Точка и вставка 2 отвечают квазипериодическому режиму, а 1 и 3 — периодическим режимам, наблюдающимся в окнах, пересекающих остров.

Наиболее крупный „долгоживущий“ остров показан на рис. 2. Представлены также его выделенный фрагмент и несколько характерных фазовых портретов. Точка и вставка 2 отвечают квазипериодическому режиму. Можно видеть, однако, что некоторые из областей периодических режимов, как, например, области периода 3 и 2, образуют очень узкие „окна“, пересекающие остров. Они сформировались из высших языков синхронизации разной кратности при переходе от рис. 1, *b* к *d*. На рис. 2 на вставках 1 и 3 представлены аттракторы для двух этих „окон“. На фазовых портретах первого осциллятора можно видеть соответственно три и два характерных скачка, отвечающих действию внешних импульсов.

Таким образом, при наличии большой диссипативной связи две связанные системы Ван-дер-Поля ведут себя как затухающий осциллятор — демонстрируют режим „гибели колебаний“. Однако внешнее импульсное воздействие даже в этом режиме выявляет присущие системе автоколебательные свойства. На плоскости период–амплитуда воздействия возникают острова квазипериодических режимов, которые окружены системой мелкомасштабных языков синхронизации. При продвижении в глубь области гибели колебаний острова последовательно исчезают. Подчеркнем пороговый характер возникновения квазипериодических движений в режиме гибели колебаний автономных осцилляторов. А именно, для фиксированной частоты воздействия необходима некоторая минимальная величина импульсов, начиная с которой квазипериодический режим возможен. В этом существенное отличие от квазипериодических движений в автоколебательном режиме автономной системы: они возможны при сколь угодно малой амплитуде внешнего сигнала. При этом на плоскости период–амплитуда воздействия ( $T$ ,  $A$ ) возникают „острова“ квазипериодических режимов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-02-16773).

## Список литературы

- [1] Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
- [2] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация, фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
- [3] Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J. // Physica D. 2004. V. 189. P. 8–30.
- [4] Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. // Physica D. 1990. V. 41. P. 403–412.
- [5] Rand R., Holmes. // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1980. V. 15. P. 387–399.
- [6] Кузнецов А.П., Паксютов В.И. // Изв. вузов. ПНД. 2005. Т. 13. № 4. С. 3–19.
- [7] Herrero R., Figueras M., Rius J., Pi F., Orriols G. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. N 23. P. 5312–5315.
- [8] Кузнецов А.П., Паксютов В.И. // Изв. вузов. ПНД. 2003. Т. 11. № 6. С. 48–64.
- [9] Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006.
- [10] Ding E.J. // Physica Scripta. 1988. V. 38. P. 9–16.
- [11] Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. // Изв. вузов. ПНД. 2001. № 6. С. 69–82.
- [12] Glass L., Sun J. // Phys. Rev. 1994. V. 50. N 6. P. 5077–5084.