

01;11

Модель эмиссии с клина в режиме ограничения тока объемным электрическим зарядом

© Г.Ш. Болтачев, Н.М. Зубарев

Институт электрофизики Уро РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 4 апреля 2007 г.

Проведено теоретическое исследование эмиссии электронов с клина в режиме ограничения тока объемным электрическим зарядом. Для описания распределения поля в межэлектродном промежутке предложена простая аналитическая модель, основанная на сшивке автомодельных решений для потока электронов в области острия и на периферии. Для системы „клиновидный катод–плоский анод“ установлена зависимость первенства от угла раствора клина.

PACS: 41.20.Cv, 52.25.Tx

В пионерских работах Чайлда [1] и Ленгмюра [2] был установлен универсальный закон $I \sim U^{3/2}$ (закон „3/2“) где I — электрический ток, ограниченный объемным зарядом, а U — приложенная к межэлектродному промежутку разность потенциалов. Коэффициент пропорциональности, называемый первенсом, зависит от геометрии системы. Существенная нелинейность уравнений, описывающих поток эмитированных электронов, не позволяет дать их решение аналитическими методами в общем случае. Анализ симметрий уравнений показал, что они могут быть сведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) для ряда простейших геометрий катода [3]. Это случаи плоской, цилиндрической и сферической симметрий задачи, а также более сложные случаи, когда катод представляет собой конус либо клин. Последние два случая анализировались в работе [4], в которой соответствующие ОДУ были решены численно. Это позволило получить распределение электрического поля и поля скоростей электронов вблизи острий (см. также [5], где рассматривалась сходная задача для потока ионов). Однако полученные решения соответствуют весьма

специфической геометрии анода, который асимптотически повторяет форму катода. Для такой конфигурации межэлектродного промежутка плотность тока крайне медленно затухает при удалении от особенности (вершины клина либо конуса), что приводит к расходимости полного тока эмиссии и, следовательно, к невозможности определения первеанса системы.

В настоящей работе мы рассмотрим эмиссию с клина для ситуации, когда анод является плоским (он расположен перпендикулярно плоскости симметрии катода). В этом случае ток эмиссии, приходящийся на единицу длины клина, оказывается конечным. Для описания распределения поля в межэлектродном промежутке будет предложена простая аналитическая модель, основанная на сшивке автомодельных решений для потока электронов в области острия и на периферии. В рамках модели удастся найти выражение для первеанса системы, являющегося функцией угла раствора клина.

Рассмотрим поток электронов, эмитируемых с поверхности бесконечно протяженного клина. Будем полагать начальную скорость частиц равной нулю, что соответствует пренебрежению тепловой энергией электронов по сравнению с энергией приобретаемой ими в электростатическом поле. В рамках гидродинамического описания движение электронов в потенциальном электрическом поле ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$) происходит с сохранением циркуляции скорости. Поскольку вблизи поверхности эмиттера циркуляция равна нулю, то движение электронов является потенциальным. Следовательно, как и напряженность электрического поля, скорость потока можно задать с помощью скалярной функции — потенциала скорости: $\mathbf{v} = \nabla\Psi$. В таком случае исходную систему уравнений можно записать в виде

$$\nabla^2\Phi = eN/\varepsilon_0, \quad m(\nabla\Psi)^2/2 = \Phi e, \quad \nabla(N\nabla\Psi) = 0, \quad (1)$$

где N — концентрация заряженных частиц, e — элементарный заряд, m — масса электрона, ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума. Первое уравнение — уравнение Пуассона для потенциала электрического поля. Оно дополняется условиями эквипотенциальности поверхности катода ($\Phi = 0$) и анода ($\Phi = U$), а также для эмиссии в режиме ограничения тока объемным зарядом, условием обращения в нуль напряженности электрического поля на поверхности эмиттера ($\nabla\Phi = 0$). Движение частиц определяется вторым уравнением, имеющим смысл закона сохранения энергии электрона в электростатическом поле. Третье уравнение — уравнение непрерывности потока частиц.

Параметрами модели, характеризующими геометрию электронов, являются расстояние от вершины клина до плоского анода L , длина клина H и угол раствора α . Роль внешнего управляющего параметра играет разность потенциалов между электродами U . Нашей задачей будет при заданных L , H , α и U определить наибольшее возможное значение электрического тока, протекающего через систему, т.е. ток насыщения I .

Перейдем к безразмерным обозначениям заменами:

$$r = \frac{R}{L}, \quad \varphi = \frac{\Phi}{U}, \quad n = N \frac{eL^2}{\varepsilon_0 U}, \quad \psi = \Psi \sqrt{\frac{m}{2eUL^2}}.$$

Тогда в полярных координатах r и θ (полус $r = 0$ совпадает с вершиной клина; боковые грани клина определяются условиями $\theta = \pm\theta_m$, где $\theta_m \equiv \pi - \alpha/2$) система уравнений (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{rr} + r^{-1}\varphi_r + r^{-2}\varphi_{\theta\theta} &= n, \\ \psi_r^2 + r^{-2}\psi_\theta^2 &= \varphi, \end{aligned} \tag{2}$$

$$n_r\psi_r + r^2n_\theta\Psi_\theta + n[\psi_{rr} + r^{-1}\psi_r + r^2\psi_{\theta\theta}] = 0.$$

Эти уравнения инвариантны относительно масштабных преобразований, вследствие чего система (2) допускает следующую автомодельную замену [3,4]:

$$\varphi = r^\gamma A(\theta), \quad n = r^{\gamma-2} B(\theta), \quad \psi = r^{\gamma/2+1} C(\theta), \tag{3}$$

где γ — некоторая константа. Эта замена согласуется с условиями эквипотенциальности граней клина и полной экранировки поля на них: $\varphi|_{\theta=\pm\theta_m} = \varphi_\theta|_{\theta=\pm\theta_m} = 0$. С условием эквипотенциальности анода замена (3) в общем случае не согласуется. Тем не менее автомодельные решения играют важную роль в рассматриваемой задаче. Дело в том, что вблизи острия, т. е. при $r \ll 1$, анод оказывает пренебрежимо малое влияние на распределение поля, и оно вполне описывается в рамках решений (3) с показателем автомодельности γ , зависящим от угла раствора клина α . На периферии, т. е. в пределе $r \gg 1$, решения снова становятся автомодельными с показателем автомодельности $\gamma = 0$. Это связано с тем, что в этом пределе положение анода определяется простыми соотношениями $\theta = \pm\pi/2$, и условие его эквипотенциальности не нарушает симметрию.

Таким образом, в двух областях — вблизи острия (область I) и на периферии (область II) рассмотрение исходных уравнений в частных производных (2) с необходимыми граничными условиями можно свести к анализу ОДУ. В промежуточной области $r \approx 1$, где не удается получить решения аналитическими методами, мы будем использовать сшивку решений, соответствующих пределам $r \ll 1$ и $r \gg 1$.

При использовании подстановки (3) из уравнений (2) получается следующая система ОДУ для определения угловых распределений $A(\theta)$, $B(\theta)$ и $C(\theta)$:

$$\begin{aligned} \gamma^2 A + A_{\theta\theta} - B &= 0, \\ (\gamma/2 + 1)^2 C^2 + C_\theta^2 - A &= 0, \\ (3\gamma/2 - 1)(\gamma/2 + 1)BC + B_\theta C_\theta + BC_{\theta\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом симметрии задачи относительно плоскости $\theta = 0$, для области I эти уравнения следует решать на интервале $0 \leq \theta \leq \theta_m$ с граничными условиями

$$A(0) = 1, \quad A_\theta(0) = A_\theta(\theta_m) = A(\theta_m) = 0 \quad (5)$$

и для области II на интервале $\pi/2 \leq \theta \leq \theta_m$ с условиями

$$A(\pi/2) = 1, \quad A_\theta(\theta_m) = A(\theta_m) = 0. \quad (6)$$

Число условий (5) превосходит число условий (6), поскольку в области I они задают связь параметра автомодельности γ и угла раствора α , а в области II априори полагается $\gamma = 0$.

Несложно заметить, что вблизи поверхности клина $\theta = \theta_m$ основной порядок разложения амплитуды A по малому параметру $\theta_m - \theta$ имеет вид: $A \approx p(\theta_m - \theta)^{4/3}$. Положим $p = p_1(\alpha)$ для области I и $p = p_2(\alpha)$ для области II. В результате численного решения уравнений (4) с условиями (5) и (6) определены функции $\gamma(\alpha)$, $p_1(\alpha)$, и $p_2(\alpha)$, которые в дальнейшем используются для нахождения зависимости первеанса системы от угла раствора α . В интересующем нас диапазоне $0 < \alpha < \pi$ результаты численных расчетов аппроксимированы выражениями:

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha) &\approx 4/3 - 1.203\xi + 0.522\xi^3, \quad p_1(\alpha) \approx 1 - 1.397\xi + 0.326\xi^2, \\ p_2(\alpha) &\approx \chi^{-4/3}(1 - 0.031\chi^2), \end{aligned}$$

где $\xi = (\pi - \alpha)/(2\pi - \alpha)$ и $\chi = (\pi - \alpha)/2$. Погрешности представленных аппроксимаций не превосходят 0.3%.

Плотность тока у поверхности катода в области I определяется выражением

$$j = r^{-1}(n\psi_\theta)|_{\theta=0} = r^{3\gamma/2-2}(BC_\theta)|_{\theta=0}.$$

Ток из области острия J_1 получим интегрированием по интервалу $0 < r < 1$ (отметим, что интеграл расходится при $r \rightarrow \infty$):

$$J_1 = \frac{4(BC_\theta)|_{\theta=0}}{3\gamma(\alpha) - 2} = \frac{16}{9} \frac{p_1^{3/2}(\alpha)}{3\gamma(\alpha) - 2}.$$

Рассмотрим теперь периферийную область клина. Плотность тока у поверхности катода задается следующим выражением:

$$j = \frac{(n\psi_\theta)|_{\theta=0}}{r + 1/\sin\theta_m} = \frac{(BC_\theta)|_{\theta=0}}{(r + 1/\sin\theta_m)^2}.$$

Здесь $1/\sin\theta_m$ задает расстояние от вершины клина до точки пересечения анода и продолжения грани катода (в эту точку удобно перенести начало координат при анализе области II). Периферийный ток J_2 получим интегрированием в области $r > 1$:

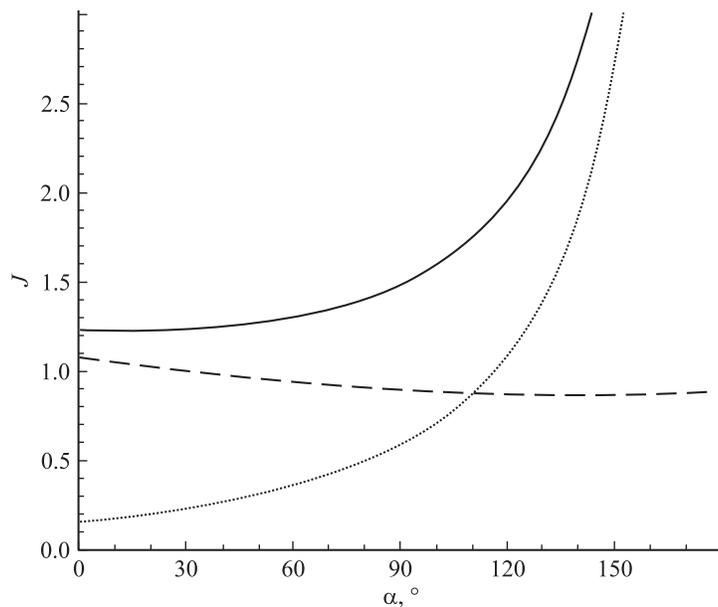
$$J_2 = \frac{2(BC_\theta)|_{\theta=0}}{1 + 1/\cos(\alpha/2)} = \frac{8}{9} \frac{p_2^{3/2}(\alpha)}{1 + 1/\cos(\alpha/2)}.$$

Зависимость суммарного тока $J = J_1 + J_2$, а также токов J_1 и J_2 от угла раствора клина приведена на рисунке. Из него видно, что вклад тока из области I увеличивается по сравнению со вкладом периферийного тока при заострении клина. Это связано с увеличением напряженности поля в окрестности острия при уменьшении α . Полный ток оказывается финитен за исключением тривиального случая $\alpha = \pi$, соответствующего плоскому бесконечному катоду.

Возвращаясь к размерным обозначениям, получим, что для полного тока с клина длиной H выполняется закон „3/2“: $I = PU^{3/2}$, где P — искомый первеанс системы, который пропорционален величине $J(\alpha)$:

$$P = \frac{H}{L} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} J(\alpha), \quad J(\alpha) = \frac{8}{9} \left[\frac{p_1^{3/2}(\alpha)}{3\gamma(\alpha)/2 - 1} + \frac{p_2^{3/2}(\alpha)}{1 + 1/\cos(\alpha/2)} \right].$$

Итак, использование частных автомодельных решений уравнения движения для потока электронов позволило построить аналитическую модель, описывающую эмиссию с клина в режиме ограничения тока



Угловые зависимости безразмерных полного тока J (сплошная линия), тока из области острия J_1 (штриховая линия) и тока с периферии J_2 (пунктир).

объемным электрическим зарядом. Получено выражение для первенаса системы, задающее его зависимость от угла раствора клина.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-02-96035), президента РФ (проект МД-2553.2007.2) и Фонда содействия отечественной науке.

Список литературы

- [1] Child C.D. // Phys. Rev. 1911. V. 32. P. 492.
- [2] Langmuir I. // Phys. Rev. 1913. V. 2. P. 450.
- [3] Кирштейн П., Кайно Г., Уотерс У. Формирование электронных пучков. М.: Мир, 1970. 600 с.
- [4] Finn J.M., Antonsen T.M., Manheimer W.M. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1988. V. 16. P. 281.
- [5] Boltachev G.Sh., Zubarev N.M. // Europhysics Letters. 2006. V. 76. P. 36.