

01;09

## Относительная энтропия как мера степени перемешивания зашумленных систем

© В.С. Анищенко, С.В. Астахов

Саратовский государственный университет  
E-mail: astakhovsv@chaos.ssu.runnet.ru

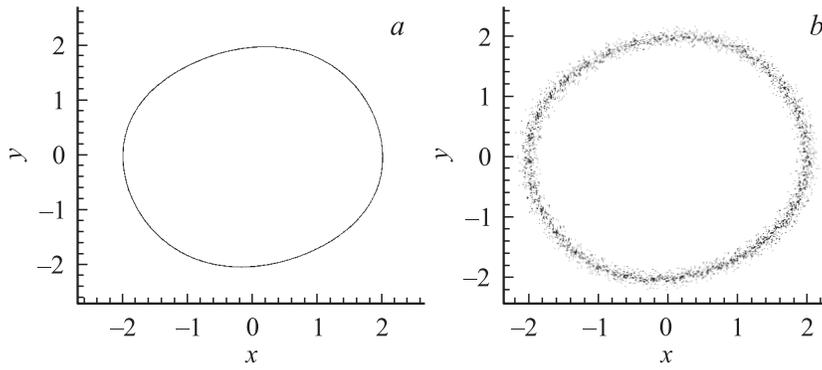
Поступило в Редакцию 30 марта 2007 г.

Вводится новое понятие относительной метрической энтропии, которое позволяет производить количественную оценку свойства перемешивания хаотических систем, находящихся под внешним шумовым воздействием. Показано, что в отсутствие шума относительная метрическая энтропия представляет собой оценку снизу энтропии Колмогорова динамической системы.

PACS: 05.45.-a

Стохастические системы и процессы характеризуются эффектом перемешивания траекторий в фазовом пространстве системы, что определяет конечность предсказуемости эволюции во времени. Фундаментальным результатом теории динамических систем явилось введение Колмогоровым понятия энтропии динамических систем, т.е. систем с детерминированным оператором эволюции [1]. Было строго обосновано, что в хаотических системах энтропия Колмогорова характеризуется конечной положительной величиной, что обосновывает спад корреляции во времени и конечность предсказуемости в режиме хаоса. Для случайных процессов, например для белого шума, энтропия Колмогорова бесконечна, что означает отсутствие предсказуемости процесса.

С точки зрения строгой теории по Колмогорову, динамические системы могут иметь устойчивые регулярные режимы с нулевой энтропией и хаотические режимы с положительной и конечной величиной



**Рис. 1.** Фазовые портреты генератора Ван-дер-Поля в отсутствие внешнего шумового воздействия (а) и под действием белого гауссова шума интенсивности  $D = 0.001$  (b).

энтропии. В случае добавления в систему внешнего шума энтропия бесконечна. Последний случай представляется наиболее интересным с точки зрения практики, так как подавляющее число динамических систем функционирует в условиях шумового (неустраняемого) воздействия. Этот случай и является предметом обсуждения настоящей работы.

Для выяснения сути данной научной проблемы рассмотрим простейший пример, предельный цикл в уравнениях Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \xi(t), \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  — параметр нелинейности или возбуждения,  $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ,  $f_0 = \frac{1}{T_0}$  — частота колебаний,  $\xi(t)$  — белый  $\delta$ -коррелированный шум интенсивности  $D$ . В отсутствие шума ( $D = 0$ ) для  $0 < \varepsilon < 1$  система (1) имеет решение в виде устойчивого квазигармонического колебания частоты  $\omega_0$  и амплитуды  $A \sim \sqrt{\varepsilon}$ . На рис. 1, а изображен фазовый портрет предельного цикла в отсутствие шума для  $\varepsilon = 0.1$ . Добавление шума переводит систему (1) в класс стохастических, и решению в этом случае отвечает „зашумленный предельный цикл“, показанный на рис. 1, b.

В случае рис. 1, а решение  $x(t) \cong A_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$  характеризуется полной предсказуемостью и имеет соответственно нулевую энтропию

Колмогорова. В случае рис. 1,  $b$  система стохастическая и теоретически характеризуется бесконечным значением энтропии Колмогорова. Что это значит? Это означает, что точное предсказание  $x(t)$  для  $t > t_0$  отсутствует. Действительно, это так. Однако если нас интересует предсказание с конечной точностью, обусловленной точностью экспериментальных измерений, то положение дел меняется. Предположим, что нас не интересуют различия  $x(t)$  и  $x(t) + \Delta$ , где  $\Delta$  — точность регистрации, характеризующая, к примеру, ошибку в пределах 5%. Усреднив результаты рис. 1,  $b$  в пределах заданной точности, мы получим предельный цикл, эволюцию траекторий на котором на некоторое время мы сможем предсказывать с некоторой точностью. Другими словами, степень предсказуемости становится конечной, и в этом смысле энтропия Колмогорова также должна стать конечной. Ясно, что здесь речь идет о другом понимании и другом определении энтропии Колмогорова, которую мы будем называть относительной энтропией.

Непосредственный расчет энтропии Колмогорова не представляется возможным, поэтому широко используют методы ее оценки. Рассмотрим один из таких методов, базирующийся на анализе Recurrence Plots [2,3].

Рассмотрим объем  $G$  фазового пространства, включающий в себя аттрактор системы. Произведем разбиение этого объема на ячейки с характерным размером  $\varepsilon$  и будем следить за траекторией, отмечая номера ячеек, в которых находится изображающая точка через равные интервалы времени  $\tau$ . Для конечного времени наблюдения мы можем получить множество последовательностей  $G_n$  и определить на этом множестве вероятностную меру  $P(G_n)$ . Для оценки энтропии Колмогорова используется следующая величина [2]:

$$K_2 = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \ln \sum_{l=1}^N P(G_l)^2. \quad (2)$$

Пусть динамическая система представлена траекторией  $\{\mathbf{x}_j\}$ ,  $i = 1, \dots, N$  в  $d$ -мерном фазовом пространстве. Определим матрицу

$$R_{i,j} = \Theta(\varepsilon - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)i, j = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  — определенный порог, а  $\Theta$  — функция Хэвисайда. Графическое представление матрицы  $R_{i,j}$  называется Recurrence Plot (RP) и получается путем обозначения 1 черной точкой, а 0 — белой. Вероятность

обнаружения черной точки в RP равна

$$P_b(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N R_{i,j}, \quad (4)$$

вероятность обнаружения диагонали длиной как минимум  $l$  черных точек

$$P_\varepsilon^c(l) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \prod_{k=0}^{l-1} R_{i+k,j+k}. \quad (5)$$

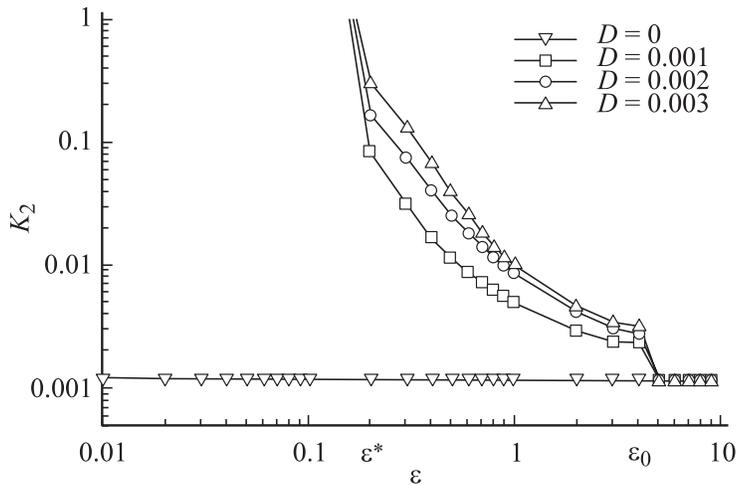
В предположении эргодичности, что справедливо для систем с перемешиванием, вероятность (5) можно поставить в соответствие квадрату вероятности  $P(G_l)$  в выражении (2). Таким образом, оценку энтропии Колмогорова снизу можно получить из Recurrence Plot по формуле:

$$\tilde{K}_2 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l\tau} \ln \left( \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \prod_{k=0}^{l-1} R_{i+k,j+k} \right), \quad (6)$$

т. е. искомое значение в данном случае имеет смысл тангенса угла наклона гистограммы длин диагоналей, построенной в логарифмическом масштабе.

Итак, произведем расчеты  $\tilde{K}_2(\varepsilon)$  в соответствии с алгоритмом (6) для уравнений Ван-дер-Поля (1). Результаты приведены на рис. 2 для различных значений интенсивности шума  $D$ , включая  $D = 0$ . Как и ожидалось, в отсутствие шума относительная энтропия динамической системы (1) равна нулю.<sup>1</sup> При  $D \neq 0$  результаты рис. 2 свидетельствуют о двух эффектах. Первый отражает ожидаемый факт:  $\tilde{K}_2(\varepsilon)$  стремится к бесконечности в случае малых  $\varepsilon < \varepsilon^*$ . С уменьшением масштаба разрешения поведение зашумленной системы становится непредсказуемым и характеризуется сколь угодно большим значением энтропии  $\tilde{K}_2$ . Второй эффект имеет место в области  $\varepsilon^* < \varepsilon < \varepsilon_0$  и свидетельствует о том, что, во-первых, энтропия зашумленной системы здесь имеет конечную величину, которая тем больше, чем больше интенсивность шума. И во-вторых, при стремлении  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  энтропия зашумленной системы стремится к нулевому уровню, т. е. к уровню энтропии системы

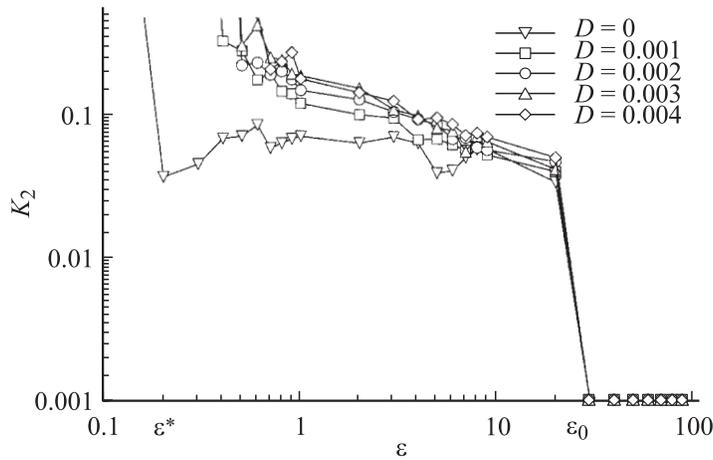
<sup>1</sup> Полученная величина на уровне 0.002–0.004 объясняется ограниченной точностью численного метода.



**Рис. 2.** Зависимости  $\hat{K}_2(\varepsilon)$  для генератора Ван-дер-Поля под действием белого шума различной интенсивности  $D$ .

в отсутствие внешнего шума. Оба указанных фактора очень важны и могут быть объяснены следующим образом. В области  $\varepsilon^* < \varepsilon < \varepsilon_0$  разрешающая способность оценки энтропии достаточно высока, но конечна. Алгоритм (6) позволяет в этой области диагностировать наличие положительной, но конечной величины энтропии. Граничное значение  $\varepsilon = \varepsilon_0$  является максимальной величиной  $\varepsilon$ , при достижении которой алгоритм (6) не фиксирует наличие перемешивания. Действительно, при достаточно больших  $\varepsilon$  масштаб разрешения, по сути дела, не дает возможности наблюдать перемешивание, которое осуществляется только внутри элементов фазового объема с характерным размером  $\varepsilon_0$ .

Постараемся объяснить то, что описанный выше результат не является частным случаем, а носит фундаментально общий характер. С этой целью рассмотрим зашумленные системы, которые в отсутствие шума реализуют режим детерминированного хаоса. Если наши предположения об общности установленного эффекта верны, то мы получим результат, качественно эквивалентный данным рис. 2, который для значения  $\varepsilon = \varepsilon_0$  дает нам величину энтропии Колмогорова динамической системы ( $D = 0$ ).



**Рис. 3.** Зависимости  $\tilde{K}_2(\varepsilon)$  для системы Ресслера под действием белого шума различной интенсивности  $D$ .

Хаотическая система Ресслера [4] имеет следующий вид:

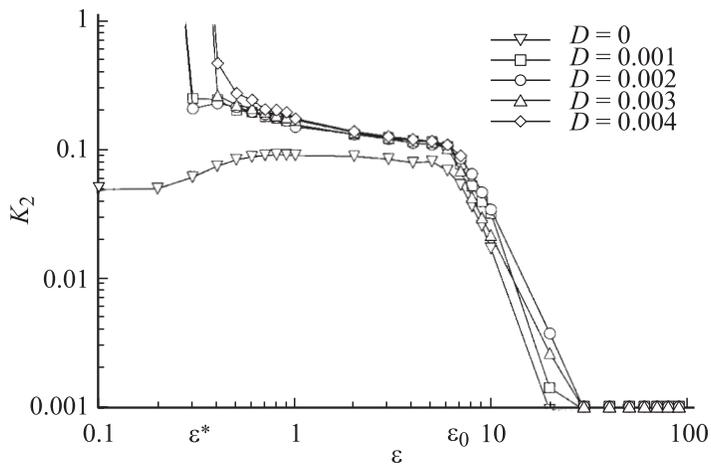
$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - m), \end{cases} \quad (7)$$

здесь  $x$ ,  $y$  и  $z$  — динамические переменные системы,  $a$ ,  $b$  и  $m$  — управляющие параметры, значения которых были выбраны следующим образом:  $a = b = 0.2$ ,  $m = 5.7$ , что соответствует режиму спирального хаоса в системе. Белый шум  $\xi(t)$  добавлен в систему следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z + \sqrt{2D}\xi(t), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - m), \end{cases} \quad (8)$$

где  $D$  определяет интенсивность шума.

Результаты расчета относительной метрической энтропии системы (8) представлены на рис. 3. Как видно из рисунка, предположение об общности оказалось верным: значение  $\tilde{K}_2(\varepsilon_0)$  дает величину,



**Рис. 4.** Зависимости  $\hat{K}_2(\varepsilon)$  для генератора Анищенко–Астахова под действием белого шума различной интенсивности  $D$ .

оценивающую энтропию Колмогорова динамической системы (7) при всех рассмотренных значениях интенсивности шума  $D$ . С увеличением интенсивности шумового воздействия возрастает наклон плато от  $\varepsilon^*$  до  $\varepsilon_0$  в зависимости  $\hat{K}_2(\varepsilon)$ , таким образом величина относительной метрической энтропии остается конечной и возрастает с увеличением интенсивности шума в системе. Аналогичные результаты (рис. 4) дает генератор Анищенко–Астахова [5] в режиме спирального хаоса под действием белого гауссова шума:

$$\begin{cases} \dot{x} = mx + y - xz + \sqrt{2D\xi(t)}, \\ \dot{y} = -x, \\ \dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \end{cases} \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь  $x, y, z$  — динамические переменные,  $m = 1.75, g = 0.3$  — управляющие параметры.

Любая физическая система находится под действием неустранимых внутренних и внешних шумов. Однако собственные свойства перемешивания хаотической системы практически не претерпевают ощутимых

изменений при добавлении в систему шума малой интенсивности. Если в качестве количественной характеристики степени перемешивания в системе выбирать энтропию Колмогорова, то добавление шума сколь угодно малой, но конечной интенсивности обращает ее в бесконечность, хотя свойства физической системы остаются практически неизменными. Поэтому представляется более правильным в качестве меры степени перемешивания в системе, меры ее хаотичности, использовать относительную метрическую энтропию, учитывающую добавку к энтропии Колмогорова системы без шума, которая тем больше, чем больше интенсивность шумового воздействия. В перспективе представляется интересным анализ величины относительной метрической энтропии. В частности, по зависимости  $\hat{K}_2(\varepsilon)$  становится возможным произвести оценку энтропии Колмогорова динамической системы по данным, полученным для той же системы, находящейся под действием шума.

В заключение хотелось бы поблагодарить профессора Т.Е. Вадивасову за полезные обсуждения, касающиеся рассмотренной темы.

## Список литературы

- [1] Колмогоров А.Н. // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 754.
- [2] Faure Ph., Korn H. // Physica D. 1998. V. 122. P. 265.
- [3] Thiel M., Romano M.C., Kurts J. // Izv. VUZ. AND. 2003. V. 11. N 3.
- [4] Rossler O.E. // Phys. Lett. A. 1976. V. 35. P. 397–398.
- [5] Anishchenko V. Dynamical Chaos. Models and Experiments. World Scientific. Singapore, 1995.