

09

Переход к фазовой синхронизации в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на систему с периодической динамикой

© О.И. Москаленко

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru

Поступило в Редакцию 24 января 2007 г.

Исследовано перемежающееся поведение вблизи границы фазовой синхронизации при воздействии внешнего хаотического сигнала на автоколебательную систему с периодической динамикой. Показано, что в этом случае имеет место тот же самый сценарий, что и в случае взаимодействия двух связанных хаотических осцилляторов.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq, 05.45.Xt

Перемежающееся поведение характерно для систем различной природы и является универсальным явлением. В частности, перемежаемость является одним из классических сценариев при переходе от периодических колебаний к хаотическим [1–3]. При этом сигнал представляет собой чередующуюся последовательность регулярных (ламинарных) фаз и хаотических всплесков (турбулентных фаз). При увеличении управляющего параметра турбулентные всплески становятся все более частыми до тех пор, пока движение полностью не хаотизируется. В зависимости от характера потери устойчивости периодическим режимом (определяемого мультипликаторами предельного цикла) различают перемежаемость типов I–III [4].

Перемежающееся поведение наблюдается также вблизи границ различных режимов хаотической синхронизации, в связи с чем выделяют перемежающуюся фазовую [5,6], перемежающуюся обобщенную [7] синхронизацию и перемежающуюся синхронизацию с запаздыванием [8]. Для перемежающегося поведения существует определенная классификация. Переход к обобщенной синхронизации и синхронизации с запаздыванием характеризуется как перемежаемость on–off

типа [7,8]; при переходе к фазовой синхронизации в зависимости от величины расстройки управляющих параметров имеет место либо перемежаемость типа I и так называемая перемежаемость „игольного ушка“ (eyelet intermittency) [5,9], либо перемежаемость „кольца“ (ring intermittency) [6].

В последнее время внимание исследователей направлено на изучение перемежающегося поведения вблизи границы возникновения фазовой синхронизации (см., например, [5,6,9–11]). Для диагностики фазовой синхронизации [12–14] традиционно вводят в рассмотрение фазу $\varphi_{1,2}(t)$ сигналов взаимодействующих осцилляторов (или фазы сигнала осциллятора и внешнего воздействия) и говорят о ее наличии в том случае, если выполняется условие захвата фаз:

$$|\Delta\varphi(t)| = |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| < \text{const}. \quad (1)$$

Вблизи порога возникновения фазовой синхронизации наблюдается перемежающееся поведение. В этом случае зависимость разности фаз от времени характеризуется наличием участков синхронного поведения (ламинарных фаз), прерываемых внезапными скачками, когда значения разности фаз меняются на величину 2π (турбулентные фазы).

При определении сценариев перехода к режиму фазовой синхронизации играет роль статистика длительностей ламинарных фаз. В случае малых значений частотной расстройки она является различной для систем с периодической и хаотической динамикой. В частности, в случае связанных или вынужденных колебаний осцилляторов, демонстрирующих периодическое поведение, переходу к фазовой синхронизации соответствует седло-узловая бифуркация, а распределение средней длительности ламинарных фаз в зависимости от параметра надкритичности подчиняется степенному закону с показателем степени „ $-1/2$ “, который имеет место в случае перемежаемости типа I [4,11]:

$$\langle l \rangle \sim |P - P_c|^{-1/2}, \quad (2)$$

где P — сила связи или частота внешнего сигнала, P_c соответствует точке перехода к режиму фазовой синхронизации.

Для хаотических систем ситуация несколько меняется. И в случае воздействия внешнего гармонического сигнала на хаотический осциллятор, и в случае взаимных колебаний хаотических систем степенной закон, имеющий место при перемежаемости типа I, выполняется только

в ограниченной области по параметру надкритичности, вдали от точки перехода к режиму фазовой синхронизации, в то время как вблизи нее ламинарные фазы становятся очень длинными, а их распределение подчиняется закону

$$\langle l \rangle \sim \exp(k|P - P_c|^{-1/2}), \quad (3)$$

где k — некоторая константа. Такой тип перемежаемости был назван в работе [5] перемежаемостью „игольного ушка“.

Таким образом, для систем, демонстрирующих хаотическое поведение, независимо от характера внешнего сигнала, периодический он или хаотический, переход к фазовой синхронизации сопровождается последовательностью двух типов перемежаемости. Для систем с периодической динамикой известно лишь о наличии перемежаемости типа I в случае воздействия на них внешнего гармонического сигнала. В то же самое время влияние внешнего хаотического сигнала на перемежающееся поведение таких систем до сих пор исследовано не было. Представляется интересным вопрос о том, какие типы перемежаемости наблюдаются в этом случае? Оказывает ли вообще влияние характер внешнего сигнала на сценарии перехода к режиму хаотической фазовой синхронизации? Или они обусловлены только динамикой самой (ведомой) системы?

Для ответа на эти вопросы проведем исследование классического автогенератора Ван-дер-Поля под внешним хаотическим воздействием со стороны системы Ресслера:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(-\omega y - z), \\ \dot{y} &= \alpha(\omega x + ay), \\ \dot{z} &= \alpha(p + z(x - c)), \\ \ddot{u} - (\lambda - u^2)\dot{u} + u &= \varepsilon(Dy - \dot{u}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $a = 0.15$, $p = 0.2$ и $c = 10$ — управляющие параметры системы Ресслера, $\omega = 0.9689$ характеризует собственную частоту колебаний в этой системе, $\lambda = 0.1$ — единственный управляющий параметр в автогенераторе Ван-дер-Поля, параметр α введен для того, чтобы изменить характерный временной масштаб колебаний в системе Ресслера (по аналогии с [15]), $D = 0.0664$ выбран таким образом, чтобы амплитуды

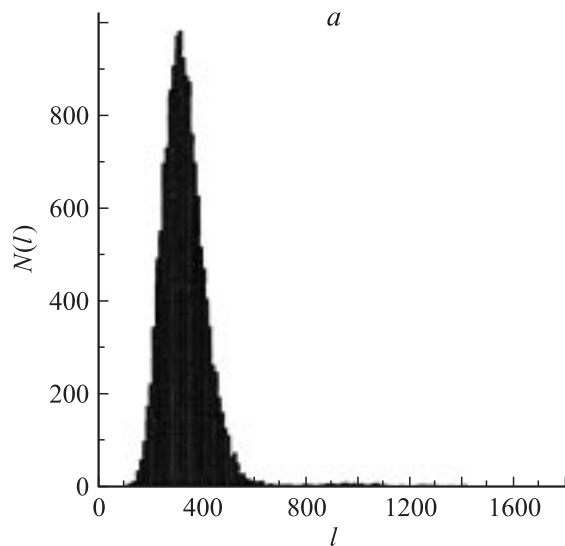


Рис. 1. Распределения длительностей ламинарных фаз $N(l)$ (*a*) вдали ($\varepsilon = 0.01$) и (*b*) вблизи ($\varepsilon = 0.02$) границы фазовой синхронизации. Во втором случае вертикальная ось приведена в логарифмическом масштабе. Сплошная линия — экспоненциальная функция с показателем -0.0004 . Видно, что вдали от области синхронизации распределение является гауссовым, а вблизи нее подчиняется экспоненциальному закону.

компонент фурье-спектров автогенератора Ван-дер-Поля и внешнего сигнала в автономном режиме примерно совпадали, ε характеризует величину связи между системами. При выбранных значениях управляющих параметров и $\alpha = 1$ основные частотные компоненты в фурье-спектрах систем Ресслера и Ван-дер-Поля совпадают, что соответствует нулевой расстройке частот между взаимодействующими системами. Выберем $\alpha = 0.99$, чтобы задать слабую расстройку осцилляторов, и исследуем, как происходит переход к фазовой синхронизации в такой системе.

Величина параметра связи, соответствующая порогу возникновения режима фазовой синхронизации в системе (4) при выбранных значениях управляющих параметров, равна $\varepsilon_c = 0.023$. При $\varepsilon < \varepsilon_c$ режим хаотической фазовой синхронизации разрушается, в системе наблюдается

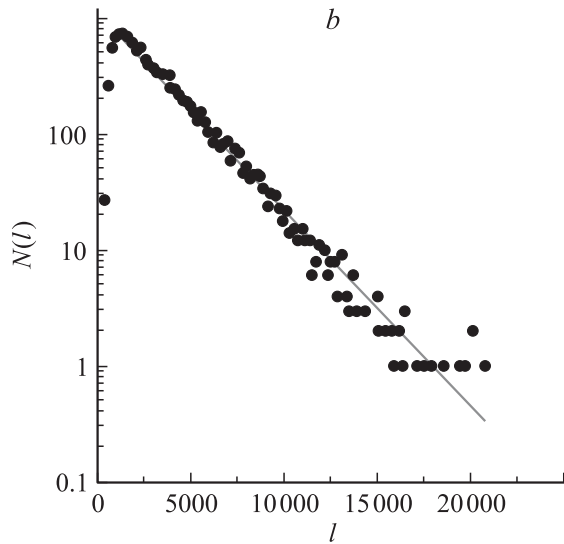


Рис. 1 (продолжение).

перемежающееся поведение. Чтобы определить тип перемежаемости, по аналогии с [9] перейдем к анализу статистических характеристик длительностей ламинарных фаз l вблизи и вдали от ε_c . На рис. 1 приведены распределения длительностей ламинарных фаз $N(l)$ при $\varepsilon = 0.01$ (*a*) и $\varepsilon = 0.02$ (*b*). Число анализируемых фаз в обоих случаях примерно составило 10 000.

Вдали от области синхронизации длительность ламинарных фаз практически не меняется. В этом случае распределение напоминает гауссово (рис. 1, *a*). Можно предположить, что при достаточно слабой связи в системе (4) имеет место перемежаемость типа I. Вблизи границы фазовой синхронизации, как и в случае двух связанных хаотических осцилляторов (см., например, [9]), ламинарные фазы становятся очень длинными, причем их длительность меняется с течением времени достаточно сильно. Как видно из рис. 1, *b* такое распределение подчиняется экспоненциальному закону. В этом случае имеет место перемежаемость „игольного ушка“ [9].

Теперь рассмотрим, как меняется средняя длительность ламинарных фаз при изменении параметра связи ε между системами. На рис. 2

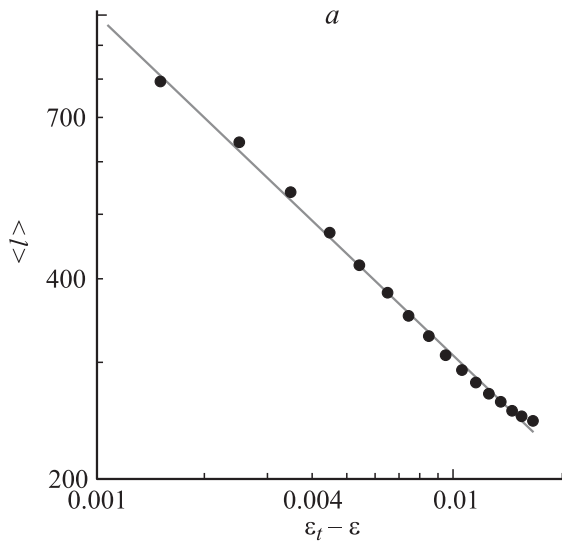


Рис. 2. Распределения средней длительности ламинарных фаз в зависимости от параметра надкритичности: *a* — $\langle l \rangle$ от $(\varepsilon_t - \varepsilon)$, график построен в двойном логарифмическом масштабе, и *b* — $\ln \langle l \rangle$ от $(\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2}$. Сплошные линии соответствуют теоретическим зависимостям $\langle l \rangle \sim (\varepsilon_t - \varepsilon)^{-1/2}$ и $\langle l \rangle \sim \exp(0.237(\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2})$ для $\varepsilon_t = 0.0185$ и $\varepsilon_c = 0.023$ соответственно.

приведены зависимости средней длительности ламинарных фаз $\langle l \rangle$ от параметра надкритичности $(\varepsilon^* - \varepsilon)$, где $\varepsilon^* = \varepsilon_c$ — момент перехода к режиму фазовой синхронизации или $\varepsilon^* = \varepsilon_t \approx 0.0185$ — переход от перемежаемости типа I к перемежаемости „игольного ушка“ (распределение перестает быть гауссовым, ламинарные фазы становятся нерегулярными). Видно, что при $\varepsilon \lesssim \varepsilon_t$ выполняется степенной закон $\langle l \rangle \sim (\varepsilon_t - \varepsilon)^{-1/2}$ (рис. 2, *a*; график построен в двойном логарифмическом масштабе), в то время как для $\varepsilon_t \lesssim \varepsilon < \varepsilon_c$ имеет место следующая закономерность: $\langle l \rangle \sim \exp(k(\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2})$, где k — некоторый коэффициент пропорциональности (на рис. 2, *b* по аналогии с [11] приведена зависимость $\ln(1/\langle l \rangle)$ от $(\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2}$). Аналогичные законы наблюдаются при любых значениях параметра $0.98 \lesssim \alpha \lesssim 1.02$ и с точностью до замены переменных соответствуют зависимостям (2) и (3) соответственно.

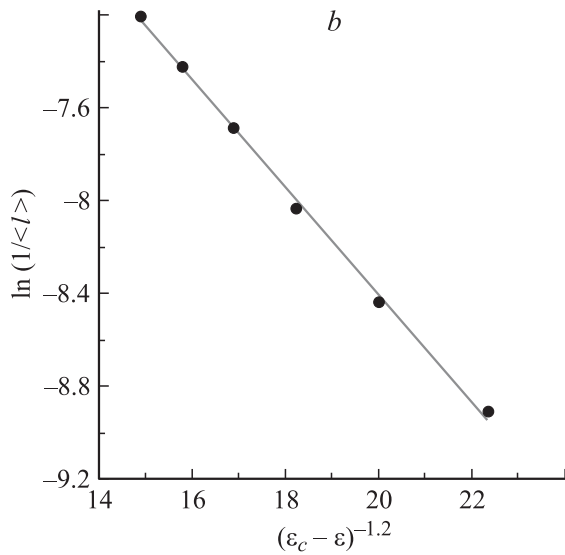


Рис. 2 (продолжение).

Таким образом, можно заключить следующее. При воздействии внешнего хаотического сигнала на систему с периодической динамикой возникновению режима хаотической фазовой синхронизации предшествует перемежающееся поведение. Как и в случае связанных хаотических систем, в случае малых значений частотной расстройки различные типы перемежаемости имеют место вблизи и вдали от порога возникновения синхронного режима. Анализ статистических характеристик длительностей ламинарных фаз показывает, что по аналогии с известными ранее случаями перемежаемость типа I наблюдается вдали от точки перехода к режиму фазовой синхронизации, в то время как вблизи нее имеет место перемежаемость „игольного ушка“.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-02-16273), Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ 4167.2006.2) и НОЦ „Нелинейная динамика и биофизика“ СГУ (CRDF REC-006).

Автор благодарит также за финансовую поддержку Фонд некоммерческих программ «Династия» и Международный центр фундаментальной физики (г. Москва).

Список литературы

- [1] *Manneville P., Pomeau Y.* // Phys. Lett. A. 1979. V. 75. P. 1.
- [2] *Pomeau Y., Manneville P.* // Commun. Math. Phys. 1980. V. 74. P. 189.
- [3] *Bergé P., Pomeau Y., Vidal C.* L'Ordre Dans Le Chaos. Hermann, Paris, 1988.
- [4] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
- [5] *Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. N 1. P. 47–50.
- [6] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 114101.
- [7] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Europhysics Lett. 2005. V. 70. N 2. P. 169–175.
- [8] *Boccaletti S., Valladares D.L.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. N. 5. P. 7497–7500.
- [9] *Lee K.J., Kwak Y., Lim T.K.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. N 2. P. 321–324.
- [10] *Rosa E., Ott E., Hess M.H.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. N 8. P. 1642–1645.
- [11] *Boccaletti S., Allaria E., Meucci R., Arecchi F.T.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. N 19. P. 194101.
- [12] *Пиковский А.С., Розенблум М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
- [13] *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. N 3. P. 2353–2361.
- [14] *Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. В. 1. С. 21–29.
- [15] *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. N 5. P. R4508–R4511.