

01;03

О нелинейных моделях для корреляций „давление—скорости деформаций“ в турбулентном потоке

© С.Р. Богданов

Карельский государственный педагогический университет, Петрозаводск
E-mail: sbogdanov@onego.ru

Поступило в Редакцию 12 февраля 2007 г.

Приведены простые неравенства, позволяющие осуществить непосредственную проверку адекватности нелинейных моделей для быстрой части тензора корреляций „давление—скорости деформаций“. На примере квадратичной модели показано, что в значительной части физического домена эти модели нельзя считать приемлемыми: нарушается условие неотрицательной определенности спектральной матрицы двухточечных корреляций пульсационной скорости. Границы „запретных“ зон при этом оказываются даже шире, чем в случае классических линейных моделей.

PACS: 47.27.-i, 47.27.E-

При расчетах турбулентных течений широко применяются модели, основанные на использовании уравнений переноса для напряжений Рейнольдса $\tau_{ij} \equiv \langle u_i u_j \rangle$. При этом, однако, для некоторых слагаемых в этих уравнениях приходится использовать полуэмпирические аппроксимации, которые ограничивают область применимости моделей, а в ряде случаев приводят к решениям, не имеющим физического смысла. В частности, может происходить нарушение условия реализуемости $\det \tau_{ij} \geq 0$.

В значительной степени это относится к слагаемым, описывающим корреляции „давление—скорости деформаций“, особенно „быстрой“ (индуцированной средними скоростями деформаций) их части $\Phi_{ij}^{(r)}$:

$$\Phi_{ij}^{(r)} = 2U_{lm} \int (F_{mj} \theta_i \theta_i + F_{im} \theta_i \theta_j) d\mathbf{k}. \quad (1)$$

Здесь $U_{ij} \equiv \partial U_i / \partial x_j$ — тензор средних скоростей деформаций; U и u — соответственно средняя и пульсационная скорости, $\theta \equiv \mathbf{k}/k$, \mathbf{k} — волновой вектор.

В работах [1,2] впервые были использованы линейные по тензору анизотропии $b_{ij} \equiv \tau_{ij}/2K - \delta_{ij}/3$ (здесь K — кинетическая энергия турбулентности) модели для $\Phi_{ij}^{(r)}$. С их помощью удалось, в частности, удовлетворительно описать однородные искажения решеточной турбулентности. Однако в то же время было показано, что линейные модели адекватно описывают лишь течения с умеренной степенью анизотропии, в других же случаях возможно появление решений с отрицательными значениями энергии некоторых компонент.

Позднее [3] было сформулировано дополнительное („сильное“) условие реализуемости (strong realizability), согласно которому, в частности, компоненты $\Phi_{\lambda j}^{(r)}$ должны обращаться в ноль в случае, когда интенсивность пульсаций вдоль оси λ обращается в ноль. Это новое условие заведомо нарушается в случае линейной аппроксимации, что дало толчок к построению и изучению нелинейных моделей. Наиболее общее, пятого порядка по степени анизотропии, выражение для $\Phi_{ij}^{(r)}$, автоматически удовлетворяющее условию „сильной“ реализуемости, было получено в [4]. Это выражение включает в себя 8 тензорных слагаемых с 7 скалярными „константами“. Число констант существенно сокращается [5], если ограничиться приближениями четвертого и третьего порядков, до 4 и 1 соответственно. Квадратичная модель при этом вообще не содержит неопределенных модельных констант [5, (53)]:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^{(r)}/K &= 4\eta_2 \{\hat{b}\hat{S}\} b_{ij} + \frac{4}{5} (1 + (4\eta_2 - 3\eta_3) II_b) S_{ij} \\ &+ 6(4 + 3\eta_1) \left(b_{ik} S_{kj} + S_{ik} b_{kj} - \frac{2}{3} \{\hat{b}\hat{S}\} \delta_{ij} \right) / 7 + 2\eta_1 (b_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} b_{kj}) \\ &+ 12(2\eta_2 - 3\eta_3) \left(b_{ik} S_{kl} b_{lj} - \frac{1}{3} \{\hat{b}^2 \hat{S}\} \delta_{ij} \right) + 4\eta_3 (b_{ik} b_{kl} \Omega_{lj} - \Omega_{ik} b_{kl} b_{lj}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \hat{S} и $\hat{\Omega}$ — симметричная и антисимметричная части тензора \hat{U} , $\eta_1 = -13/15$, $\eta_2 = 207/25$, $\eta_3 = 181/25$, $II_b = -\{\mathbf{b}^2\}/2$. Фигурные скобки означают свертку соответствующих матриц.

Как уже было отмечено, „сильная“ реализуемость уже заложена в модели (2) и родственных ей более высокого порядка, что, на первый

взгляд, дает основание считать их более адекватными по сравнению с линейными, во всяком случае — гарантировать большую область их применимости.

Однако, как было показано в [6,7], из точного спектрального представления (1) можно вывести простые и в то же время даже более жесткие по сравнению с упомянутыми условиями реализуемости ограничения на значения компонент тензора $\Phi_{ij}^{(r)}$. Более того, эти ограничения являются прямыми в том смысле, что дают возможность непосредственной, до проведения громоздких расчетов, оценки применимости различных модельных выражений.

Вывод этих новых ограничений основывается на факте положительной определенности спектральной матрицы F_{ij} двухточечных корреляций $\langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$ пульсационной скорости:

$$F_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j \geq 0. \quad (3)$$

Здесь ξ_i — произвольный комплексный вектор, черта означает комплексное сопряжение.

Если в качестве ξ_i выбрать $U_{li}\theta_l$, несложные выкладки приводят к следующему неравенству:

$$-R^2 \leq \frac{\{U\Phi^{(r)}\}}{2K\{S^2\}} \leq (2 + 2|R| + R^2). \quad (4)$$

Здесь $R^2 \equiv -\{\hat{\Omega}^2\}/\{\hat{S}^2\}$.

Ранее в [8] на примере линейных моделей было показано, что ограничение (4) действительно имеет весьма жесткий характер: неравенство не выполняется для произвольной степени анизотропии. В данной работе условие (4) использовано для проверки адекватности нелинейных моделей на примере простейшей из них — квадратичной (2), не содержащей эмпирических констант.

Ограничиваясь лишь более жестким условием $\{\hat{\Phi}^{(r)}\hat{S}\} \geq -2KR^2\{S^2\}$ в двойном неравенстве (4), с учетом представления (2) имеем

$$\begin{aligned} \eta_2\{\hat{b}\hat{S}^2\} + \frac{1}{5}(1 + (4\eta_2 - 3\eta_3)I_b)\{\hat{S}^2\} + 3(4 + 3\eta_1)\{\hat{b}\hat{S}^2\}/7 \\ + \eta_1\{\hat{b}\hat{\Omega}\hat{S}\} + 3(2\eta_2 - 3\eta_3)\{\hat{b}\hat{S}\hat{b}\hat{S}\} + 2\eta_3\{\hat{b}^2\hat{\Omega}\hat{S}\} \geq -R^2\{\hat{S}^2\}/2. \end{aligned} \quad (5)$$

Неравенство (5) должно выполняться для любых физически допустимых значений компонент тензора b_{ij} и матриц \hat{S} , $\hat{\Omega}$.

Для избежания громоздких выкладок ограничимся в дальнейшем рассмотрением лишь 2-мерных течений, когда матрица средних скоростей деформаций может быть представлена в виде

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = ((D + \omega)\delta_{i1}\delta_{j2} + (D - \omega)\delta_{i2}\delta_{j1}). \quad (6)$$

Частные случаи $D = \omega$ и $\omega = 0$ искажений этого типа соответствуют течениям с чистым вращением и плоским сдвигом. В целом класс течений (6) наиболее часто используется для „калибровки“ моделей, что и объясняет его выбор для апробации ограничения (5).

Для тензора анизотропии в рассматриваемом случае можно записать следующее точное соотношение [9]:

$$\hat{b}\{\hat{S}^2\} = \{\hat{b}\hat{S}\}\hat{S} + \{\hat{b}\hat{\Omega}\hat{S}\}(\hat{S}\hat{\Omega} - \hat{\Omega}\hat{S})/\{\hat{\Omega}^2\} + 6\{\hat{b}\hat{S}^2\}(\hat{S}^2/\{\hat{S}^2\} - \hat{I}/3). \quad (7)$$

Тождество (7) означает, что для 2-мерных течений компоненты тензора анизотропии определяются через три скаляра-свертки:

$$B_1 = \frac{\{\hat{b}\hat{S}\}}{\{\hat{S}^2\}^{1/2}}, \quad B_2 = \frac{\{\hat{b}\hat{\Omega}\hat{S}\}}{\{\hat{S}^2\}}, \quad B_3 = \frac{\{\hat{b}\hat{S}^2\}}{\{\hat{S}^2\}}.$$

Более того, для этого типа течений аналогичное (7) представление можно получить и для тензора \hat{b}^2 . Как следствие, нелинейные по \hat{b} слагаемые в неравенстве (5) могут быть выражены через те же 3 упомянутые свертки [9]:

$$\{\hat{b}^2\hat{\Omega}\hat{S}\} = 2B_2B_3\{\hat{S}^2\}$$

$$\{\hat{b}\hat{S}\hat{b}\hat{S}\} = (2B_1^2/3 + II_b/3 - 2B_2^2/3/R^2 + 2B_3^2)\{\hat{S}^2\}.$$

Второй инвариант II_b тензора анизотропии \hat{b} также выражается через набор скаляров $\{B_i\}$ [9]:

$$II_b = -(B_1^2/2 + B_2^2/R^2 + 3B_3^2).$$

С учетом двух последних выражений основное неравенство (5) принимает вид

$$\begin{aligned} & 2/5 + R^2 + 6(4 + 3\eta_1)B_3/7 + 2\eta_1B_2 + 8\eta_3RB_3B_2/R \\ & + 6(6\eta_2 - 7\eta_3)B_1^2/5 - 4(17\eta_2 - 24\eta_3)B_2^2/5/R^2 + 36(\eta_2 - 2\eta_3)B_3^2/5 \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

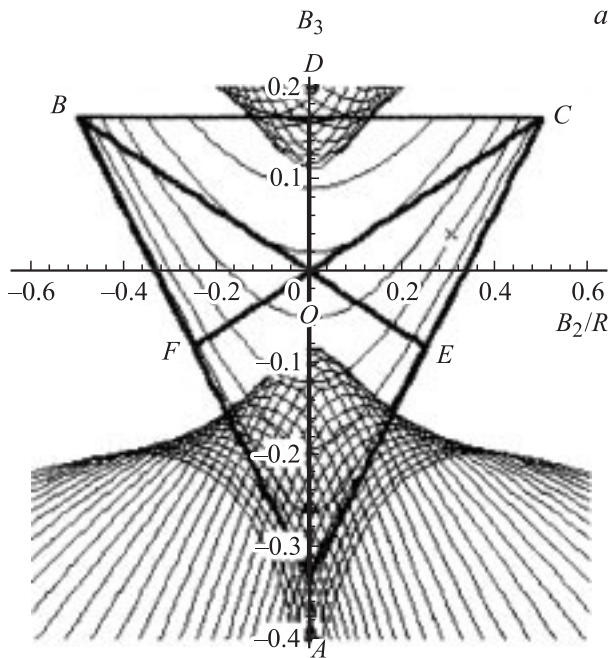


Рис. 1.

Полученное ограничение удобно представить графически, на плоскости с координатами $B_2/R \div B_3$. Физически допустимая область на этой плоскости ограничена контуром треугольника ABC , изображенного на рис. 1. Границам этого треугольника соответствует 2-мерная турбулентность, вершинам A, B, C — одномерная (с пульсациями лишь вдоль осей 3, 2, 1 соответственно), отрезкам BE, CF, AD — осесимметричная (случаи $u_1^2 = u_3^2, u_2^2 = u_3^2$ и $u_1^2 = u_2^2$), а точке O — изотропная турбулентность. На рисунке изображено также семейство B_1 -изолиний.

При любых заданных значениях R и B_1 неравенство (8) определяет в физически допустимой области некоторую зону, ограниченную гиперболой. Семейство этих гипербол и соответственно их огибающая определяют „область адекватности“ рассматриваемой модели. Конфигурация этой области при $B_1 = 0$ представлена на рис. 1, a ; даже в этом

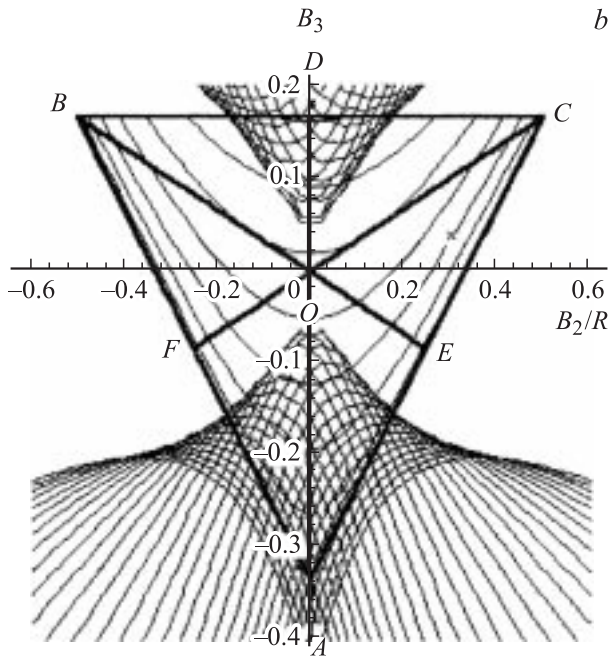


Рис. 1 (продолжение).

случае, когда неравенство (8) наименее жесткое, значительная часть физического домена оказывается „запретной“ для модели. Соответствующий результат для более жесткого варианта, когда при заданных B_2/R и B_3 параметр B_1 принимает максимальное возможное значение $2((B_3 + 1/3)^2 - B_2^2/R^2)$, иллюстрируется рис. 1, *b*.

Для сравнения на рис. 2 приведены также результаты аналогичных расчетов для известной линейной модели LRR [1].

Все полученные результаты можно представить и в более традиционном виде, на „инвариантной“ плоскости с координатами $-III_b \equiv \frac{1}{2} \{\mathbf{b}^2\}$ и $III_b \equiv \frac{1}{3} \{\mathbf{b}^3\}$ (AIM, Anisotropy Invariant Map). Физически допустимый домен ограничен здесь так называемым треугольником Ламли, фрагмент которого представлен на рис. 3. Его верхняя сторона ($-III_b = 1/9 + 3III_b$) соответствует 2-мерной турбулентности, боковые ($-III_b = 3|III_b/2|^{2/3}$) — осесимметричной. В качестве иллюстрации на

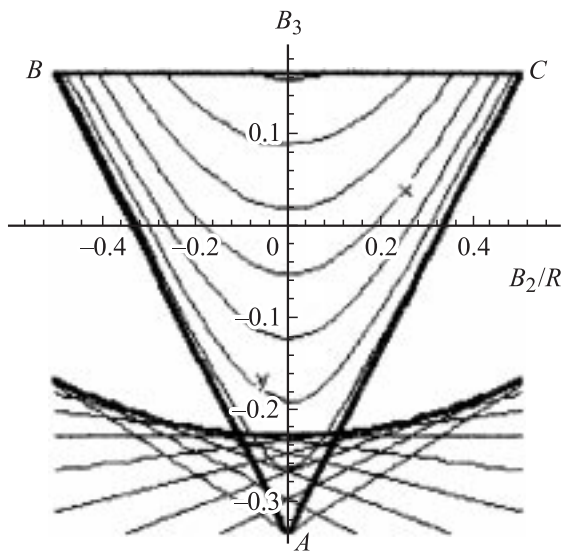


Рис. 2.

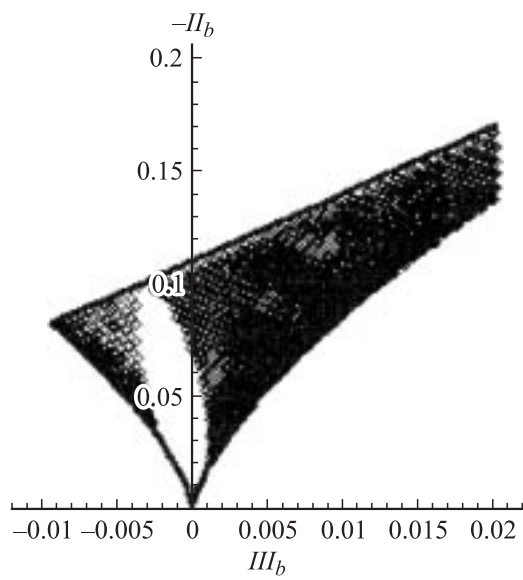


Рис. 3.

рис. 3 приведена конфигурация „запретной“ зоны для случая $B_1 = 0$, представленной ранее в плоскости $B_2/R \div B_3$ на рис. 1, *a*.

Таким образом, квадратичная модель для PSC, как и линейные, не может считаться вполне адекватной при описании течений со значительной степенью анизотропии, а в ряде случаев, как следует из сравнения рис. 1, *a*, *b* и 2, может оказаться даже менее предпочтительной.

Следует также отметить, что проблемы с использованием рассмотренных моделей возникают не в случае какой-то экзотической анизотропии: „запретные“ зоны на рисунках соответствуют, например, пристеночным областям, где турбулентность близка к двумерной.

Скорее всего, полученные результаты указывают, как отмечается и в [10], на принципиальный недостаток всего рассматриваемого класса моделей для PSC: турбулентность является более нелокальной, чем предполагается в их рамках, и набор полей, для которых составляются дифференциальные уравнения, должен быть в общем случае расширен или изменен.

Список литературы

- [1] *Launder B.E., Reece G., Rodi W.* // J. Fluid Mech. 1975. V. 68. P. 537–566.
- [2] *Gibson M.M., Launder B.E.* // J. Fluid Mech. 1978. V. 86. P. 491–511.
- [3] *Ламли Дж.* // Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 7–34.
- [4] *Arne V. Johansson, Magnus Hallback* // J. Fluid Mech. 1994. V. 269. P. 143–168.
- [5] *Sjogren T., Johansson A.V.* // Physics of Fluids. 2000. V. 12. N 6. P. 1554–1572.
- [6] *Богданов С.Р., Соболев С.И.* // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 2. С. 42–46.
- [7] *Sambasivam A., Girimaji S., Poroseva S.* // Journal of Turbulence. 2004. V. 5. N 6. P. 1–22.
- [8] *Bogdanov S.R., Jongen T.J.* // Abstracts. Euromech Fluid Mechanics Conference 6. Royal Institute of Technology, Stockholm. June 26–30, 2006. V. 2. P. 224.
- [9] *Jongen T., Gatski T.B.* // J. Fluid Mech. 1999. V. 399. P. 117–150.
- [10] *Rubinstein R., Girimaji S.S.* // J. Fluid Mech. 2006. V. 548. P. 197–206.