

01;09

Феномены комплексной аналитической динамики в системе связанных неавтономных осцилляторов с поочередным возбуждением

© О.Б. Исаева, С.П. Кузнецов, А. Осбалдестин

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН,
Саратов, Россия
Department of Mathematics, Portsmouth University,
Portsmouth PO1 3NE, UK
E-mail: IsaevaO@rambler.ru

Поступило в Редакцию 11 января 2007 г.

Предложена модель в виде системы двух связанных неавтономных осцилляторов, в которой реализуются феномены сложной динамики, характерные для комплексных аналитических отображений (множества Мандельброта, Жюлиа и др.). Идея построения модели основана на механизме передачи возбуждения по очереди от одной подсистемы к другой [7], а также на известном в теории колебаний методе медленно меняющихся комплексных амплитуд.

PACS: 05.45.-a

Один из глубоко проработанных математиками разделов нелинейной динамики имеет своим содержанием исследование итерированных отображений, заданных аналитическими функциями комплексного переменного [1]. Классическим объектом служит комплексное квадратичное отображение

$$z_{n+1} = c + z_n^2. \quad (1)$$

При $c = 0$ имеет место тривиальное поведение: для $|z_0| > 1$ результат последовательных итераций будет стремиться к бесконечности, а для $|z_0| < 1$ — оставаться в ограниченной области. Границей раздела между этими двумя типами поведения служит единичная окружность $|z_0| = 1$. При других значениях комплексного параметра c множество, разграничивающее указанные два типа поведения на комплексной плоскости z , вообще говоря, устроено сложным образом

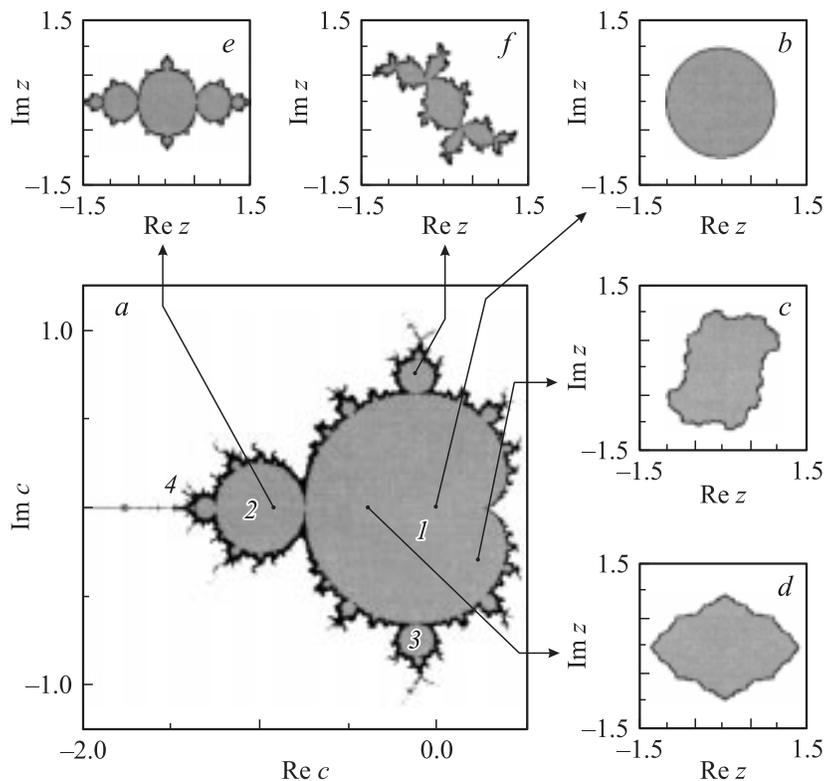


Рис. 1. Множество Мандельброта (*a*) и множества Жюлиа для квадратичного комплексного отображения (*I*) при различных значениях параметра: $c = 0.0$ (*b*), $c = 0.2 - 0.3i$ (*c*), $c = -0.4$ (*d*), $c = -0.8$ (*e*), $c = -0.1 + 0.75i$ (*f*). Серым цветом на рисунке (*a*) обозначены области, которым соответствует существование периодической динамики (периоды указаны цифрами); черным цветом обозначены точки, в которых реализуется ограниченная в фазовом пространстве хаотическая динамика; белый цвет означает убегание траекторий на бесконечность.

и имеет фрактальную природу. Его называют множеством Жюлиа (см. примеры на рис. 1).

С другой стороны, если фиксировать начальное условие $z_0 = 0$ и рассмотреть поведение последовательности z_n в зависимости от

комплексного параметра c , то при одних его значениях итерации будут убегать на бесконечность, а при других — оставаться в ограниченной области. Ассоциирующееся с этой последней ситуацией множество точек на комплексной плоскости c называется множеством Мандельброта (рис. 1, *a*). При этом динамика комплексной переменной z в ограниченной области может отвечать как периодическим, так и хаотическим режимам. Область периодической динамики по форме напоминает кактус и представляет собой совокупность касающихся друг друга образований округлой формы, расположенных по периферии большой области в форме кардиоиды. Цифры 1, 2, 3 обозначают период динамики, наблюдаемой в нескольких основных лепестках „кактуса“. Хаотической динамике соответствует на плоскости параметра обрамляющий „кактус“ фрактальный узор. На рис. 1, *a* точками отмечены значения параметра, для которых построены изображения множеств Жюлиа на диаграммах $b-f$.

Принципиальное значение имеет вопрос о возможности физической реализации феноменов динамики комплексных отображений (см., например, [2]). Одна из успешных попыток реализовать множество Мандельброта относится к системе специальным образом симметрично связанных отображений или нелинейных осцилляторов под внешним периодическим воздействием [3]. В этом контексте была введена трактовка множества Мандельброта как области обобщенной частичной синхронизации [4] и изучены некоторые аспекты проблемы реализации феноменов комплексной динамики в автономных потоковых системах [5]. В работе [6] предложено электронное аналоговое устройство, моделирующее динамику связанных соответствующим образом квадратичных отображений. В этой системе впервые удалось пронаблюдать множество Мандельброта в физическом эксперименте.

В настоящей работе предлагается альтернативный подход, позволяющий реализовать динамику, характерную для комплексных отображений. При этом в качестве комплексной переменной фигурирует комплексная амплитуда колебаний, имеющих место в системе двух связанных неавтономных осцилляторов, возбуждающихся по очереди и передающих возбуждение по эстафете друг другу. Ранее подобная идея была применена для физической реализации ряда абстрактных моделей и феноменов сложной динамики, таких как отображение Бернулли, аттрактор Смейла–Вильямса, отображение „кот Арнольда“, грубый странный нехаотический аттрактор [7–11].

Обсудим основные принципы функционирования предлагаемой системы. В теории колебаний и волн хорошо известен метод медленных амплитуд. Пусть имеем колебательный процесс на частоте ω_0 с медленно меняющейся комплексной амплитудой $A(t)$: $x(t) = \text{Re}[A(t) \exp(i\omega_0 t)]$. При преобразовании такого сигнала на элементе с квадратичной нелинейностью результатом будет $y(t) = x^2(t) = (1/2)|A(t)|^2 + (1/2)\text{Re}[A(t)^2 \exp(2i\omega_0 t)]$. Отсюда видно, что составляющая на удвоенной частоте имеет комплексную амплитуду, получаемую возведением исходной комплексной амплитуды в квадрат. Указанное преобразование, имеющее место в предлагаемой ниже неавтономной колебательной системе при эволюции за период воздействия, составляет основу рассматриваемого способа реализации комплексной аналитической динамики.

Рассмотрим систему двух связанных неавтономных осцилляторов, описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} + \omega_0^2 x + F \left(\gamma + \sin \frac{2\pi}{T} t \right) x &= \varepsilon y \sin \omega_0 t + \lambda \sin(\omega_0 t + \varphi), \\ \ddot{y} + (2\omega_0)^2 y + F \left(\gamma - \sin \frac{2\pi}{T} t \right) y &= \varepsilon x^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где x и y обозначают обобщенную координату для первого и второго осциллятора; $F, \gamma, \lambda, \varepsilon$ — параметры. Первый осциллятор имеет собственную частоту ω_0 а второй — вдвое большую. Коэффициент перед первой производной, управляющий диссипацией в одном и другом осцилляторе, медленно изменяется во времени в противофазе с периодом T , который будем полагать составляющим целое число периодов собственных колебаний $T = 2\pi N / \omega_0$ (N — целое). Параметр γ принимается положительным, меньшим единицы (например, $\gamma = 0.5$). Поэтому, оставаясь в среднем за период положительной, на определенной части периода диссипация становится отрицательной для одного или другого осциллятора. На этом участке осциллятор является активным (колебания нарастают), тогда как на остальной части периода он оказывается диссипативным (колебания затухают).

Предположим, что к моменту начала активной стадии второго осциллятора первый совершает колебания с комплексной амплитудой A , т.е. $x(t) \sim \text{Re}[A(t) \exp(i\omega_0 t)]$. Его воздействие на второй осциллятор производится через нелинейный квадратичный элемент, и „затравкой“

для возникающих колебаний будет попадающая в резонанс составляющая на второй гармонике, $\text{Re}[A(t)^2 \exp(2i\omega_0 t)]$. Поэтому комплексная амплитуда колебаний второго осциллятора на активной стадии будет пропорциональна A^2 . При обратном воздействии (см. правую часть первого уравнения) смещение с опорным сигналом приводит к появлению составляющей на разностной частоте ω_0 , амплитуда которой пропорциональна A^2 . В сумме с дополнительным колебательным членом $\lambda \sin(\omega_0 t + \varphi)$, характеризуемыми параметрами амплитуды λ и фазы φ , это дает „затравку“ для комплексной амплитуды первого осциллятора. Таким образом, отображение для комплексной амплитуды первого осциллятора за период воздействия будет соответствовать, по крайней мере в определенном приближении, комплексному квадратичному отображению. Действительной и мнимой частям переменной z будут отвечать обобщенные координата и скорость x и \dot{x}/ω_0 , а роль комплексного параметра c будет играть комплексное число с модулем λ и аргументом φ .

В зависимости от выбора параметра $c = \lambda e^{i\varphi}$ может случиться, что решение уравнений связанных неавтономных осцилляторов будет оставаться ограниченным при задании начальных условий в определенной области фазового пространства, или же оно может оказаться убегающим на бесконечность. На рис. 2, *a, b* приводится полученная численно диаграмма, где серым цветом отмечены точки, отвечающие возможности наблюдения динамики в ограниченной области, а белым — точки, ассоциирующиеся с уходом на бесконечность. Расчеты производились для $\omega_0 = 2\pi$, $T = 10$, $F = 7$, $\gamma = 0.5$, $\varepsilon = 1$. Объект на диаграмме демонстрирует очевидное сходство с множеством Мандельброта для комплексного квадратичного отображения. Цифры 1, 2, 3 и т.д. на диаграмме обозначают „лепестки“, где реализуется динамика периода соответственно $T, 2T, 3T, \dots$

Рис. 3 иллюстрирует характер динамики системы в режиме, реализующемся внутри лепестка периода 3. Показаны зависимости от времени для переменных x и y , отвечающих двум связанным неавтономным осцилляторам.

Очевидно, тип режима определяется тем, каким будет на участке минимальной амплитуды колебаний первого осциллятора сигнал „затравки“, представляющий собой суперпозицию трансформированного на нелинейном элементе сигнала от осциллятора-партнера и внешнего сигнала. При этом существенны детали соотношения фаз этих двух

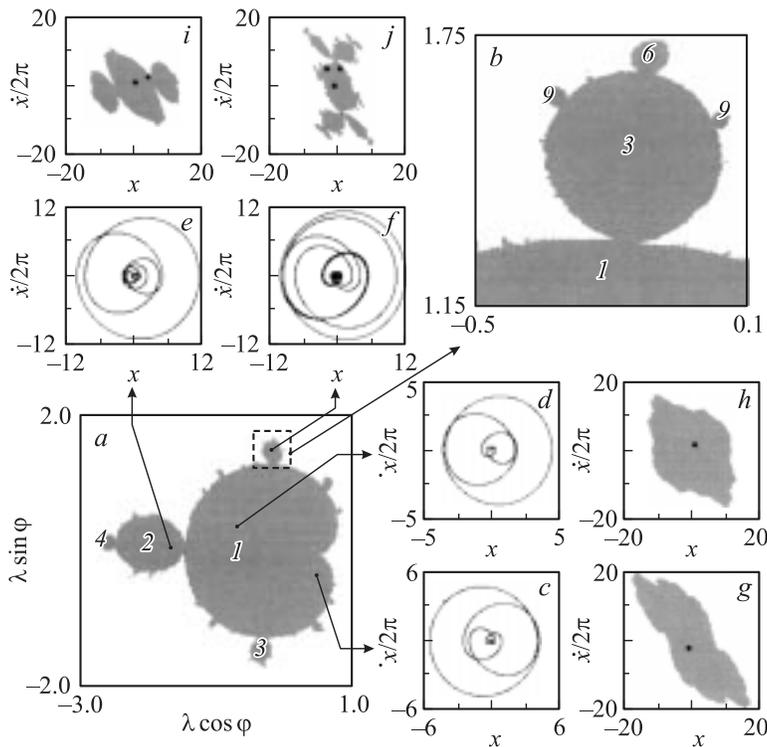


Рис. 2. Множество Мандельброта (*a*) и его увеличенный фрагмент (*b*) для системы неавтономных осцилляторов (2) при $\omega_0 = 2\pi$, $F = 7$, $\gamma = 0.5$, $N = 10$, $\varepsilon = 1$ на плоскости параметров, отвечающих действительной и мнимой частям параметра комплексного отображения (*l*). Для указанных на (*a*) точками значений параметров приведены проекции предельных циклов на плоскость $(x, \dot{x}/2\pi)$ (*c-f*) и сечения этой же плоскостью бассейнов притяжения этих предельных циклов (*g-j*). Точками на бассейнах притяжения указаны проекции отображения Пуанкаре. Использованы следующие значения параметров: $\lambda \cos \varphi = 0.5$, $\lambda \sin \varphi = -0.2$ (*c, g*), $\lambda \cos \varphi = -0.7$, $\lambda \sin \varphi = 0.4$ (*d, h*), $\lambda \cos \varphi = -1.7$, $\lambda \sin \varphi = 0.1$ (*e, i*), $\lambda \cos \varphi = -0.2$, $\lambda \sin \varphi = 1.5$ (*f, j*).

сигналов, что и определяет тонкую структуру лепестков „кактуса“ на плоскости параметров.

Для точек, обозначенных метками на рисунке „кактуса“, построены диаграммы на плоскости переменных первого осциллято-

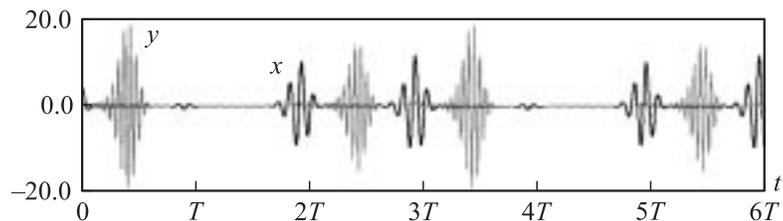


Рис. 3. Временная реализация динамики связанных неавтономных осцилляторов (2) при значениях параметров $\omega_0 = 2\pi$, $F = 7$, $\gamma = 0.5$, $N = 10$, $\varepsilon = 1$, $\lambda \cos \varphi = -0.2$, $\lambda \sin \varphi = 1.5$, отвечающих существованию в сечении Пуанкаре цикла периода 3.

ра $(x, \dot{x}/\omega_0)$, аналогичные портретам множеств Жюлиа для квадратичного отображения на рис. 1. В четырехмерном фазовом пространстве $(x, \dot{x}/\omega_0, y, \dot{y}/2\omega_0)$ аттрактор в сечении Пуанкаре располагается достаточно близко к плоскости $(x, \dot{x}/\omega_0)$, но не точно в ней. Бассейн же притяжения представляет собой 4-мерный объемный фрактальный объект. На рисунке приводятся диаграммы, изображающие сечение плоскостью $y = 0$, $\dot{y} = 0$ бассейнов притяжения для аттрактора, расположенного в ограниченной области фазового пространства (рис. 2, $g-j$). Портреты самих аттракторов в проекции на плоскость $(x, \dot{x}/\omega_0)$ показаны на рис. 2, $c-f$. (Точки, отвечающие аттрактору в стробоскопическом сечении, отмечены на рисунках, где изображены бассейны притяжения.)

Как видно из представленных данных, наша модельная система демонстрирует характерные для комплексной аналитической динамики феномены, воспроизводя, по крайней мере, в общих чертах такие объекты, как множества Мандельброта и Жюлиа. Более аккуратный анализ, результаты которого будут представлены последующими публикациями, свидетельствует, что это соответствие может нарушаться на глубоких уровнях разрешения мелкомасштабной фрактальной структуры. Дело в том, что при описании динамики в рамках метода медленно меняющихся амплитуд только в первом приближении все присутствующие в уравнениях члены оказываются аналитическими в смысле теории функций комплексного переменного. В последующих приближениях возникают неаналитические добавки, что приводит к разрушению мелкомасштабных деталей наблюдаемых объектов — аналогов множеств

Мандельброта и Жюлиа. Соответствие с комплексной аналитической динамикой является, по существу, асимптотическим по параметру T , т.е. оно становится тем лучше, чем больше отношение временных масштабов медленной модуляции параметра диссипации и периода собственных колебаний осцилляторов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 06-02-16619). О.Б. Исаева отмечает поддержку фонда INTAS (грант 05-109-5262) и гранта Президента Российской Федерации (МК-8501.2006.2).

Список литературы

- [1] *Пайтген Х.-О., Рухтер П.Х.* Красота фракталов. Образцы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. 176 с.
- [2] *Beck C.* // *Physica D.* 1999. V. 125. P. 171–182.
- [3] *Исаева О.Б.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9. № 6. С. 129–146.
- [4] *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P.* // Electronic preprint at <http://xxx.lanl.gov/abs/nlin.CD/0509012>
- [5] *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P.* // Electronic preprint at <http://xxx.lanl.gov/abs/nlin.CD/0509013>
- [6] *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Ponomarenko V.I.* // *Physical Review E.* 2001. V. 64. P. 055201(4)(R).
- [7] *Kuznetsov S.P.* // *Physical Review Letters.* 2005. V. 95. P. 144101(4).
- [8] *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* // *ЖЭТФ.* 2006. Т. 129. № 2. С. 400–412.
- [9] *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* // *Physics Letters A365.* 2007. P. 97–104.
- [10] *Isaeva O.B., Jalnin A.Yu., Kuznetsov S.P.* // *Physical Review E.* 2006. V. 74. P. 046207(5).
- [11] *Жалнин А.Ю., Кузнецов С.П.* // *ЖТФ.* 2007. Т. 77. В. 4. С. 10–18.