

01;05

Упругопластическая модель взаимодействия цилиндрического ударника и пластинки

© А.А. Локтев

Воронеж

E-mail: prtlokt@yandex.ru

В окончательной редакции 6 декабря 2007 г.

Исследуются упругопластические модели поперечного удара цилиндрического тела по упругой изотропной пластинке Уфлянда–Миндлина. Перемещения точек пластинки вне области контакта происходит из-за распространения с конечной скоростью волны поперечного сдвига, возникающей в момент удара и представляющей собой поверхность сильного разрыва. За фронтом поперечной волны искомые динамические величины представляются в виде одночленных лучевых разложений. Местное смятие материала происходит квазистатическим образом, его зависимость от контактной силы определяется упругопластической зависимостью. Изучается влияние упругопластических свойств материала пластинки в месте контакта и инерции контактного диска на контактную силу.

PACS: 46.40.-f, 46.55.+d

Задачи о динамическом контакте ударника и пластинки рассматривались в работах [1–3]. В [1] для описания функции прогибов использовалось разложение в ряд по функциям Бесселя. В [2–4] для определения искомых величин за фронтами волн используются лучевые ряды, представляющие степенные ряды по времени с переменными коэффициентами, зависящими от параметров ударника и мишени. Поскольку время контакта мало, можно ограничиться нулевым членом ряда, что и было показано в работах [2,3]. В [1–3] для определения местного смятения использовалась теория упругого взаимодействия Герца, но, как показывают экспериментальные и теоретические результаты [5], при превышении начальной скорости удара некоторого значения существенное влияние на динамические характеристики оказывают упругопластические свойства взаимодействующих тел. На основании волновых уравнений Уфлянда–Миндлина и лучевого метода в рабо-

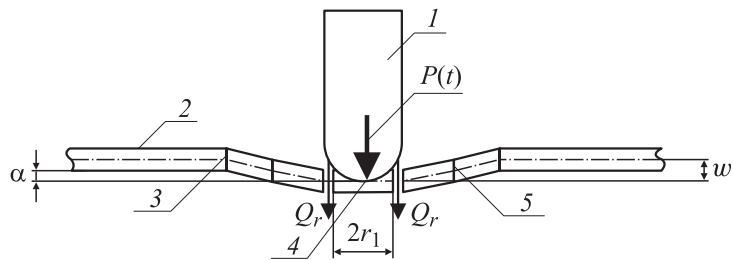


Рис. 1. Схема ударного взаимодействия цилиндрического ударника и пластинки Уфлянда–Миндлина: 1 — ударник, 2 — пластина, 3 — фронт квазипродольной волны, 4 — контактная область, 5 — фронт квазипоперечной волны.

те исследуется влияние упругопластических свойств разных моделей местного смятия на контактную силу. Предполагается, что пластинка достаточно протяженная и отраженная волна не успевает вернуться к границам контактной области до окончания процесса взаимодействия.

Ударник массой m движется перпендикулярно пластинке и ударяет по ней со скоростью V_0 (рис. 1). В момент удара в пластинке образуется контактная область радиусом r_1 , который зависит от радиуса ударника и величины контактного смятия α .

Движение ударника и движение контактной области после начала взаимодействия описываются следующими уравнениями:

$$m(\ddot{\alpha} + \ddot{w}) = -P(t), \quad \rho h \pi r_1^2 \ddot{w} = -2\pi r Q_r|_{r=r_1} + P(t), \quad (1)$$

где h — толщина пластинки, $P(t)$ — контактная сила, $Q_r|_{r=r_1}$ — перерезывающая сила на границе контактной области.

Процесс ударного взаимодействия происходит при соблюдении следующих начальных условий:

$$\dot{\alpha}|_{t=0} = V, \quad \dot{w}|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Динамическое поведение упругой изотропной пластинки в полярной системе координат r, φ описывается уравнениями Уфлянда–Миндлина, учитывающими инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига [3]:

$$\frac{1}{r} (M_r - M_\varphi) + \frac{\partial M_r}{\partial r} + Q_r = \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\beta}_r, \quad \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{Q_r}{r} = \rho h \dot{W}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_r &= D \left(\frac{\partial \dot{\beta}_r}{\partial r} + \sigma \frac{\dot{\beta}_r}{r} \right), \quad \dot{M}_\varphi = D \left(\frac{\dot{\beta}_r}{r} + \sigma \frac{\partial \dot{\beta}_r}{\partial r} \right), \\ \dot{Q}_r &= K\mu h \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \dot{\beta}_r \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где r и φ — полярные радиус и угол, M_r и M_φ — изгибающие моменты, Q_r — перерезывающая сила, $\dot{\beta}_r$ — угловая скорость вращения нормали к срединной поверхности пластинки в направлении r , $W = \dot{w}$ — скорость прогиба, ρ — плотность, $K = \pi^2/12$, μ — модуль сдвига, σ — коэффициент Пуассона, $D = E(1 - \sigma^2)^{-1}h^3/12$, t — время, точка над величинами означает производную по времени.

После удара от контактной области в пластинке начинает распространяться поперечная волна сдвига, фронт которой представляет цилиндрическую поверхность сильного разрыва, расширяющуюся со скоростью G . Вне контактной области за фронтом волновой поверхности искомая функция представляется в виде лучевого ряда по координате и времени [2]:

$$Z(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [Z_{,k}]_{t=r/G} \left(t - \frac{r-r_0}{G} \right)^k H \left(t - \frac{r-r_0}{G} \right), \quad (5)$$

где $[Z_{,k}] = [\partial^k Z / \partial t^k]$ — скачки производных k -го порядка по времени t от искомой функции Z на волновой поверхности Σ , при $t = (r - r_0)/G^{(\alpha)}$, r_0 — начальный радиус, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда.

Учитывая только первый член лучевого ряда (5), из уравнений (3), (4) определены скорость сдвиговой волны и динамическое условие совместности [3]:

$$G = \sqrt{\frac{K\mu}{\rho}}, \quad Q_r = -\rho GhW. \quad (6)$$

Подставляя Q_r и W в (1) и учитывая, что для сферического конца ударника $r_1^2 = R\alpha$, приходим к нелинейному интегродифференциальному уравнению относительно α и P :

$$\alpha \left(-\frac{P}{m} - \ddot{\alpha} \right) = -\frac{2G}{R^{1/2}} \alpha^{1/2} \left[-\frac{1}{m} \int_0^t P(t) dt - \dot{\alpha} \right] + \frac{P(t)}{\rho h \pi R}. \quad (7)$$

Местное смятие связано с контактной силой следующими соотношениями [6,7], полученными из решения контактных задач:

1) упругая модель Герца

$$\alpha = bP^{2/3}, \quad (8)$$

2) упругопластическая модель [6]

$$\alpha = \begin{cases} bP^{2/3}, & dP/dt > 0, P_{\max} < P_1, \\ (1 + \beta)c_1 + (1 - \beta)Pd, & dP/dt > 0, P_{\max} > P_1, \\ b_f P^{2/3} + \alpha_p(P_{\max}), & dP/dt < 0, P_{\max} > P_1, \end{cases} \quad (9)$$

3) упругопластическая модель [7]

$$\alpha = \begin{cases} bP^{2/3}, & dP/dt > 0, P < P_b, \\ bP^{2/3} + Pd, & dP/dt > 0, P > P_b, \\ bP^{2/3} + P_{\max}d, & dP/dt < 0, P_{\max} > P_b, \end{cases} \quad (10)$$

где $b = ((9\pi^2(k_1 + k)^2)/16R)^{1/3}$, $k_1 = (1 - \sigma_1^2)/E_1$, $k = (1 - \sigma^2)/E$, $\chi = \pi m \lambda$, m — наименьшая из пластических констант, взаимодействующих тел, $P_1 = \chi^3 (3R(k_1 + k)/4)^2$, $\lambda = 5.7$, $b_f = R_f^{-1/3} (3(k_1 + k)/4)^{2/3}$, $R_p^{-1} = R^{-1} - R_f^{-1}$, $R_f = (4/3(k_1 + k)) P_{\max}^{1/2} \chi^{-3/2}$, $\alpha_p(P_{\max}) = (1 - \beta)P_{\max}(2\chi R_p)^{-1}$, $c_1 = 3\chi^{1/2}(k_1 + k)/8$, $\beta = 0.33$, $d = 1/2\chi R$, σ_1 , E_1 — коэффициент Пуассона и модуль упругости для ударника соответственно.

После подстановки выражений (8)–(10) в формулу (7) получим интегродифференциальные уравнения относительно контактной силы. Решение этих уравнений находится численно с помощью ЭВМ на каждом интервале $(n - 1)\tau \leq t \leq n\tau$, предполагая, что в пределах одного интервала контактная сила изменяется линейно:

$$\dot{P}(n\tau) = (P_n - P_{n-1})/\tau, \quad (11)$$

где τ — шаг интегрирования.

Решение нелинейных уравнений приводится в виде графиков зависимостей $P(t)$.

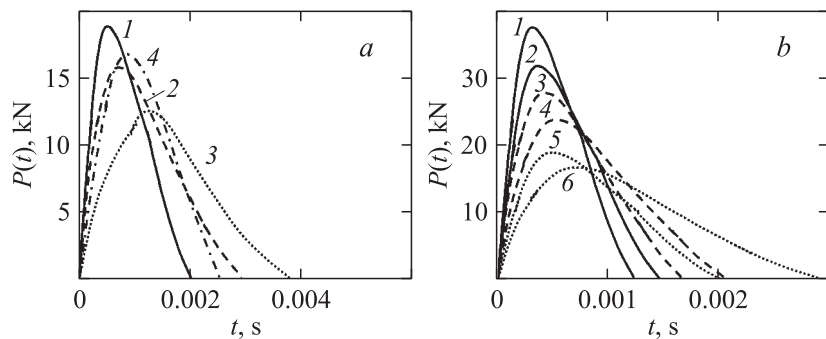


Рис. 2. Зависимость контактной силы от времени: *a* — для разных моделей местного смятия, *b* — для разных начальных скоростей удара.

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим численный пример и исследуем зависимость контактной силы от модели контактного взаимодействия и упругопластических свойств пластинки. Параметры изучаемой конструкции принимают следующие значения: $m = 0.3$ kg, $h = 100$ mm, $E_1 = E = 200$ GPa, $\sigma_1 = \sigma = 0.3$, $\rho = 7850$ kg/m³.

На рис. 2 показаны зависимости контактной силы от времени. На рис. 2, *a*, кривые 1, 2, 3 построены при использовании соотношений (8), (9) и (10) соответственно, а кривая 4 взята из [5], начальная скорость удара $V_0 = 10$ m/s. На рис. 2, *b* кривые 1, 2 соответствуют $V_0 = 20$ m/s, кривые 3, 4 — $V_0 = 15$ m/s, кривые 5, 6 — $V_0 = 10$ m/s, кривые 1, 3, 5 были посчитаны при помощи соотношений (8), а кривые 2, 4, 6 — при помощи соотношений (9). Из рис. 2, *a* видно, что модель (9) дает наилучшее приближение к результату эксперимента и что при скоростях ≈ 10 m/s упругопластические свойства мишени заметно влияют на контактную силу. Из рис. 2, *b* следует, что при увеличении начальной скорости воздействия разница между значениями максимальных контактных сил, полученных при использовании зависимостей (8) и (9), растет.

Полученные результаты позволяют сделать выводы о необходимости учета упругопластических свойств соударяющихся тел при начальных скоростях удара 10 m/s и более и целесообразности использования упругопластической модели местного смятия (9) в сочетании с волновым подходом при решении задач ударного взаимодействия.

Список литературы

- [1] *Филиппов А.П.* // Механика твердого тела. 1971. № 6. С. 102–109.
- [2] *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* // Acta Mechanica. 1994. V. 102. N 1–4. P. 103–121.
- [3] *Россихин Ю.А., Шитикова М.В.* // Изв. вузов. Строительство. 1996. № 6. С. 28–34.
- [4] *Локтев А.А.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 6. С. 4–9.
- [5] *Гольдсмит В.* Удар. М.: Стройиздат, 1965. 595 с.
- [6] *Бирюков Д.Г., Кадомцев И.Г.* // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43. № 5. С. 171–175.
- [7] *Кильчевский Н.А.* Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев: Наук. думка, 1976. 342 с.