

01;09

Особенности синхронизации в системе связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, неидентичных по управляющему параметру

© А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов, Ю.П. Роман

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: alkuz@sgu.ru

Поступило в Редакцию 25 декабря 2006 г.

Обсуждается возможность широкополосной синхронизации в системе диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, отличающихся величиной параметра, ответственного за бифуркацию Андронова–Хопфа.

PACS: 02.60.Cb, 02.30.Oz, 05.45.Xt

Система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля является базовой моделью теории колебаний и привлекает внимание исследователей с точки зрения как развития теории синхронизации, так и возможных приложений (см., например, монографию [1]). Большинство работ на эту тему, однако, ограничиваются случаем идентичных управляющих параметров осцилляторов или анализом укороченных уравнений, полученных в квазигармоническом приближении (см. [1–4] и цитированную в них литературу). В то же время компьютерные эксперименты с исходной дифференциальной системой в случае, когда управляющие параметры могут заметно отличаться, выявляют интересные эффекты.

Обратимся к системе диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x + \mu \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y + \mu \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где λ_1 и λ_2 — управляющие параметры, ответственные за бифуркацию Андронова–Хопфа в изолированных осцилляторах, μ — коэффициент

диссипативной связи, δ — частотная расстройка второго осциллятора относительно первого.

Эффективным инструментом компьютерного исследования системы (1) может служить метод карт динамических режимов [5]. В его рамках на плоскости параметров (частотная расстройка δ —величина связи μ) черным цветом и оттенками серого будем обозначать периоды колебаний одного из связанных осцилляторов. Белый цвет соответствует хаотическим либо квазипериодическим движениям. Периоды циклов определялись численно с использованием метода сечений Пуанкаре. Для этого после достаточно длительного переходного процесса, когда можно считать фазовую траекторию вышедшей на аттрактор, определялись точки ее пересечения с секущей плоскостью. При этом учитывались траектории, пересекающие секущую только в одном направлении. Количество точек пересечения фазовой траектории с секущей плоскостью и принималось за период колебательного процесса. Поскольку анализируется связанная система, в качестве сечений Пуанкаре полезно выбрать не одну, а две плоскости, например $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$ для первой и второй подсистемы соответственно. Это позволяет ввести число вращения m/n , характеризующее режим установившейся синхронизации, где m — число пересечений (период) для первой секущей плоскости, а n — для второй. „Цвет“ области на карте определялся по второму осциллятору.

На рис. 1 представлены карты динамических режимов для системы (1) для случаев: а) идентичных по управляющему параметру подсистем, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; б) существенно неидентичных подсистем, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. На картах можно видеть основной язык синхронизации 1:1 (черный цвет); характерную для диссипативно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля область „гибели колебаний“ [1,2]; область квазипериодических режимов (белый цвет), а также встроенную в нее систему высших языков синхронизации, из которых наиболее заметным является язык 1:3. Сравнивая рисунки, можно увидеть, что они в одном моменте существенно отличаются. Граница между областями гибели колебаний и квазипериодических режимов для идентичных подсистем является линией, к которой подходят вершины высших языков синхронизации. Если же выбрать управляющие параметры разными, то эта граница оказывается уже не линией, а представляет собой полосу конечной ширины по коэффициенту связи, безгранично простирающуюся в область возрастающей частотной расстройки. Если двигаться внутри этой полосы, увеличивая собственную частоту второго осциллятора,

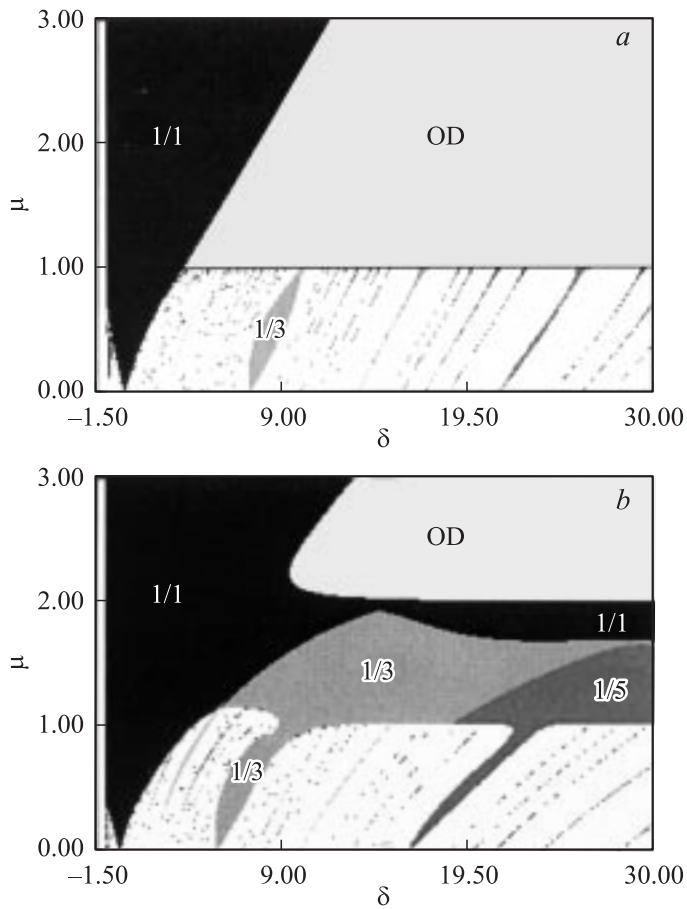


Рис. 1. Карты динамических режимов системы (1): a — $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, b — $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$. OD — область гибели колебаний.

то можно наблюдать синхронные режимы, отличающиеся на фазовых портретах числом „оборотов“ фазовой траектории второго осциллятора (рис. 2). При этом замечательная особенность задачи — сохранение фиксированного числа вращения в очень широком диапазоне частот. При этом ширина полосы синхронизации по частоте в этой новой

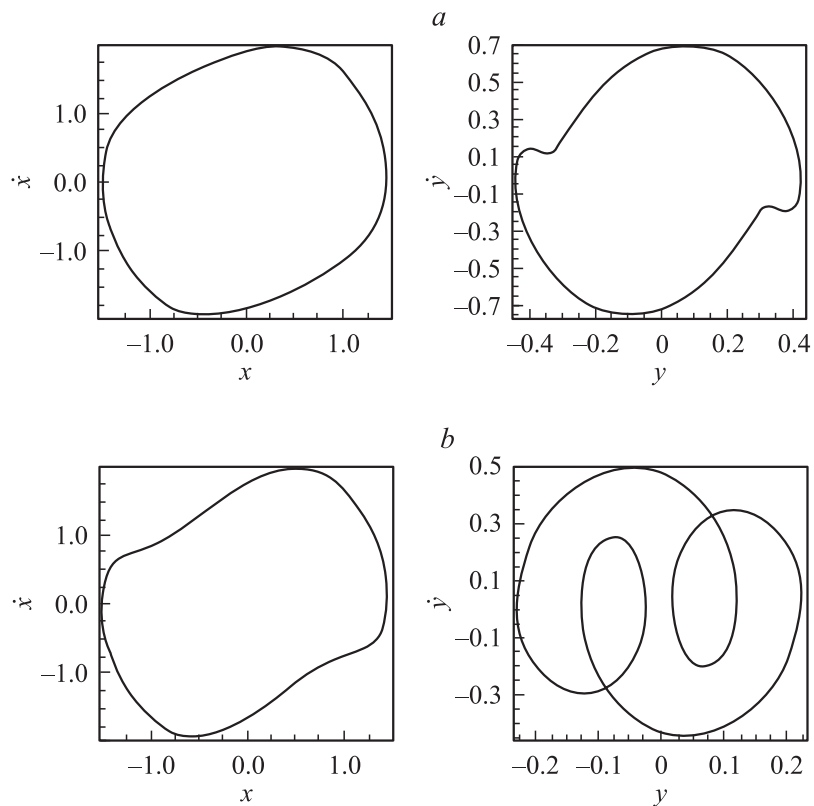


Рис. 2. Фазовые портреты первого (слева), второго (справа) из связанных осцилляторов Ван-дер-Поля (1) при движении в области широкополосной синхронизации на рис. 1, *b*. Значения параметров: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\mu = 1.5$, *a* — $\delta = 6.7$, *b* — $\delta = 15$, *c* — $\delta = 28$.

области в разы превосходит ширину языка синхронизации для идентичных подсистем. Таким образом, в неидентичных по управляющему параметру осцилляторах имеет место режим, который можно назвать широкополосной синхронизацией. Его объяснение можно дать, существенно опираясь на неидентичность осцилляторов по отвечающему за бифуркацию Андронова–Хопфа параметру λ . Действительно, в

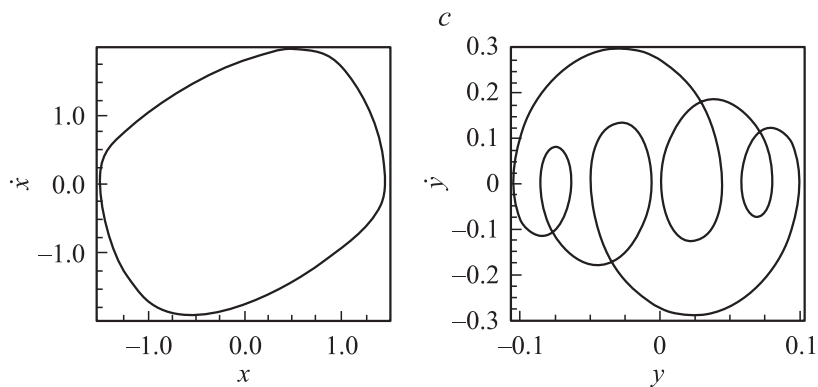


Рис. 2 (продолжение).

соответствии с (1), если коэффициент диссипативной связи μ превышает и λ_1 , и λ_2 , то оба осциллятора находятся за порогом эффекта „гибели колебаний“. В диапазоне же $\lambda_1 > \mu > \lambda_2$ сильно диссипативным оказывается только второй осциллятор. При этом первый осциллятор является своего рода „ведущим“ и, фактически, возбуждает второй. В этом плане характерны разные масштабы по осям координат на рис. 2. Их анализ показывает, что второй осциллятор движется по орбите заметно меньшего размера, причем разница в размерах орбит осцилляторов тем больше, чем больше величина частотной расстройки. Такая интерпретация, однако, в чистом виде применима, когда осцилляторы существенно отличаются по управляющим параметрам. В то же время компьютерное моделирование выявляет наличие сколь угодно широкой области синхронизации и в случае, когда управляющие параметры осцилляторов близки друг к другу. Для примера на рис. 3,а показана плоскость (частотная расстройка–сила связи) для $\lambda_1 = 1.25$ и $\lambda_2 = 1$. Можно видеть, что сближение управляющих параметров сказывается заметным образом на внутреннем устройстве полосы синхронизации. Области, отвечающие кратной синхронизации, заметно уменьшаются в размерах и меняют свою форму. Теперь они выглядят как „размытые“ вершины соответствующих языков синхронизации. Таким образом, при сближении управляющих параметров начинает доминировать режим синхронизации 1:1.

Можно провести также компьютерные эксперименты с системой, для которой добавлена дополнительная нелинейность по типу осцилля-

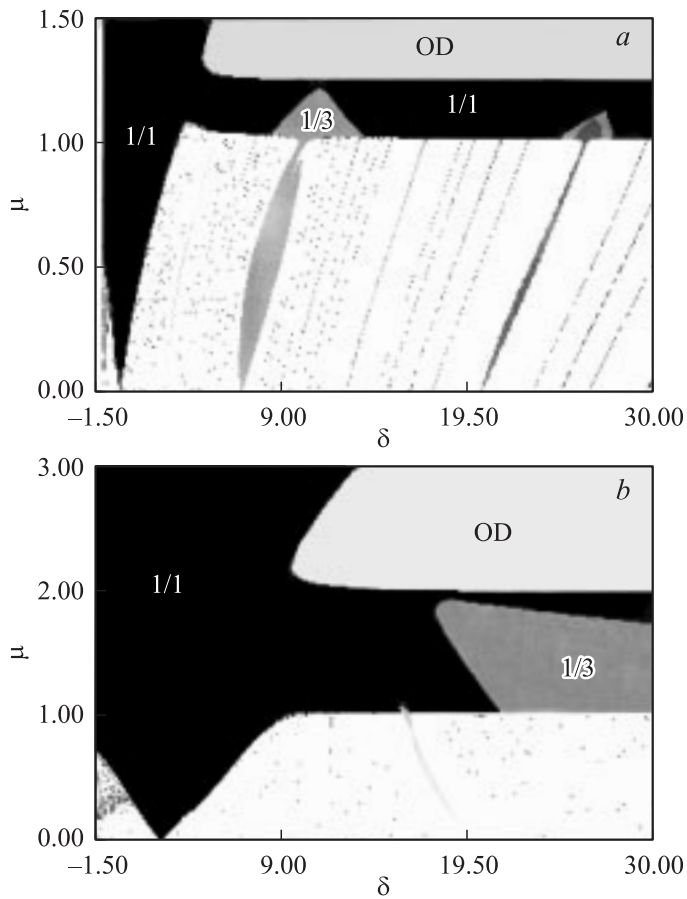


Рис. 3. Карты динамических режимов: *a* — для системы (1), $\lambda_1 = 1.25$, $\lambda_2 = 1$; *b* — для системы (2), $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\beta = 1$. OD — область гибели колебаний.

тора Дуффинга:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x + \beta x^3 + \mu \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y + \beta y^3 + \mu \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) = 0, \quad (2)$$

где β — параметр такой нелинейности. Для системы (2) также сохраняется узкая полоса синхронных режимов, разделяющая области гибели колебаний и квазипериодических режимов, но области кратной синхронизации заметно уменьшаются в размерах и сдвигаются в сторону больших частотных расстройек (рис. 3, *b*). В этом случае также начинает доминировать режим синхронизации 1:1.

Таким образом, диссипативно связанные неидентичные по управляющим параметрам осцилляторы Ван-дер-Поля демонстрируют интересные особенности устройства плоскости параметров (частотная расстройка—величина связи). Для нее граница между областями гибели колебаний и квазипериодическими режимами из линии превращается в полосу конечной ширины по константе связи, простирающуюся в область очень больших расстройек. При небольшой неидентичности осцилляторов этой полосе отвечает в основном синхронизация с числом вращения 1:1. Представлены, однако, и режимы типа 1:3, типа 1:5 и т.д., области реализации которых выглядят как „размытые“ вершины соответствующих языков синхронизации. С ростом неидентичности отвечающие этим режимам области существенно расширяются, заполняя фактически всю полосу. При учете фазовой нелинейности, введенной по типу осциллятора Дуффинга, области кратной синхронизации уменьшаются в размерах, их частотный порог смещается в сторону больших расстройек.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-02-16773).

Список литературы

- [1] Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация, фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
- [2] Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. // *Physica D*. 1990. V. 41. P. 403–449.
- [3] Rand R., Holmes // *Int. Non-Linear Mechanics*. 1982. V. 17. P. 143.
- [4] Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J. // *Physica D*. 2004. V. 189. P. 8–30.
- [5] Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.