

09

## Стохастический резонанс в бистабильной системе под воздействием хаотического сигнала

© В.С. Анищенко, М.В. Ануфриева, Т.Е. Вадивасова

Саратовский государственный университет

E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru

masha@chaos.ssu.runnet.ru

tanya@chaos.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 3 мая 2006 г.

Исследовалось поведение бистабильного осциллятора, находящегося под воздействием хаотического сигнала, в качестве которого использовался сигнал с генератора Ресслера, работающего в режиме спирального хаоса. Изучалось влияние ширины основной спектральной линии хаотического сигнала на отношение сигнал/шум на выходе системы.

PACS: 05.10.Jg, 05.45.Jg

Классический эффект стохастического резонанса (СР) представляет собой явление, при котором отклик бистабильной системы на слабое периодическое воздействие заметно усиливается при добавлении в систему шумового сигнала оптимальной интенсивности [1–3]. Шум не только не ухудшает, а наоборот приводит к большей упорядоченности поведения системы [4,5]. Исследования привели к установлению эффекта, аналогичного СР в хаотических системах переключательного типа без добавления внешнего шума, где роль шума играет собственная хаотическая динамика (так называемый эффект детерминированного РС в системах с кризисом аттракторов [6]). Было также показано, что вместо гармонического сигнала на бистабильную систему можно подать сигнал с более сложным спектральным составом — гармонический шум [7]. Суть явления СР состоит в наличии двух характерных временных масштабов. Первый задается внешним периодическим сигналом и определяется его периодом (частотой). Второй временной масштаб характеризует средний период (частоту) переключений бистабильной системы. В случае шумового воздействия на бистабильный осциллятор

средняя частота  $f_k$  переключений задается формулой Крамерса [8].

$$\Omega_k = 2\pi E_k \sim C \exp(-\Delta U/D), \quad (1)$$

где  $C$  — некоторая константа, определяемая формой бистабильного потенциала,  $\Delta U$  — высота потенциального барьера,  $D$  — интенсивность воздействующего белого шума. Эффект СР имеет место в случае, когда характерные времена совпадают или становятся близкими.

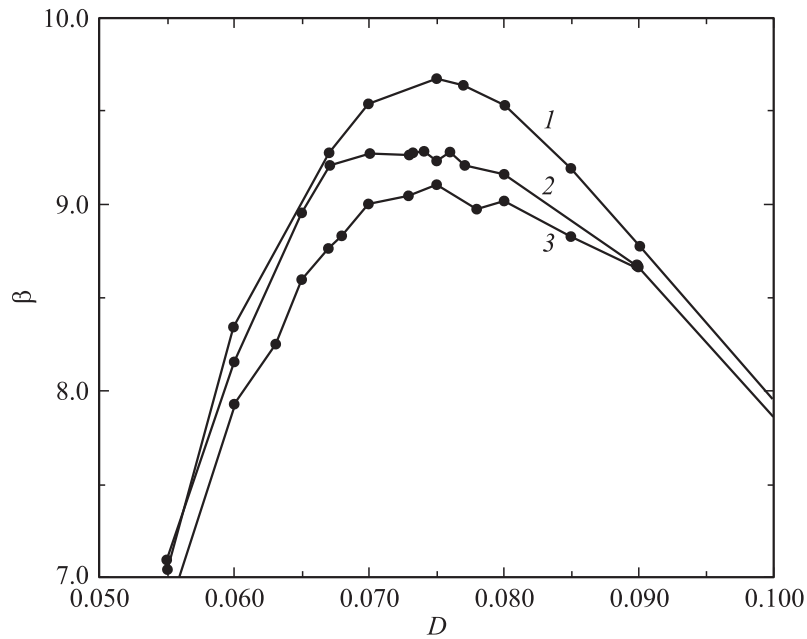
В настоящей работе представлена возможность реализации явления СР в классической бистабильной системе, обусловленная воздействием на нее аддитивного белого шума и хаотического сигнала, генерируемого системой в режиме спирального аттрактора [9]. Особенностью спирального хаоса является то, что он может рассматриваться как суперпозиция гармонического шума и широкополосного шума, хотя генерируется нелинейной детерминированной системой. В недавних работах [10,11] было показано, что стохастические характеристики спирального хаоса качественно эквивалентны периодическим автоколебаниям генератора с шумом. В частности, установлено, что автокорреляционная функция спирального аттрактора спадает во времени экспоненциально со скоростью, определяемой коэффициентом диффузии мгновенной фазы.

Рассмотрим классический бистабильный передемпфированный осциллятор, реализующий эффект СР:

$$\dot{x} = x - x^3 + A \cos(\omega_0 t) + \sqrt{2D} \xi(t), \quad (2)$$

где  $A_0$  и  $f_0$  — безразмерные амплитуда и частота внешнего сигнала,  $\xi(t)$  — белый шум интенсивности  $D$ . Бистабильный потенциал  $U(x) = -0.5 \cdot x^2 + 0.25 \cdot x^4$  характеризуется потенциальным барьером  $\Delta U_0 = 0.25$ . Амплитуда сигнала  $A_0$  предполагается достаточно малой, чтобы исключить переключения в отсутствие шума. Выберем частоту и амплитуду внешнего сигнала  $\omega_0 = 0.01$  и  $A_0 = 0.05$  и произведем расчет коэффициента усиления на выходе осциллятора в зависимости от  $D$  (рис. 1, кривая 1).

Максимум коэффициента усиления наблюдается при интенсивности шума  $D = 0.075$ . Если аналитически рассчитать частоту Крамерса для данной интенсивности шума, то она получится равной  $2\pi F_k = 0.009696$ . Это в пределах допустимой погрешности совпадает с частотой внешнего гармонического воздействия.



**Рис. 1.** Зависимость коэффициента усиления  $\beta$  от интенсивности шума: 1 — при воздействии гармоническим сигналом; 2, 3 — при воздействии хаотическим сигналом ( $x$  — координата системы Ресслера, 2 — для  $m = 6.5$ , 3 — для  $m = 7.7$ ).

Теперь в качестве внешнего сигнала используем одну из координат спирального аттрактора Ресслера:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bx^3 + A_0x_1 + \sqrt{2D}\xi(t), \\ \dot{x}_1 &= (-y_1 - z_1)/\tau, \\ \dot{y}_1 &= (x_1 + ry_1)/\tau, \\ \dot{z}_1 &= (r - mz_1 + x_1z_1)/\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $r = 0.2$ ;  $m = 6.5$  — фиксированные параметры осциллятора Ресслера; множитель  $\tau$  введен с целью управления базовой частотой спирального аттрактора. Выберем эту частоту близкой к значению  $\omega_0 = 0.01$ , что

при заданных  $r$  и  $m$  соответствует  $\tau = 106.8$ .  $A_0$  — масштабный множитель, который рассчитывался таким образом, чтобы среднеквадратичная амплитуда  $x$  — координаты осциллятора Ресслера — была равна амплитуде гармонического воздействия  $A = 0.05$ .

Заметим, что в рассматриваемом случае на бистабильный осциллятор подается сигнал с конечной шириной основной спектральной линии, которая определяется коэффициентом эффективной диффузии фазы  $B_{eff}$  [10,11]:

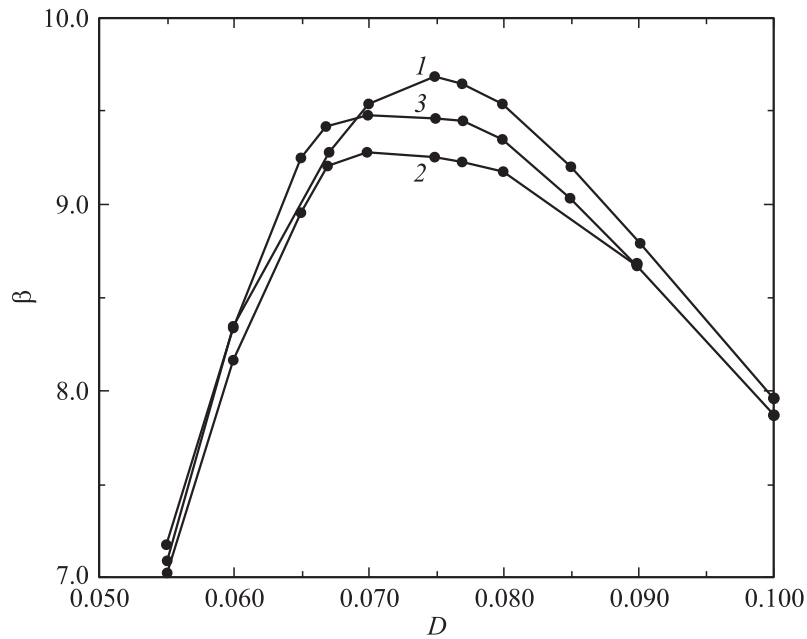
$$S(\omega) = C \frac{B_{eff}}{B_{eff}^2 + (\omega - \omega_0)^2}, \quad C = \text{const.} \quad (4)$$

Рассчитав зависимость коэффициента усиления от интенсивности шума, получим результат, представленный на рис. 1 (кривая 2). Максимум кривой наблюдается при той же интенсивности шума  $D = 0.075$ , что и для воздействия гармоническим сигналом, и имеет несколько меньшую величину в сравнении с кривой 1. Точное определение максимума затруднено, поскольку кривая более пологая.

Если на бистабильный осциллятор подать сигнал с большим коэффициентом диффузии, чем в первом случае (т.е. с более широкой спектральной линией), то кривая зависимости коэффициента усиления от интенсивности шума будет проходить ниже (кривая 3).

В работе [7] на осциллятор Крамерса воздействовал сигнал в виде гармонического шума. Он получался линейной фильтрацией белого шума (двумерный процесс Орнштейна–Уленбека). Было показано, что конечность ширины спектральной линии приводит к уменьшению коэффициента усиления. Причем чем шире линия, тем меньше коэффициент усиления. Именно это и объясняет результаты, показанные на рис. 1 (кривые 1, 2 и 3).

Рассматриваемая нами модель сигнала (хаотические колебания в режиме спирального аттрактора) по спектральным свойствам подобна гармоническому шуму, рассматриваемому в [7]. Однако имеются отличия: плотность вероятности переменной  $x$  существенно иная, а в спектре, кроме узкополосной компоненты на основной частоте имеются спектральные линии на ее гармониках, а также широкополосный пьедестал, связанный с флуктуациями амплитуды колебаний. Чтобы выяснить, что больше влияет на эффект СР, конечная ширина основной спектральной линии или амплитудные флуктуации, были проведены



**Рис. 2.** Зависимость коэффициента усиления  $\beta$  от интенсивности шума: 1 — при воздействии гармоническим сигналом; 2, 3 — при воздействии хаотическим сигналом, генерируемым осциллятором Ресслера (2 — для сигнала  $x(t)$  при  $m = 6.5$ , 3 — для сигнала вида (5)).

расчеты коэффициента усиления для бистабильного осциллятора, на который воздействовал сигнал вида:  $A \cos[\phi(t)]$ , где  $\phi(t)$  — мгновенная фаза осциллятора Ресслера, которая рассчитывается по формуле  $\phi = \arctg(y/x)$ ;  $A$  — амплитуда сигнала, которая выбиралась равной амплитуде гармонического сигнала  $A = 0.05$ , т. е. при этом исключаются амплитудные флуктуации сигнала.

При таком воздействии кривая зависимости проходит ближе к кривой, построенной для гармонического сигнала (рис. 2, кривая 3, кривая была построена для параметра осциллятора Ресслера  $m = 6.5$ ). Максимальное значение коэффициента усиления наблюдается при той же интенсивности шума, что и для предыдущих случаев. Таким образом,

широкополосная компонента хаотического сигнала качественно не повлияла на эффект СР.

По реализациям  $x(t)$  как для гармонического воздействия, так и для воздействия сигналом, генерируемым осциллятором Ресслера, была рассчитана средняя частота переключений (частота Крамерса). При этом получили, что в первом случае круговая частота Крамерса равна  $2\pi F_k = 0.009010$ , а во втором случае  $2\pi F_k = 0.009377$ . Эти результаты хорошо согласуются с теоретическим расчетом ( $2\pi F_k = 0.009696$ ) и в пределах погрешности совпадают с частотой гармонического воздействия  $\omega_0 = 0.01$ .

Таким образом, нами установлено, что эффект СР реализуется в бистабильной системе при возбуждении ее хаотическим сигналом спирального типа. При этом с ростом ширины спектральной линии базовой частоты аттрактора Ресслера коэффициент усиления падает в соответствии с результатами работы [7].

## Список литературы

- [1] Benzi R., Sutera A., Vulpiani A. // J. Phys. A: Math. Gen. 1981. V. 14. P. L453–457.
- [2] Benzi R., Parisi G., Sutera A., Vulpiani A. // Tellus. 1982. V. 34. P. 10–16.
- [3] Nicolis C. // Tellus. 1982. V. 34. P. 1–9.
- [4] Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гаей Л. // УФИ. 1999. Т. 169. № 1. С. 7–39.
- [5] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
- [6] Anishchenko V.S., Neiman A.B., Safonova M.A. // J. Stat. Phys. 1993. V. 70. N 1/2. P. 183–196.
- [7] Neiman A., Shimansky-Geier L. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. N 19. P. 2988–2991.
- [8] Kramers H.A. // Physica. 1940. V. 7. P. 284–312.
- [9] Arneodo A., Collet P., Tressev C. // Commun. Math. Phys. 1981. V. 79. P. 573–579.
- [10] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И. // УФН. 2005. Т. 175. N 2.
- [11] Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Okrokvetskova G.A., Strelkova G.I. // Physica A. 2003. V. 325. P. 199–212.