

09

Взаимосвязь спектров, полученных по временным реализациям системы с потоковым временем и ее отображения возврата

© А.А. Короновский, А.В. Стародубов, А.Е. Храмова

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского,
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru, Starodubov AV@nonlin.sgu.ru,
rabbit@nonlin.sgu.ru

Поступило в Редакцию 24 апреля 2006 г.

Исследуется взаимосвязь между динамическими системами с потоковым и дискретным временем. Показано, каким образом изменяются некоторые важные характеристики потока при проведении процедуры сечения Пуанкаре. Наглядно продемонстрировано, какую часть информации о поведении системы с непрерывным временем можно обнаружить в получаемом отображении. Результаты теоретического анализа проиллюстрированы с помощью численного моделирования на примере системы Ресслера и генератора „Torus“.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Tp

Известно, что существуют два класса динамических систем, которые широко используются для описания самых различных эффектов и явлений: системы с непрерывным временем (потоки) и системы с дискретным временем (отображения) [1,2]. Оба класса систем являются равноправными, но, в силу своей специфики, методы и подходы к исследованию таких систем различаются естественным образом. В то же самое время потоковая система размерностью D может быть сведена к отображению размерностью на единицу меньше с помощью сечения Пуанкаре [3,4]. Очевидно, что поскольку подобные системы связаны друг с другом, то и различные явления и феномены, наблюдаемые в таких системах и описываемые в разных терминах для систем с непрерывным и потоковым временем, также будут связаны между собой. В частности, бифуркации в потоках и отображениях связаны друг с другом (см., например, [5,6]), существует связь между различными

типами синхронного поведения систем с непрерывным и дискретным временем [7,8].

Как уже отмечалось выше, процедура сечения Пуанкаре выполняет редукцию потоковой системы к дискретному отображению возврата с помощью сечения фазового потока поверхностью Пуанкаре. В случае хаотической динамики в выбранную секущую поверхность попадают точки с различным временем возврата, при этом информация о длительности эти интервалов времени, равно как и все точки динамической системы, не попавшие в выбранную поверхность сечения, исключаются из рассмотрения. Очевидно, что при таком переходе от исходной реализации к отображению возврата значительная часть информации о динамике исследуемой системы оказывается потерянной. Важным является вопрос, насколько отличаются характеристики динамической системы с дискретным временем, полученной с помощью процедуры сечения Пуанкаре, от характеристик исходной потоковой системы.

В настоящей работе рассматривается, как связаны между собой спектры исходной динамической системы с непрерывным временем и ее отображения последования, полученного с помощью процедуры сечения Пуанкаре. Необходимо отметить, что в случае хаотической динамики системы этот вопрос является нетривиальным, так как в этом случае система может демонстрировать поведение на бесконечном числе временных масштабов, значительная часть из которых исключается из рассмотрения при выполнении процедуры сечения Пуанкаре. Цель данной статьи показать, каким образом связаны спектры динамической системы и редуцированного из рассматриваемой системы отображения возврата.

Рассмотрим потоковую динамическую систему размерности D

$$\mathbf{X}(t) = \{X^1(t), X^2(t), \dots, X^i(t), \dots, X^D(t)\}. \quad (1)$$

Нас будет интересовать Фурье-спектр $S(f)$, полученный по временной реализации $X^i(t)$ динамической системы $\mathbf{X}(t)$. Необходимо отметить, что данные, полученные в ходе натуральных и численных экспериментов, как правило, представляют собой набор состояний динамической системы $\mathbf{X}(t_k)$ с некоторым эквидистантным шагом дискретизации по времени Δt ($t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots, K$, где K — количество точек в анализируемой временной реализации). Известно, что наибольшая частота спектра определяется шагом дискретизации данных Δt : $f_K = 1/(2\Delta t)$ (см., например, [9]). Пусть Фурье-спектр $S(f)$, характеризующий поведение системы, содержит основную спектральную компоненту $S(f^m)$.

В таком случае в рассматриваемой реализации $X^D(t)$ можно выделить характерный временной масштаб T , соответствующий основной частоте в спектре $S(f^m)$, т.е. $T = 1/f^m$.

Выполним для потоковой динамической системы $\mathbf{X}(t)$ процедуру сечения Пуанкаре, выбрав для простоты в качестве секущей поверхность $X^D = \text{const}$. Тогда будет получено следующее отображение возврата с размерностью $D - 1$

$$\mathbf{X}_n = \{X_n^1, X_n^2, \dots, X_n^i, \dots, X_n^{D-1}\}, \quad (2)$$

где n — номер пересечения фазовой траекторией выбранной плоскости сечения Пуанкаре в заданном направлении, X_n^i — значения координаты $X^i(t)$ в момент n -го пересечения.

Рассмотрим Фурье-спектр для полученного отображения возврата (2) по временной реализации X_n^i . Временная реализация координаты X_n^i отображения возврата (2) образована лишь теми точками исходной реализации координаты $X^i(t)$ потоковой системы (1), которые следуют в среднем с периодом T , соответствующим основной спектральной компоненте f^m в Фурье-спектре потоковой системы $S(f)$, для которой строится сечение Пуанкаре. Иными словами, для компоненты X_n^i полученного отображения возврата шаг дискретизации по времени будет равняться $\Delta t^p \approx T$ в единицах непрерывного времени исходной системы (1). В таком случае длина временной реализации полученного отображения будет определяться как $L = [K/T]$, квадратные скобки обозначают целую часть числа. Таким образом, наибольшая частота f_L в Фурье-спектре рассматриваемой координаты X_n^i отображения возврата (2) может быть записана в следующем виде:

$$f_L = \frac{1}{2\Delta t^p} \approx \frac{1}{2T} = \frac{f^m}{2}. \quad (3)$$

Таким образом, можно предположить, что Фурье-спектр координаты X_n^i отображения возврата (2) будет являться несколько трансформированным (из-за того, что время возврата изображающей точки для каждого пересечения фазовой траекторией секущей поверхности разное) участком Фурье-спектра исходной потоковой системы (1), а именно в нем будут наблюдаться все спектральные компоненты, вплоть до $f^m/2$. Очевидно, что в случае периодических колебаний спектр отображения, полученного из потоковой системы, представляет собой неискаженный

участок спектра исходной потоковой системы в диапазоне частот $f \in (0, f^m/2)$.

Отметим, что шаг дискретизации по времени в отображении традиционно принимается равным единице ($\Delta t_n = 1, t_n = n, n = 0, 1, \dots, L$). Следовательно, максимальная частота в Фурье-спектре отображения (2) ограничена значением $1/2$. Тогда можно ввести нормировочный коэффициент k , связывающий частоту в Фурье-спектре, вычисленную с „реальным“ шагом дискретизации по времени Δt , с формально введенной частотой для дискретного времени. Для этого нормировочного коэффициента получаем выражение

$$k = \frac{1}{f^m}, \quad (4)$$

которое может быть использовано для выявления той спектральной компоненты в Фурье-спектре исходной потоковой динамической системы, которая может быть ответственна за доминирующую спектральную компоненту Фурье-спектра отображения.

Рассмотрим два модельных примера, иллюстрирующих взаимосвязь спектров, полученных по временным реализациям систем с потоковым временем и их отображений возврата.

В качестве первого модельного примера выберем систему Ресслера [4,10]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_d y - z, \\ \dot{y} &= \omega_d x + a y, \\ \dot{z} &= p + z(x - c), \end{aligned} \quad (5)$$

где значения управляющих параметров, выбранные по аналогии с работой [11]: $a = 0.15, p = 0.2, c = 10.0, \omega = 0.93$, — соответствуют хаотической динамике изучаемой системы. На рис. 1 приведен Фурье-спектр хаотического сигнала, построенный по временным реализациям $y(t)$ -координаты (рис. 1, *a*) и $x(t)$ -координаты (рис. 1, *b*) системы (6). Как видно из рисунка, основной частотной компонентой является $f^m \simeq 0.589$. Серым цветом на рис. 1, *b* показан диапазон частот $(0; f^m/2)$.

Выполним редукцию потоковой системы Ресслера (5) к дискретному отображению возврата с помощью сечения фазового потока поверхностью Пуанкаре $y = 0$ при условии $y < 0$. В общем виде это отображение

может быть записано:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= F_x(x_n, z_n), \\z_{n+1} &= F_z(x_n, z_n).\end{aligned}\tag{6}$$

В отображении (6) введены следующие обозначения: x_n и z_n — переменные состояния x и z системы Ресслера (5) в момент пересечения координатой y плоскости $y = 0$ в положительном направлении, n — номер пересечения. Данное отображение (6) не имеет аналитической формы записи и может быть получено численным образом.

На рис. 1, *c* показан Фурье-спектр (график 1), построенный по временной реализации x_n -координаты системы (6). Для наглядности на этом же рисунке продемонстрирован участок спектра компоненты x исходной системы (график 2), выделенный серым цветом на рис. 1, *b*, перемасштабированный с коэффициентом $k \simeq 1.698$ (4). Приведенные спектры в высокой степени совпадают, что подтверждает выводы, сделанные ранее.

В качестве второго примера рассмотрим потоковую систему „Torus“ [12,13], представляющую собой модель радиотехнического генератора, состоящего из индуктивности, емкости и нелинейного элемента с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой. Важной особенностью рассматриваемой системы является наличие в ней двух характерных временных масштабов, иными словами, двух характерных частот колебаний.

Рассматриваемый генератор описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{\alpha}{\gamma} \eta(y - x), \\ \dot{y} &= -\frac{\eta(y - x) + z}{\gamma}, \\ \dot{z} &= \gamma y.\end{aligned}$$

Значения управляющих параметров были выбраны $\alpha = 2.78$ и $\gamma = 3.00$. При выбранных значениях управляющих параметров рассматриваемый генератор демонстрирует хаотические колебания [14]. Функция $\eta(\xi)$ является безразмерной вольт-амперной характеристикой входящего в конструкцию генератора нелинейного элемента и определяется как

$$\eta(\xi) = \frac{1}{2} \xi + \frac{3}{4} (|\xi + 1| - |\xi - 1|).$$

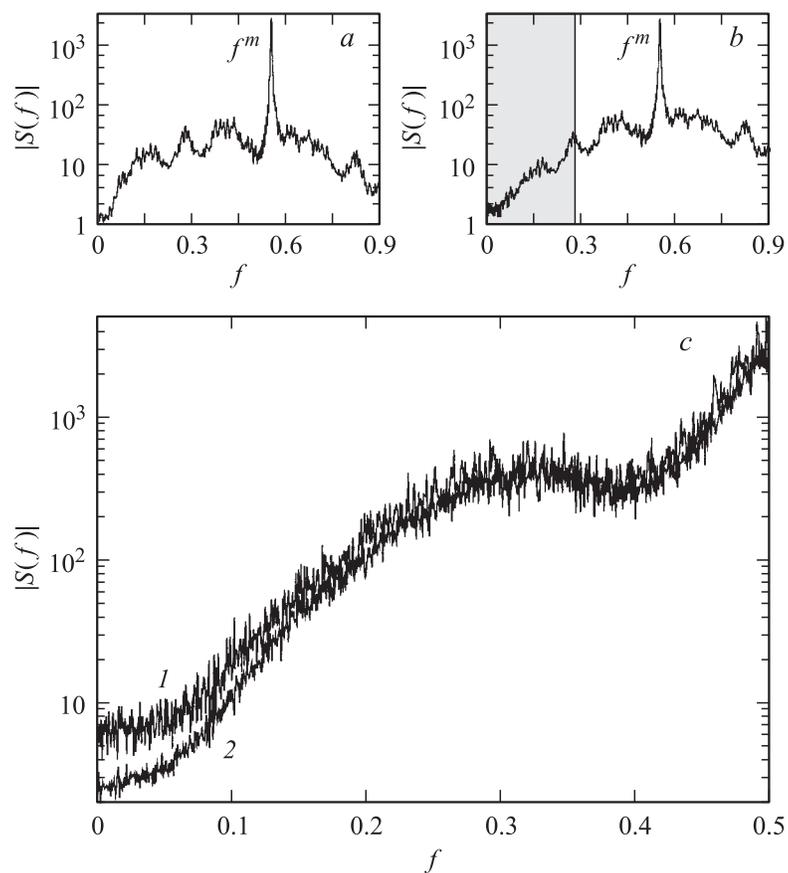


Рис. 1. *a* — Фурье-спектр хаотического сигнала, построенный по временной реализации y координаты системы Ресслера (5); *b* — Фурье-спектр хаотического сигнала, построенный по временной реализации x координаты системы Ресслера (5); *c* — график 1 — Фурье-спектр хаотического сигнала, построенный по временной реализации x координаты отображения возврата (6), полученного из системы Ресслера (5); график 2 — фрагмент Фурье-спектра хаотического сигнала, построенный по временной реализации x координаты системы Ресслера (5), перемасштабированный с коэффициентом $k \simeq 1.698$.

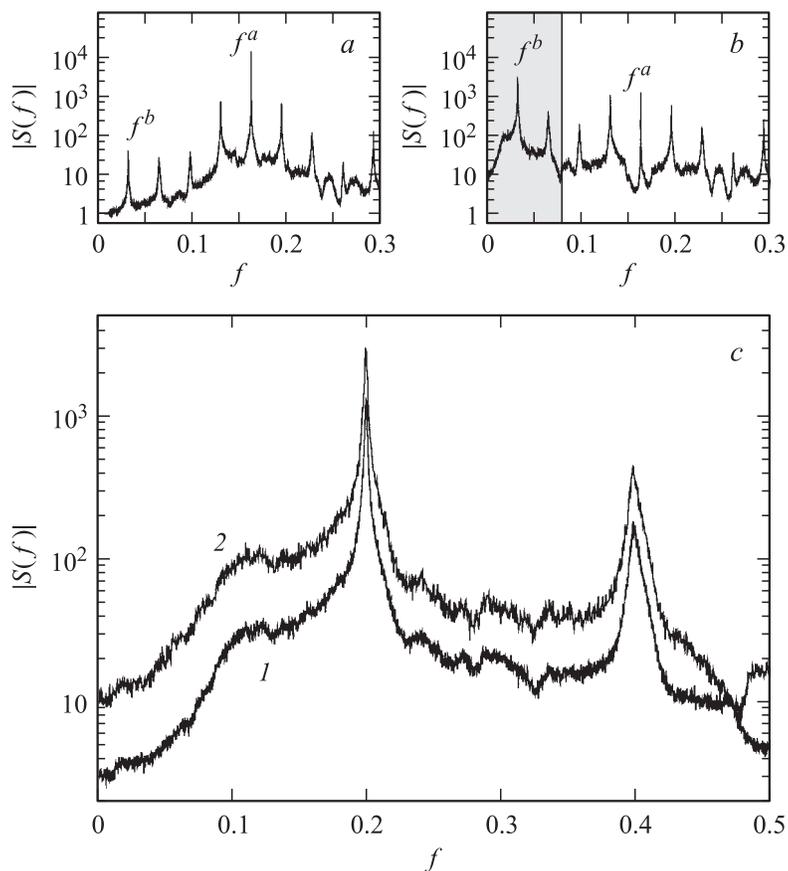


Рис. 2. *a* — Фурье-спектр хаотического сигнала, построенный по временной реализации y координаты системы „Torus“ (7); *b* — Фурье-спектр хаотического сигнала, построенный по временной реализации x координаты системы „Torus“ (7); *c* — график 1 — Фурье-спектр хаотического сигнала, построенный по временной реализации x координаты отображения возврата (6), полученного из системы „Torus“ (7); график 2 — фрагмент Фурье-спектра хаотического сигнала, построенный по временной реализации x координаты системы „Torus“ (7), перемасштабированный с коэффициентом $k \simeq 6.173$.

На рис. 2, *a* и *b* приведены Фурье-спектры хаотических сигналов, построенных по временным реализациям соответственно координаты y и x системы (7). На рис. 2, *a* отмечены две характерные частоты в спектре: $f^a \simeq 0.162$ и $f^b \simeq 0.032$, причем основной спектральной компонентой является $f^m = f^a$. Следовательно, нормировочный коэффициент равен $k \simeq 6.173$ (4). Серым цветом на рис. 2, *b* показаны частоты вплоть до компоненты $f^m/2 \simeq 0.081$, $(0; f^m/2)$.

Выполнив для потоковой системы (7) процедуру сечения Пуанкаре, получим отображение возврата вида (6). Сечение фазового потока проводилось плоскостью $y = 0$ при условии $\dot{y} < 0$. На рис. 2, *c* (график 1) показан Фурье-спектр, построенный по временной реализации x_n -координаты отображения возврата вида (6), редуцированного из (7). На этом же рисунке (график 2) приведен перемасштабированный с коэффициентом k участок спектра исходной потоковой системы с выделенной серым цветом областью на рис. 2, *b*. Приведенные спектры, как и для примера с системой Ресслера, демонстрируют хорошее качественное и количественное совпадение, что еще раз подтверждает сделанные выше выводы. Отметим, что в точности соответствуют друг другу максимальные по мощности частоты в приведенных спектрах 1 и 2.

Таким образом, в данной работе проведен анализ того, каким образом сечение Пуанкаре изменяет спектр динамической системы. Наглядно показано, что процедура сечения Пуанкаре играет роль своеобразного фильтра нижних частот. Диапазон частот, который можно будет обнаружить для полученного отображения возврата, определяется основной частотой спектра исходной потоковой системы.

В заключение рассмотрим, каким образом процедура сечения Пуанкаре влияет на еще одну важную характеристику динамической системы, а именно на поведение ляпуновских показателей системы. Как известно, для динамической системы с потоковым временем (1) ляпуновские показатели определяются следующим образом [4]: $\Lambda_{flow} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \ln \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| / t$. Тогда ляпуновские показатели рассматриваемого отображения возврата (2) могут быть получены как $\Lambda_{map} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \ln \|\tilde{\mathbf{x}}_n\| / n = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \ln \|\tilde{\mathbf{x}}_n\| / (ft) = \Lambda_{flow} / (ft)$.

Итак, в работе показано, что редукция потоковой системы к отображению с помощью процедуры сечения Пуанкаре исключает из рассмотрения часть информации о поведении системы. Тем не менее динамика редуцированного отображения несет в себе значительную долю информации об исходной потоковой системе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-02-16273), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-4167.2006.2), Фонда некоммерческих программ „Династия“ и Международного центра фундаментальной физики (г. Москва).

Список литературы

- [1] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
- [2] Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [3] Hénon M. // Physica. 1982. V. D5. P. 412–414.
- [4] Кузнецов С.П. Динамический хаос. Сер. Современная теория колебаний и волн. М.: Физматлит, 2001.
- [5] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
- [6] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
- [7] Astakhov V., Hasler M., Kapitaniak T., Shabunin A., Ahishchenko V. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58(5). P. 5620–5628.
- [8] Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова А.Е. // Письма в ЖЭТФ. 2005. Т. 82(3). С. 176–179.
- [9] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.T. Numerical Recipes. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [10] Rössler O.E. // Phys. Lett. A. 1976. V. 57(5). P. 397–398.
- [11] Zheng Z., Hu G. // Phys. Rev. E. 2000. V. 62(6). P. 7882–7885.
- [12] Matsumoto T., Chua L.O., Tokunaga R. // IEEE Trans. Circuits and Syst. 1987. V. 34(3). P. 240.
- [13] Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. XXXVIII(11). С. 1195–1203.
- [14] Короновский А.А., Храмов А.Е. // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50(7). С. 1.