

01

## Обобщенная К-энтропия и энтропия Гиббса системы точечных вихрей

© В.Я. Рудяк, Д.Ф. Кранчев

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет  
 Новосибирский государственный технический университет  
 E-mail: rudyak@sibstrin.ru

Поступило в Редакцию 10 апреля 2006 г.

Вводится обобщенная К-энтропия (энтропия Колмогорова–Синяя). На примере полигональной системы точечных вихрей показано, что такая энтропия позволяет не только характеризовать свойства локальной неустойчивости и перемешивания динамической системы, но и описывать ее структурную перестройку, в частности, переход от одного стационарного состояния к другому, характеризуемый тем или иным сценарием объединения вихрей. Построена энтропия Гиббса, установлена ее связь с обобщенной К-энтропией (ОК-энтропия) и показано, что обе описывают переход системы к равновесию.

PACS: 05.45.-a

Обнаружение и изучение динамического хаоса в физических системах различной природы в последние сорок лет является одним из центральных направлений исследований так называемой нелинейной физики, объединяющей на первый взгляд столь далекие ее разделы, как гидродинамика, молекулярная физика, физика плазмы, радиофизика, нелинейная оптика и т. д. (см., например, [1]). Характерными признаками наличия динамического хаоса в системе являются локальная неустойчивость и перемешивание ее фазовых траекторий, для описания которых вводится К-энтропия. Мы будем следовать ее наиболее удобному для целей настоящей работы определению [1]

$$K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \tilde{\Delta}(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \left\langle [\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t, \varepsilon)]^2 \right\rangle^{1/2}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{r}(t, \varepsilon)$  — две фазовые траектории системы, начальные условия которых отличаются на  $\varepsilon \ll l$ , а угловые скобки означают

усреднение. Последовательность предельных переходов здесь принципиальна, поскольку характер эволюции функции  $\tilde{\Delta}(t)$  существенно зависит от  $\varepsilon$ , в частности, разным  $\varepsilon$  соответствуют различные инкременты нарастания возмущений.

Вместе с тем численные расчеты для точечных вихрей и молекулярных систем показывают [2–4], что для бесконечно малых возмущений интегральные характеристики рассматриваемых систем не меняются. Такой интегральной величиной является и К-энтропия (1). Обычно бесконечно малыми можно считать возмущения с амплитудами  $A \leq 10^{-6}$ . Таким образом, для бесконечно малых возмущений в определении (1) первый предел вполне можно опустить. Получающаяся в результате К-энтропия определяет инкремент нарастания возмущений  $\alpha$ , являясь тем самым количественной характеристикой локальной неустойчивости. Это соответствует функции  $\tilde{\Delta}(t) \sim e^{\alpha t}$ .

Функция  $\tilde{\Delta}(t)$ , однако, имеет значительно более сложную структуру, существуют области ее экспоненциального и неэкспоненциального развития [2–4]. Наличие в (1) предельного перехода по времени не позволяет увидеть последние. Вместе с тем локальная неустойчивость имеет место лишь на линейной стадии развития возмущения. Таким образом, наличие предельного перехода по времени в (1) не позволяет анализировать развитие наиболее интересной нелинейной стадии развития возмущений. По этой причине наряду с К-энтропией (1) полезно изучить и поведение обобщенной К-энтропии (ОК-энтропии):  $\tilde{K}_g = t^{-1} \ln a \tilde{\Delta}$ , где  $a$  — некоторая константа.

В данной работе поведение ОК-энтропии изучено на примере полигональной системы  $N$  одинаковых точечных вихрей с циркуляцией  $\Gamma$ . Рассматриваемая задача имеет известное точное решение, которое для комплексных переменных  $z_n = x_n + iy_n$  записывается в виде:  $z_n(t) = R \exp[2\pi i(n-1)/N + \Omega_N t]$ , где  $\mathbf{r}_n = x_n, y_n$  — координаты вихря  $n$ . Таким образом, система вращается с угловой скоростью  $\Omega = 2\pi\Gamma(N-1)/(8\pi^2 R^2)$ , где  $R$  — радиус окружности, в которую вписан многоугольник. В представляемых расчетах использовалось 32 вихря. Чтобы ускорить эволюцию системы, вводились контролируемые малые возмущения, исходная конфигурация вихрей возмущалась по синусоидальному закону, с длинами волны, кратными числу вихрей:  $\Lambda_{16} = 2\pi R/16$ ,  $\lambda_8 = 2\pi R/8$ , с амплитудами, соответственно равными  $10^{-6}$ ,  $10^{-10}$ .

Данная система неустойчива, характер устойчивости ее траекторий в пространстве конфигураций определяется по эволюции функции

$$\Delta(t) = \frac{1}{NR} \left\{ \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i^\varepsilon(t)]^2 \right\}^{1/2},$$

где  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$  — точное решение для  $i$ -го вихря, а  $\mathbf{r}_i^\varepsilon$  — численное решение, полученное при введении начальных возмущений с амплитудой  $\varepsilon$ . В результате развивающейся неустойчивости исходная система трансформируется сначала в систему 16 вихревых пар, затем в 8 четверок, т.е. имеет место последовательность неустойчивых стационарных состояний.

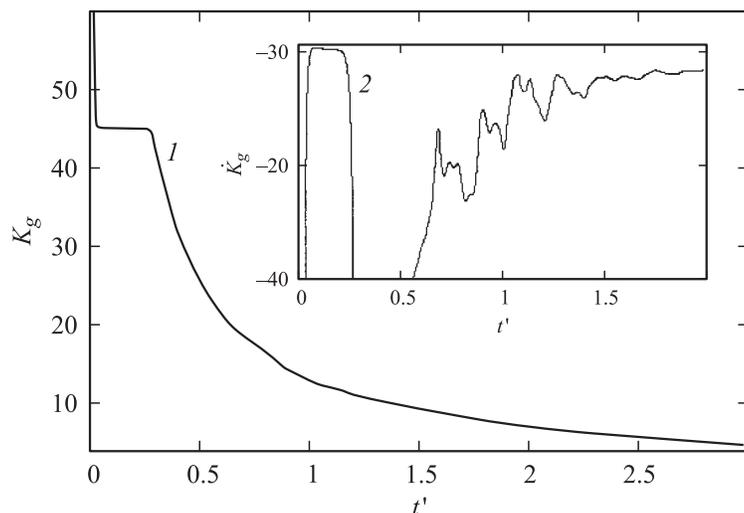
ОК-энтропия определяется тогда соотношением

$$K_g = (t')^{-1} \ln a\Delta. \quad (2)$$

Здесь  $t' = t/T_N = 2\pi t/\Omega$ . Эволюция этой функции представлена на рис. 1 (параметр  $a$  выбирался так, чтобы  $K_g$  была положительной). На стадии локальной неустойчивости ОК-энтропия постоянна (см. рис. 1, кривая 1) и равна инкременту нарастания возмущений. Эта стадия завершается спариванием вихрей. Затем ОК-энтропия монотонно уменьшается. Выход системы на новый стационарный режим сопровождается заметным снижением затухания ОК-энтропии. Таким новым режимом является объединение пар вихрей и образование 8 вихревых структур. В данной системе это наблюдается при  $t' \sim 0.75$ . Именно здесь кривая ОК-энтропии заметно меняет свою кривизну.

Еще более интересно поведение производства ОК-энтропии, (кривая 2 на рис. 1). При образовании четырехвихревых структур производство ОК-энтропии резко меняется. Как показано в [3,4], релаксация рассматриваемой системы имеет квазипериодический характер. Динамически это означает, что данное стационарное состояние разрушается под действием субгармонических возмущений, но затем в течение некоторого времени оно периодически восстанавливается и только спустя некоторое время память об исходном состоянии теряется необратимо. На рис. 2 таким перестройкам четырехвихревых структур отвечают четыре всплеска в диапазоне от  $t' \sim 0.75$  до 1.5.

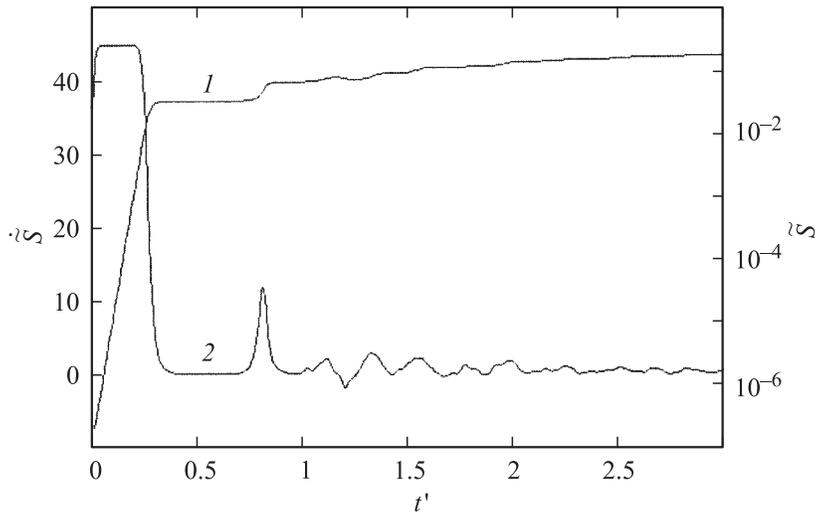
Как известно, гиббсовская энтропия гамильтоновых систем конечного числа частиц постоянна. Поэтому для описания неравновесных



**Рис. 1.** Эволюция обобщенной К-энтропии ( $I$ ) и ее производства ( $2$ ).

состояний вводят тем или иным образом огрубленную энтропию (см., например, [5]). Неприятность такого подхода состоит в том, что так определенная энтропия зависит от величины огрубления  $\varepsilon$  и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  также стремится к нулю. Для системы материальных точек, в частности точечных вихрей, энтропию Гиббса  $S$  вообще не просто задать. Эта энтропия пропорциональна занимаемому системой объему фазового пространства:  $S \sim \Gamma(t)$ . Но система материальных точек занимает в физическом пространстве объем, мера которого ноль. Поэтому соответствующая энтропия оказывается не определенной (или же просто равной нулю).

В численных расчетах энтропия системы принципиально необратима из-за вносимых погрешностей вычислений. В начале расчета эта ошибка порядка  $\varepsilon \sim 10^{-17}$  и не может быть уменьшена (речь идет не о конкретном значении, а о том, что эта величина всегда конечна и больше нуля). Поэтому фазовые траектории, выходящие в начальный момент времени из фазового пространства с характерными размерами порядка  $\varepsilon$ , не различимы. По этой причине соответствующая энтропия начального состояния системы конечна. Изменение с течением



**Рис. 2.** Эволюция энтропии Гиббса (1) и ее производства (2).

времени фазового объема системы пропорционально функции  $\Delta(t)$ . В соответствии с этим эволюция энтропии  $S(t) = k \ln \Gamma(t)$  с течением времени изменяется по закону (с точностью до некоторого постоянного множителя)

$$S = k \ln \Gamma(t_0) \Delta(t) = k \ln \Gamma(t_0) + k \ln \Delta(t) = S_0 + k \ln \Delta(t), \quad (3)$$

где  $S(t_0)$  — некоторое начальное значение энтропии.

Значение энтропии (3) в численных расчетах является универсальной характеристикой системы. Эволюция функции  $\tilde{S} = S - S_0$  показана на рис. 2 (кривая 1). Переход на новый стационарный режим также характеризуется резким изменением энтропии. Фактически последовательное спаривание вихревых структур означает понижение в системе степени порядка, и оно характеризуется повышением энтропии.

Данная система является системой с перемешиванием [3,4]. Поэтому можно показать, что при наличии возмущений конечным ее состоянием является хаос, спектр поля завихренности становится практически сплошным. Как уже указывалось, переход к хаосу осуществлялся через

последовательность стационарных состояний, длины волн которых последовательно удваиваются. В этом смысле это классический сценарий Фейгенбаума с удвоением периода. В данной системе, однако, неустойчивых мод значительно больше, чем искусственно возбуждавшихся. По этой причине в естественных условиях переход к хаосу происходит более сложно. Например, конкурируют возмущения с длинами волн  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$ .

В результате развития неустойчивости реальное гидродинамическое течение, кольцевой слой сдвига, эволюционирует подобно рассмотренной здесь вихревой системе, с образованием первичных вихрей, затем их спариванием и т.д. [6]. Стоит, однако, отметить, что производство энтропии (3) при этом ведет себя не монотонно, на стадии локальной неустойчивости оно постоянно, а затем начинает уменьшаться. После же выхода на итоговый стационарный режим с образованием единой вихревой структуры производство энтропии стремится к нулю. Однако процессы структурной перестройки системы (спаривание вихрей, их четверение и т.п.) сопровождаются локальным ростом производства энтропии (см. рис. 2, кривую 2). В этой связи стоит отметить, что в работе [7] был предложен принцип минимума производства энтропии, согласно которому эволюция системы при неравновесных фазовых переходах происходит с уменьшением производства энтропии.

В заключение отметим, что в реальных системах также имеет место огрубление фазового пространства динамических переменных системы. Это огрубление диктуется принципом неопределенности Гейзенберга и также дает возможность конструктивного определения фазового объема дискретной системы точечных частиц.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 01-01-00045, 03-01-06145) и программы Минобрнауки „Развитие научного потенциала высшей школы“ (код проекта РНП 2.1.1.471).

## Список литературы

- [1] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
- [2] Рудяк В.Я., Иванов Д.А. // Докл. АН ВШ России. 2003. № 1. С. 30–38.
- [3] Рудяк В.Я., Борд Е.Г., Кранчев Д.Ф. // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. В. 6. С. 20–24.

- [4] Рудяк В.Я., Борд Е.Г., Кранчев Д.Ф. // Докл. АН ВШ РФ России. 2004. № 2 (3). С. 48–57.
- [5] Рудяк В.Я. Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. Новосибирск: Наука, 1987.
- [6] Рудяк В.Я., Савченко С.О. // СибЖИМ. 2002. Т. V. № 4 (12). С. 68–77.
- [7] Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. М.: ТОО „Янус“, 1995.