

01;09

Обобщенная синхронизация в уравнениях Гинзбурга—Ландау с локальной по пространству связью

© П.В. Попов, А.А. Короновский, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aeh@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 24 января 2006 г.

Рассмотрено установление режимов обобщенной хаотической синхронизации в однонаправленно связанных уравнениях Гинзбурга—Ландау со связью, вводимой в дискретных точках пространства (локальной связью). Показано, что при таком типе связи наблюдается установление режимов обобщенной синхронизации, однако необходимая интенсивность связи существенно выше, чем в случае связи однородной по пространству.

PACS: 05.45.xt

Синхронизация хаотических колебаний является одним из важных фундаментальных нелинейных явлений, активно изучаемых в настоящее время [1]. Подобные исследования, с одной стороны, имеют большое теоретическое значение в плане понимания общих закономерностей взаимодействия сложных нелинейных систем различной природы (физической, химической, биологической и т.д.), а с другой стороны, прикладную значимость, связанную с проблемами передачи информации с использованием детерминированных хаотических колебаний, анализа нейронных ансамблей, диагностики заболеваний и т.д. [2–4].

Весьма важным и активно изучаемым типом хаотической синхронизации является обобщенная синхронизация [5], вводимая в рассмотрение для однонаправленно связанных хаотических систем. Наличие режима обобщенной синхронизации означает, что между векторами состояний ведущей $x_d(t)$ и ведомой $x_r(t)$ систем после завершения переходного процесса устанавливается функциональная зависимость $x_r(t) = F[x_d(t)]$. Вид этой функциональной зависимости может быть различным, например фрактальным [6], и в большинстве случаев ее явный вид найти не удастся. В литературе предложено несколько

способов диагностики наличия режима обобщенной синхронизации между однонаправленно связанными хаотическими системами [5–7]. Обобщенная хаотическая синхронизация была достаточно подробно исследована для систем с малым числом степеней свободы [5–10].

Представляет значительный интерес анализ обобщенной хаотической синхронизации в пространственно распределенных хаотических системах [11–13]. В работах [12,13] был проведен анализ установления режимов обобщенной синхронизации в однонаправленных связанных уравнениях Гинзбурга–Ландау с однородной по пространству диффузионной связью. Однако весьма важным представляется изучение синхронизации и управления хаотическими колебаниями в распределенных системах при воздействии на ведомую систему внешнего сигнала в некотором конечном числе точек пространства (локальная или, как ее еще называют, „игольчатая“ связь) [14,15]. В частности, подобный тип локальной по пространству связи ранее подробно изучался при анализе полной хаотической синхронизации идентичных распределенных систем в работах [14,16].

Целью данной работы является анализ возможности установления обобщенной хаотической синхронизации в пространственно распределенных системах, описываемых уравнениями Гинзбурга–Ландау, при введении локальной связи в конечном числе точек пространства.

Исследуемая математическая модель представляет собой систему двух однонаправленно связанных одномерных комплексных уравнений Гинзбурга–Ландау

$$\partial u / \partial t = u - (1 - i\alpha_d |u|^2 u + (1 + i\beta_d) \partial^2 u / \partial x^2), \quad x \in [0, L], \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \partial v / \partial t = & v - (1 - i\alpha_r) |v|^2 v \\ & + (1 + i\beta_r) \partial^2 v / \partial x^2 + \varepsilon \mathcal{F}[u, v], \quad x \in [0, L] \end{aligned} \quad (2)$$

с периодическими граничными условиями: $u(x, t) = u(x + L, t)$, $v(x, t) = v(x + L, t)$ (L — пространственный период системы), $i = \sqrt{-1}$. Уравнение (1) соответствует ведущей, а уравнение (2) — ведомой пространственно распределенной системе. Функция $\mathcal{F}[u, v]$ описывает однонаправленную связь между взаимодействующими системами и в данной работе имеет вид

$$\mathcal{F}[u, v] = \delta(x - N\Delta X)(u - v), \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака; ΔX — расстояние между точками пространства, в которых введена связь; ε — параметр связи,

характеризующий интенсивность диффузионной связи. Отметим, что $\Delta X = 0$ соответствует случаю однородной диссипативной связи по пространству, изученной ранее в работах [12,13].

Численное моделирование системы уравнений (1) и (2) осуществлялось с помощью явной численной схемы с параметрами $\Delta t = 0.0002$, $\Delta x = L/1024$. Перед включением связи системы в течение некоторого времени оставались несвязанными.

Параметры ведомой (α_r, β_r) и ведущей (α_d, β_d) систем были выбраны следующими: $\alpha_d = 1.5$, $\beta_d = 1.5$, $\alpha_r = 4.0$, $\beta_r = 4.0$, пространственный период системы $L = 40\pi$. При этих значениях управляющих параметров в автономных распределенных системах наблюдаются режимы пространственно-временного хаоса [12,17].

Для диагностики установления режима обобщенной синхронизации в распределенных системах использовался метод вспомогательной системы [7]. Суть метода заключается в следующем: наряду с ведомой системой $v(x, t)$ (2) рассматривается идентичная ей вспомогательная система $v_a(x, t)$. Начальные условия для вспомогательной системы $v_a(x, t_0)$ выбираются отличными от начального состояния ведомой системы $v(x, t_0)$. В случае отсутствия режима обобщенной синхронизации состояния ведомой $v(x, t)$ и вспомогательной $v_a(x, t)$ систем являются различными. В режиме обобщенной синхронизации, в силу выполнения функциональных соотношений $v(x, t) = \mathbf{F}[u(x, t)]$ и соответственно $v_a(x, t) = \mathbf{F}[u(x, t)]$, после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем должны стать идентичными $v(x, t) \equiv v_a(x, t)$. Таким образом, эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущей и ведомой хаотическими системами.

На рис. 1 показаны зависимости разности состояний $|v(x, t) - u(x, t)|^2$ ведомой и ведущей систем, а также разности состояний $|v(x, t) - v_a(x, t)|^2$ ведомой и вспомогательной систем для расстояния между точками локальной связи $\Delta X = 7.36$ и различной интенсивности связи ε . Из рисунка видно, что в обоих случаях колебания ведомой и ведущей системы различны, и по их разности невозможно диагностировать наличие синхронной динамики. Другая ситуация выявляется при анализе поведения ведомой $v(x, t)$ и вспомогательной $v_a(x, t)$ систем.

При малом параметре связи ε состояния ведомой и вспомогательной систем различны (см. рис. 1, *c*), что говорит об отсутствии режима обобщенной хаотической синхронизации. С ростом параметра связи ε в

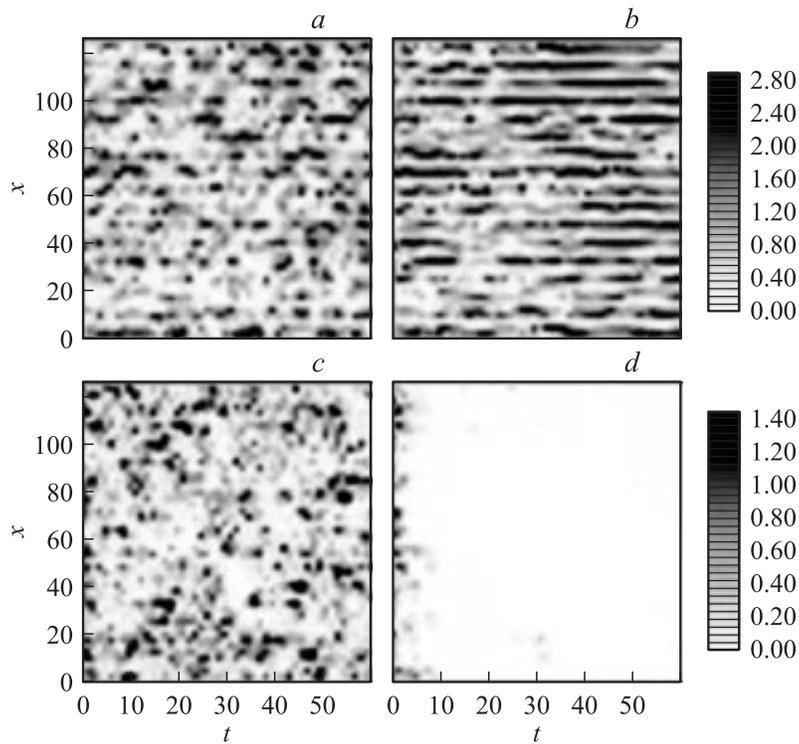


Рис. 1. Пространственно-временные диаграммы амплитуд разностей ведущей и ведомой систем $|u(x, t) - v(x, t)|^2$ (*a, b*) и ведомой и вспомогательной систем $|v(x, t) - v_a(x, t)|^2$ (*c, d*). *a, c* — $\varepsilon = 20$, асинхронный режим; *b, d* — $\varepsilon = 100$, режим обобщенной синхронизации распределенных автоколебательных сред.

однонаправленно связанных пространственно распределенных системах с локальной по пространству связью наблюдается установление режима обобщенной хаотической синхронизации. Это иллюстрирует рис. 1, *d*, из которого хорошо видно, что в последнем случае после переходного процесса в ведомой и вспомогательной системах устанавливаются одинаковые пространственно-временные состояния $v(x, t) \equiv v_a(x, t)$, что соответствует режиму обобщенной синхронизации.

В работах [12,13] было показано, что в случае однородной по пространству связи порог возникновения обобщенной синхронизации ε_{GS}

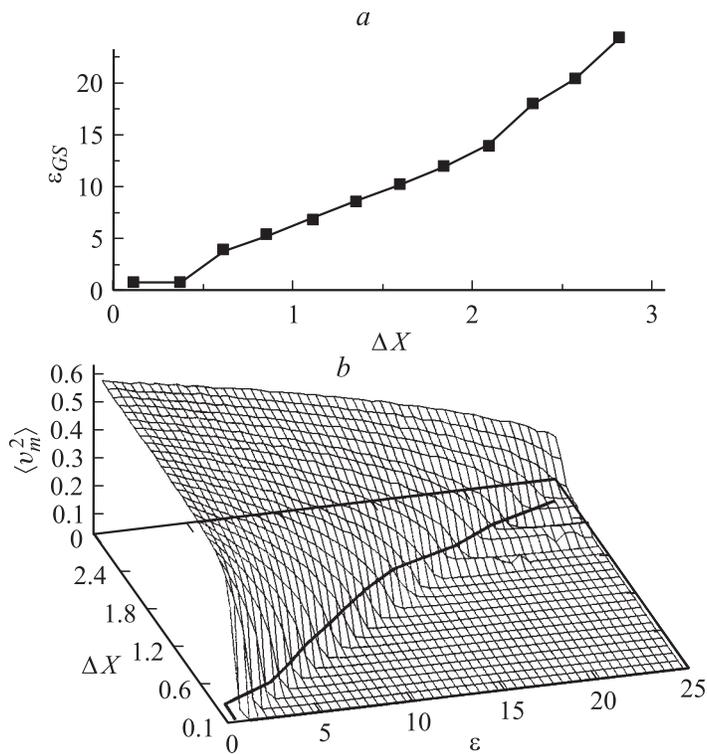


Рис. 2. *a* — зависимость пороговой величины ε_{GS} , при которой возникает обобщенная синхронизация от расстояния ΔX между точками пространства, в которых введена связь. *b* — усредненная по пространству и времени амплитуда колебаний в модифицированной системе v_m в зависимости от параметров связи ε и неоднородности ΔX . Сплошной жирной линией показана граница возникновения обобщенной синхронизации (аналогично *a*).

слабо зависит от управляющих параметров ведущей системы. Аналогичные результаты были получены и при локальной связи между системами. Вместе с тем, как показало исследование, величина интенсивности связи, при которой возникает режим обобщенной хаотической синхронизации, существенно зависит от степени неоднородности связи между системами (от расстояния ΔX между точками пространства, в которых введена связь). Это иллюстрирует рис. 2, *a*, на котором пока-

зана величина ε_{GS} порога возникновения обобщенной синхронизации в связанных системах в зависимости от параметра ΔX . Видно, что с ростом неоднородности (увеличения параметра ΔX) пороговая величина ε_{GS} быстро увеличивается (при $\Delta X = 0$ обобщенная синхронизация возникает при $\varepsilon_{GS} \approx 0.76$).

В работе [12] было показано, что возникновение обобщенной синхронизации в связанных уравнениях Гинзбурга–Ландау определяется поведением модифицированной системы, получающейся введением дополнительной диссипации в автономную ведомую систему. Для случая неоднородной локальной по пространству диффузионной связи модифицированная система запишется в виде

$$\begin{aligned} \partial v_m / \partial t = v_m - (1 - i\alpha_r)|v_m|^2 v_m \\ + (1 + i\beta_r)\partial^2 v_m / \partial x^2 + \varepsilon \mathcal{F}[0, v_m], \quad x \in [0, L]. \end{aligned} \quad (4)$$

Обобщенная хаотическая синхронизация динамических систем возникает при таких значениях параметра связи ε , когда [9,12]: 1) модифицированная система переходит из хаотического режима в стационарный или периодический режим; 2) внешнее воздействие настолько превышает по амплитуде собственные колебания модифицированной системы $v_m(x, t)$, что состояние ведомой системы смещается внешним сигналом в области фазового пространства с сильной диссипацией.

Усредненная по времени и пространству мощность $\langle v_m^2 \rangle$ колебаний в модифицированной системе при различных значениях параметра ε и неоднородности ΔX связи показана на рис. 2, *b*. Как и в случае однородной по пространству связи (см. работу [12]), обобщенная синхронизация возникает, когда в модифицированной системе наблюдаются хаотические колебания, амплитуда колебаний которых для каждого фиксированного значения ΔX уменьшается с ростом интенсивности связи ε (см. рис. 2, *b*). Одновременно мощность внешнего сигнала (которая пропорциональна ε^2) с ростом ε начинает существенно превышать мощность $\langle v_m^2 \rangle$ собственных колебаний модифицированной системы. При этом с увеличением параметра пространственной неоднородности ΔX (с уменьшением числа точек пространства, в которых вводится связь) дополнительная диссипация, вводимая в ведомую систему, уменьшается, и, как следствие, увеличивается пороговая величина интенсивности связи ε_{GS} , при которой наблюдается обобщенная синхронизация (см. рис. 2, *b*). Однако величина средней мощности

колебаний $\langle v_m^2 \rangle$, соответствующая порогу возникновения обобщенной синхронизации ε_{GS} при различных параметрах неоднородности ΔX , как видно из рис. 2, b (жирная линия), остается постоянной в широком диапазоне параметров. Последнее свидетельствует о том, что граница ε_{GS} обобщенной синхронизации определяется в основном динамикой модифицированной пространственно распределенной системы (4) с дополнительной диссипацией.

Таким образом, в работе рассмотрена обобщенная синхронизация связанных распределенных автоколебательных сред, описываемых комплексными уравнениями Гинзбурга–Ландау, с локальной по пространству связью. Показано, что возникновение обобщенной синхронизации обусловлено теми же механизмами, что и в случае однородной по пространству связи, изученными ранее. В то же самое время существует сильная зависимость границы возникновения обобщенной синхронизации от степени неоднородности связи в пространстве.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 05-02-16273 и 06-02-16451), ФЦНТП „Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники“ (НИР 2006-РИ-19.0/001/053, 2006-РИ-19.0/001/054) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ–4167.2006.2). Авторы благодарят также за финансовую поддержку ФНП „Династия“ и МЦФФМ.

Список литературы

- [1] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
- [2] Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D.L., Zhou C. // Phys. Reports. 2002. V. 336. P. 1.
- [3] Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
- [4] Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [5] Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I. // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 980.
- [6] Pyragas K. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. R4508.
- [7] Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M. // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. 4528.
- [8] Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Chaos. 2004. V. 14. C. 603.

- [9] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. P. 067201.
- [10] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // Europhysics Lett. 2005. V. 72. P. 901.
- [11] *Parmananda P.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 1595.
- [12] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. P. 037201.
- [13] *Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 22. С. 9.
- [14] *Kocarev L., Tasev Z., Stojanovski T., Parlitz U.* // Chaos. 1997. V. 7. P. 635.
- [15] *Фрадков А.И.* // УФН. 2005. Т. 175. С. 113.
- [16] *Tasev Z., Kocarev L., Junge L., Parlitz U.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. P. 869.
- [17] *Boccaletti S., Bragard J., Arecchi F.T., Mancini H.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 536.