

04

## К теории ионно-звуковых солитонов в плазме с электронами, распределенными по Цаллису

© И.Д. Дубинова, А.Е. Дубинов

ФГУП „Российский федеральный ядерный центр —  
ВНИИ экспериментальной физики“  
E-mail: dubinov@rol.ru

Поступило в Редакцию 3 февраля 2006 г.

Приведено решение задачи о структуре нелинейного ионно-звукового солитона в плазме с электронной компонентой, распределенной по Цаллису. Показано, что чем меньше параметр  $q$ , тем большее предельное (до опрокидывания) значение числа Маха может иметь солитон. Кроме того, с уменьшением  $q$  солитон становится более пологим и широким.

PACS: 05.45.Yu, 52.35.Sb

Ионно-звуковые волны в плазме относятся к классу продольных электростатических волн, проявляющих сильнонелинейные свойства. В работе [1] с помощью метода механической аналогии (метода псевдопотенциала) была построена простая нелинейная модель динамики ионно-звуковых волн, демонстрирующая режимы периодической несимметричной волны и уединенной волны (солитона). В этих работах также было численно получено, что число Маха  $M$  уединенной волны может принимать значения только из диапазона от 1 до 1.58. Недавно в нашей работе [2] верхний предел 1.58, выше которого солитон опрокидывается, был выведен в виде точной явной формулы

$$M = \sqrt{-1 - W_{-1} \left[ -\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \right]}, \quad (1)$$

где  $W_{-1}(x)$  — одна из ветвей  $W$ -функции Ламберта [2–4].

Математические уравнения данной модели содержали простейшие гидродинамические уравнения для холодной ионной компоненты, уравнение Пуассона для электрического потенциала в волне, и считалось,

что электронная компонента плазмы безынерционна и подчиняется распределению Максвелла–Больцмана.

Известны также работы, в которых изучались особенности нелинейных ионно-звуковых волн в плазме, когда распределение электронов подчинялось другим законам: сумма двух больцмановских экспонент (двухтемпературное распределение) [5,6], сумма больцмановской экспоненты с  $\delta$ -функцией (электроны плазмы и холодный релятивистский электронный пучок) [7] и др. Можно указать на работы, в которых принимались еще более сложные законы распределения электронов [8–11]. В итоге оказалось, что вид распределения электронов существенно влияет на характер ионно-звуковых волн, и в частности на предельную скорость ионно-звукового солитона.

В последние годы получила свое развитие новая обобщенная статистическая механика Цаллиса [12], в которой распределения частиц подчиняются следующим степенным законам (в стандартных обозначениях):

$$f(v_x) = A_q \left[ 1 - (1 - q) \frac{mv_x^2}{2kT} \right]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (2)$$

$$n(\varphi) = n_0 \left[ 1 + (1 - q) \frac{e\varphi}{kT} \right]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (3)$$

где  $q$  — безразмерный параметр, характеризующий степень отклонения законов распределения от распределений Максвелла–Больцмана, а нормировочный множитель  $A_q$  в (3) имеет вид

$$A_q = \begin{cases} \frac{n\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{m(1-q)}{2\pi kT}} & \text{при } -1 < q \leq 1, \\ n \frac{1+q}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)} \sqrt{\frac{m(1-q)}{2\pi kT}} & \text{при } q \geq 1. \end{cases} \quad (4)$$

Легко убедиться, что распределения (2) и (3) переходят в пределе при  $q \rightarrow 1$  в распределения Максвелла и Больцмана соответственно.

Такие распределения возникают при переносе частиц сквозь сильно турбулизованные, фрактальные и другие подобные нерегулярные среды. Что касается плазмы, то известно, что степенные распределения электронов могут реализовываться в экспериментах при столкновительном поглощении плазмой сильной электромагнитной волны (напр., [13]).

Регистрация степенных распределений стимулировала широкомасштабные теоретические исследования электронных ветвей колебаний в такой плазме (напр., [14–16])<sup>\*</sup>.

Однако, как следует из вышеизложенного, характер распределения электронов определяет свойства не только электронных ветвей колебаний, но и ионных. Поэтому является актуальным исследовать, какова динамика нелинейных ионно-звуковых волн в плазме, электроны которой распределены по (2), (3). Особенно важным представляется задача определения предельных скоростей ионно-звуковых солитонов в зависимости от параметра  $q$ .

Поэтому целью нашей работы являлось рассмотрение особенностей ионно-звуковых волн в плазме с электронами, распределенными по (2), (3), и холодными ионами.

Будем исходить из следующего безразмерного уравнения Пуассона в системе отсчета, связанной с волновым возмущением:

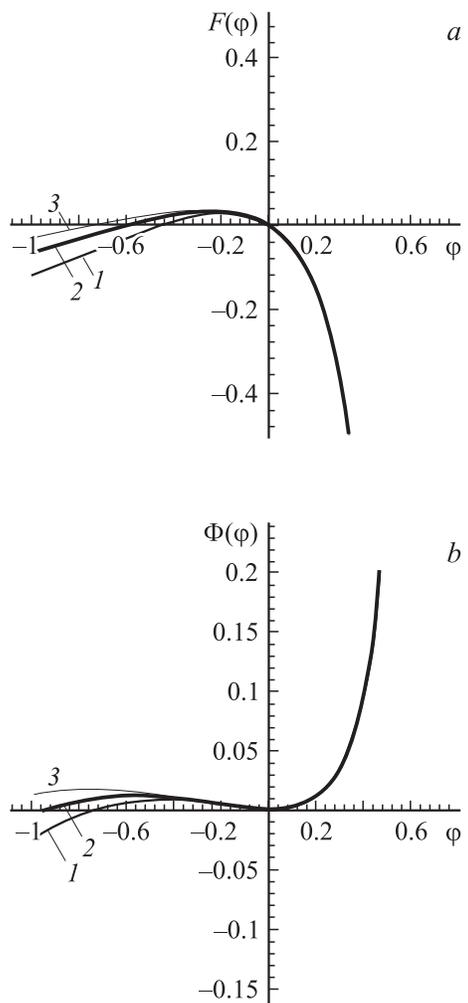
$$\varphi'' = F(\varphi) = \left[ 1 + (1 - q) \frac{\varphi}{T} \right]^{\frac{1}{1-q}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 2\varphi}}, \quad (5)$$

в котором были использованы стандартные нормировочные коэффициенты и обозначения (см. [17]): скорость — на линейную скорость ионного звука, время — на период ионных плазменных колебаний и т.д. Решение этого уравнения можно, в принципе, записать в квадратурах, однако внешний вид такого решения достаточно громоздок и не нагляден, поэтому для анализа свойств решения уравнения (5) воспользуемся методом псевдопотенциала. Согласно этому методу, будем рассматривать (5) как уравнение движения псевдочастицы в потенциальном поле  $\Phi(\varphi)$ , при этом функция  $F(\varphi) = -d\Phi/d\varphi$  играет роль псевдосилы, электростатический потенциал  $\varphi$  — роль псевдокоординаты, а координата  $\xi$  — роль псевдовремени.

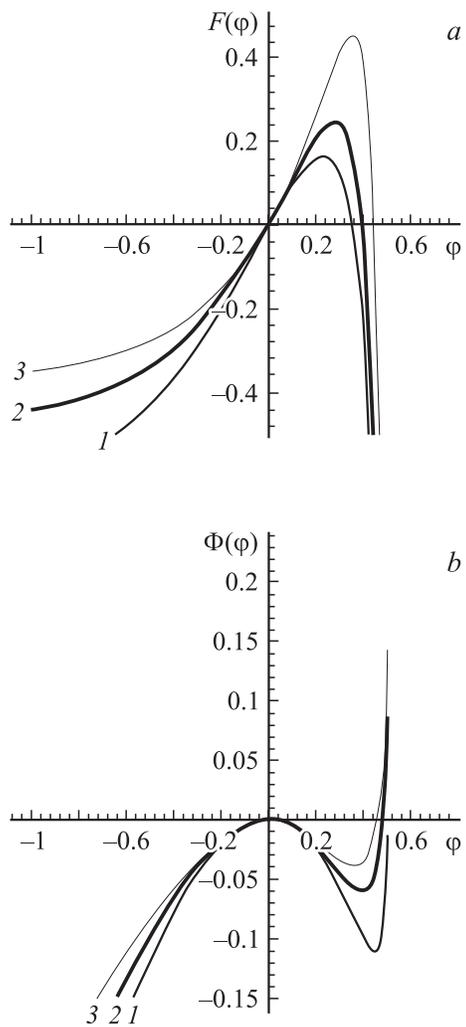
Уравнение Пуассона (5) после однократного интегрирования принимает вид уравнения сохранения энергии псевдочастицы

$$(\varphi')^2 + 2\Phi(\varphi) = c_1, \quad (6)$$

<sup>\*</sup> Отметим, что распределения (2), (3), несмотря на свою популярность, имеют у разных авторов различные наименования (согласно дословному переводу на русский): статистика Цаллиса, неэкстенсивная статистика,  $q$ -максвелловское распределение,  $q$ -деформированное распределение Максвелла–Больцмана и др.



**Рис. 1.** Графики:  $a$  — псевдосилы  $F(\varphi)$  и  $b$  — псевдопотенциала  $\Phi(\varphi)$  при  $T = 1.5$  (цифрами обозначено: 1 —  $q = 0.6$ ; 2 —  $q = 1.0$ , 3 —  $q = 1.4$ , максвелловский случай выделен жирной линией).



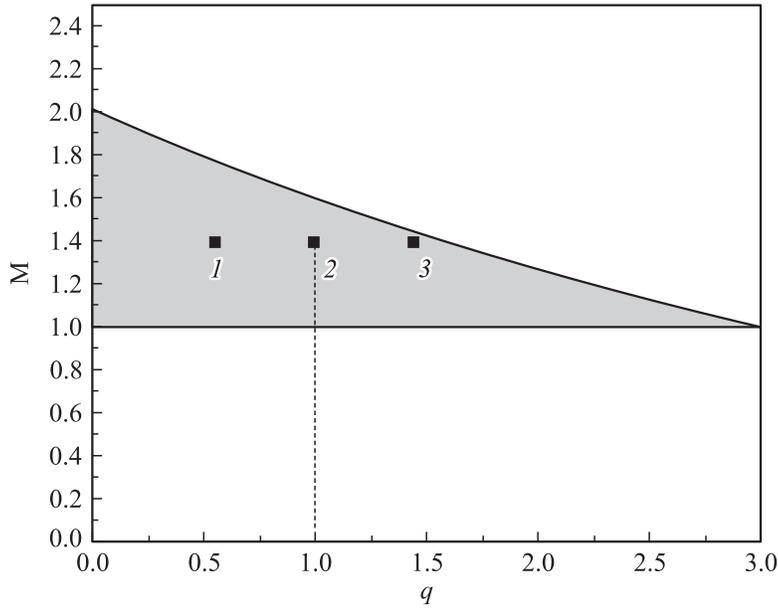
**Рис. 2.** Графики:  $a$  — псевдосилы  $F(\varphi)$  и  $b$  — псевдопотенциала  $\Phi(\varphi)$  при  $T = 0.5$  (цифрами обозначено: 1 —  $q = 0.6$ ; 2 —  $q = 1.0$ , 3 —  $q = 1.4$ , максвелловский случай выделен жирной линией).

где

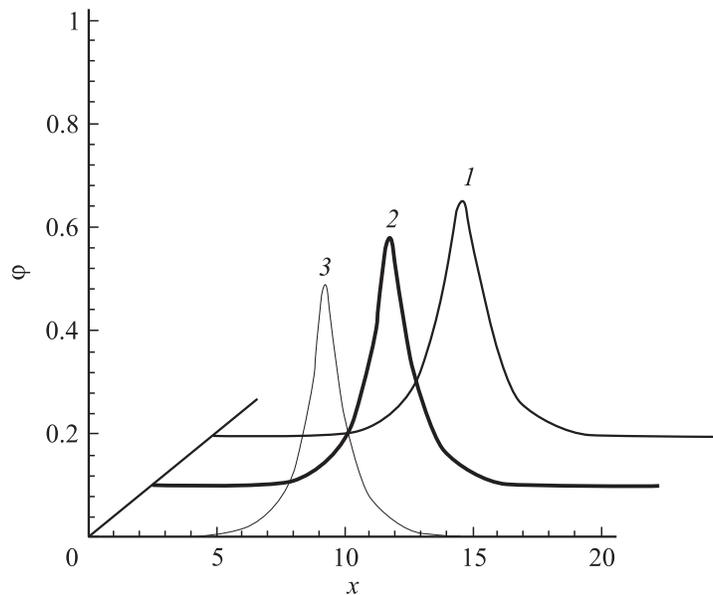
$$\Phi(\varphi) = \frac{T}{2-q} \left\{ 1 - \left[ 1 + (1-q) \frac{\varphi}{T} \right]^{\frac{2-q}{1-q}} \right\} + 1 - \sqrt{1-2\varphi}. \quad (7)$$

В последнем выражении постоянная интегрирования  $c_1$  была выбрана так, чтобы  $\Phi(0) = 0$ .

На рис. 1 и 2 показаны типичные графики  $F(\varphi)$  и  $\Phi(\varphi)$  при  $T > 1$  и  $T < 1$  соответственно для трех значений параметра  $q$ . Обратим внимание на то, что графики псевдосилы  $F(\varphi)$  во всех случаях немонотонны, имеют по две точки смены знака (две точки квазинейтральности) и ограничены справа  $\varphi_{\max} = 1/2$  (так как при большом потенциале ионы не могут преодолеть потенциальный барьер). Тогда графики псевдопотенциала  $\Phi(\varphi)$  имеют по две точки равновесия псевдочастицы — по минимуму и максимуму, соответствующие нулям псевдосилы  $F(\varphi)$ . Это означает, что возможно периодическое движение псевдочастицы-



**Рис. 3.** Область на плоскости параметров  $(q, M)$ , соответствующая возможности существования ионно-звукового солитона (закрашена); цифрами обозначены точки численных примеров: 1 —  $q = 0.6$ ; 2 —  $q = 1.0$ ; 3 —  $q = 1.4$ .



**Рис. 4.** Профили электростатического потенциала в ионно-звуковом солитоне при различных  $q$ , вычисленные вдали от сепаратрисы (цифрами обозначено: 1 —  $q = 0.6$ ; 2 —  $q = 1.0$ ; 3 —  $q = 1.4$ , максвелловский случай выделен жирной линией).

осциллятора в псевдопотенциальной яме, которое соответствует периодической ионно-звуковой волне, и движение по сепаратрисе через точку максимума, которое соответствует ионно-звуковому солитону.

Но движение псевдочастицы по сепаратрисе при  $T > 1$  не удовлетворяет условию того, что далеко впереди и позади солитона (т.е. в практически невозмущенной плазме) потенциал должен быть  $\varphi = 0$ . Таким образом, ионно-звуковой солитон возможен только при  $T < 1$ , что в размерных переменных соответствует сверхзвуковой скорости солитона.

Однако последнее условие необходимо, но не достаточно для устойчивости солитона. Действительно, если правый конец графика псевдопотенциала находится ниже максимума в нуле, то замкнутую сепаратрису на фазовом портрете нарисовать нельзя, а физически это

означает опрокидывание солитона. В итоге условие  $\Phi(\varphi = 1/2) = 0$  определяет предельную температуру  $T_{cr}$  электронов, а безразмерное выражение  $M = 1/\sqrt{T_{cr}}$  — максимально возможное число Маха ионно-звукового солитона.

На рис. 3 показан график возможных чисел Маха в зависимости от параметра электронного распределения  $q$ . При  $q = 0$  максимальное число Маха  $M = 2$ , при  $q = 1$  максимальное число Маха совпадает со значением 1.58 для максвелловской плазмы (1), при  $q = 1.5$  —  $M = \sqrt{2}$ , при  $q = 3$  —  $M = 1$  (т.е. здесь диапазон возможных чисел Маха становится равным нулю), а при  $q > 3$  моносонитоны невозможны.

Перейдем к рассмотрению структуры волны. На рис. 4 построены вычисленные по (5) профили электростатического потенциала  $\varphi$  в солитоне при трех значениях  $q$  при одинаковом значении числа Маха. Видно, что чем меньшим значением  $q$  обладает распределение электронов, тем более пологую и широкую форму имеет ионно-звуковой солитон.

Таким образом, в данной работе приведено решение задачи о структуре нелинейного ионно-звукового солитона в плазме с электронной компонентой, распределенной по Цаллису. Показано, что чем меньше параметр  $q$ , тем большее предельное (до опрокидывания) значение числа Маха может иметь солитон. Кроме того, с уменьшением  $q$  солитон становится более пологим и широким.

## Список литературы

- [1] Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. // Ядерный синтез. 1961. Т. 1. С. 82.
- [2] Dubinov A.E., Dubinova I.D. // J. Plasma Phys. 2005. V. 71. N 5. P. 715.
- [3] Valluri S.R., Jeffrey D.J., Corless R.M. // Canadian J. Phys. 2000. V. 78. N 9. P. 823.
- [4] Дубинова И.Д. // Физ. плазмы. 2004. Т. 30. № 10. С. 937.
- [5] Ghosh S.S., Iyengar A.N.S. // Phys. Plasma. 1997. V. 4. N 9. P. 3204.
- [6] Ghosh S.S., Iyengar A.N.S. // Phys. Scripta. 2000. V. 61. P. 361.
- [7] Esfandyari A.R., Khorram S., Rostami A. // Phys. Plasma. 2001. V. 8. N 11. P. 4753.
- [8] Schamel H. // Plasma Phys. 1972. V. 14. P. 905.
- [9] Bhattacharya S.K., Paul S.N., Chakraborty B. // Indian. J. Phys. 2003. V. 77B. N 3. P. 327.
- [10] Gill T.S., Kaur H., Saini N.S. // Phys. Plasma. 2003. V. 10. N 10. P. 3927.
- [11] Cairns R.A., Mamun A.A., Bingham R. et al. // Geophys. Res. Lett. 1995. V. 22. N 20. P. 2709.

- [12] *Tsallie C.* // Brazilian J. Physics. 1999. V. 29. N 1. P. 1.
- [13] *Liu J.M., De Groot J.S., Matte J.P., Johnston T.W., Drake R.P.* // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. N 17. P. 2717.
- [14] *Lima J.A.S., Silva Jr.R., Santos J.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 61. N 3. P. 3260.
- [15] *Hellberg M.A., Mace R.L.* // Phys. Plasma. 2002. V. 9. N 5. P. 1495.
- [16] *Song M.-Y., Jung Y.-D.* // Phys. Plasma. 2005. V. 12. N 1. P. 014506-1.
- [17] *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: Наука, Физматлит, 2000.