

01;05.4

Метод расчета силы левитации в системе магнит—сверхпроводник

© Ю.С. Ермолаев, И.А. Руднев

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)

Поступило в Редакцию 4 мая 2005 г.

Представлен метод численного расчета силы магнитной левитации в системах магнит—сверхпроводник. Расчет базируется на методе конечных элементов, построенном на уравнениях Максвелла и модели Бина. Получено удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных зависимостей силы магнитной левитации от левитационного зазора в различных режимах охлаждения сверхпроводника.

В последнее время все больше внимания стало уделяться разработке устройств, основанных на явлении магнитной левитации [1]. Перспективными приложениями магнитной левитации в системах постоянный магнит—массивный высокотемпературный сверхпроводник (ВТСП) являются магнитные подшипники, системы аккумулирования энергии, поезда на магнитном подвесе [1–4]. Для успешного проектирования таких устройств необходим этап предварительного расчета силы магнитной левитации в заданной геометрии магнита и ВТСП-образца. Еще больший интерес представляют предварительные расчеты с целью оптимизации формы и объема ВТСП-блока, исходя из заданного значения силы левитации. Ясно, что от такой оптимизации существенным образом зависят стоимостные и массогабаритные параметры конкретных устройств.

В настоящем сообщении мы описываем способ расчета силы магнитной левитации, распределения токов в сверхпроводнике и пространственного распределения магнитного поля, основанный на методе конечных элементов. В отличие от предложенного ранее подхода [5] наш подход позволяет моделировать не только охлаждение в нулевом поле, но и режим охлаждения в магнитном поле, который реально используется на практике. Кроме того, в ряде случаев он обладает преимуществами над методами, моделирующими динамическую систему (см., например, [6]). А именно, при вычислении максимальных сил,

наш метод требует расчета только одной или двух точек по магнитной предыстории, в отличие от динамического метода [6], в котором требуется подробный расчет всей магнитной предыстории образца.

Для расчета силы левитации, действующей на исследуемый объект — магнит либо сверхпроводник, требуется знать пространственное распределение магнитного поля и токов в этом объекте.

Запишем связь между токами и магнитным полем через векторный потенциал, воспользовавшись уравнениями Максвелла.

Уравнение, связывающее векторный потенциал \mathbf{A} с токами \mathbf{j} :

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/м — магнитная постоянная, μ — магнитная проницаемость (требуется при расчете ферромагнетиков, в нашем случае равна единице). Это уравнение используем как для расчета векторного потенциала по заданным токам, так и для расчета токов по известному векторному потенциалу.

По векторному потенциалу стандартным образом рассчитываем магнитное поле:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2)$$

Далее рассчитываем силу левитации как интеграл от произведения токов на поле по всему объему объекта:

$$\mathbf{F} = \int_v [\mathbf{j}\mathbf{B}] dV. \quad (3)$$

Если вектор токов в сверхпроводнике имеет больше одной ненулевой компоненты, то требуются дополнительные условия на векторный потенциал на поверхности сверхпроводника, в том числе должен выполняться закон непрерывности токов.

Поле постоянного магнита представляем как поле соленоида, несущего ток по боковой поверхности [7]. Вклад магнита в векторный потенциал считаем через уравнение (1). Это позволяет простейшим способом вычислять силу, действующую на магнит, и может быть полезно, если в левитационной системе несколько магнитов.

Рассмотрим моделирование идеального сверхпроводника (в случае охлаждения в нулевом поле — идеально диамагнитного). Чтобы посчитать токи в таком сверхпроводнике, мы полагаем, что векторный

потенциал в его объеме не изменяется. Исходя из этого условия и вклада от магнита в векторный потенциал, рассчитываем распределение векторного потенциала, после чего, выразив из (1) токи и применив это выражение в объеме сверхпроводника, находим токи в сверхпроводнике. Далее, по вычисленным таким образом векторному потенциалу и токам из (2) и (3) рассчитываем силу левитации.

Рассмотрим более реальный случай — расчет сверхпроводника в рамках модели критического состояния Бина [8], хорошо подходящей для сверхпроводников второго рода с сильным пиннингом. К таким сверхпроводникам относятся монокристаллы ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-x}$, обычно использующиеся в левитационных системах. В модели Бина постулируется, что сверхпроводник может нести либо нулевой ток, либо ток, равный постоянному значению j_c . Алгоритмически модель Бина выполнена следующим образом. При вычислении векторного потенциала сначала производим расчет как для идеального сверхпроводника, затем проводим процедуру коррекции токов — ограничиваем полученный ток значением j_c , затем снова пересчитываем векторный потенциал, причем в точках, в которых был скорректирован ток, векторный потенциал не сохраняем, а пересчитываем с учетом токов. Процедуру коррекции токов и пересчет векторного потенциала повторяем до тех пор, пока не останется токов, превышающих j_c .

Начальное распределение векторного потенциала внутри сверхпроводника зависит от режима захолаживания, а именно: в режиме охлаждения без магнитного поля векторный потенциал равен нулю, в режиме охлаждения в магнитном поле — сверхпроводник запоминает начальное распределение векторного потенциала.

В большинстве случаев геометрия левитационных систем является цилиндрически симметричной, например в системе цилиндрические магнит и сверхпроводник, расположенные соосно. В этой конфигурации удобно перейти к цилиндрической системе координат (в переменных r , φ , z), так как тогда часть компонент векторов оказываются нулевыми: $\mathbf{A} = (0, A_\varphi, 0)$, $\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z)$, $\mathbf{j} = (0, j_\varphi, 0)$, $\mathbf{F} = (0, 0, F_z)$. Тогда, выражения (1)–(3) принимают вид

$$-\frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} = -\mu_0 j_\varphi, \quad (4)$$

$$B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \quad (5)$$

(компоненту B_z не приводим, так как она не представляет интереса),

$$F_z = 2\pi \int_0^R \int_0^Z j_\varphi(r_1, z_1) \cdot B_r(r_1, z_1) \cdot r_1 dr_1 dz_1, \quad (6)$$

где Z, R — толщина и радиус объекта. На оси симметрии: $A_\varphi(r=0) = 0$, $B_r(r=0) = 0$.

Таким образом, первоначальная задача сводится к задаче нахождения пространственного распределения A_φ из уравнения (4) в координатах (r, z) с заданными граничными условиями в объеме сверхпроводника, заданными токами, и условием $A_\varphi = 0$ на бесконечности. Далее разбиваем пространство (полуплоскость $r > 0, z$) на дискретное множество точек. Производные, встречающиеся в уравнении (4), в каждой точке сетки заменяем на разностные соотношения. В итоге получаем систему линейных алгебраических уравнений, которую решаем методом Зейделя.

При сравнении с системами, легко рассчитываемыми аналитически, а именно магнит-магнит и магнит-идеальный диамагнетик [7], расчет этим методом конечных элементов дает совпадение на уровне двух значащих цифр, при приемлемом соотношении между точностью и временем расчета.

В качестве иллюстрации на рис. 1 и 2 приведено сравнение расчета с экспериментом в режимах охлаждения без магнитного поля и в магнитном поле соответственно. Измерения проводились в соосной левитационной конфигурации магнит — ВТСП на специализированном экспериментальном стенде, описанном ранее в [9]. Магнит имел диаметр 25 mm, толщину 13 mm и максимальное поле на оси 0.31 T, что соответствовало поверхностному току $7 \cdot 10^5$ A/m. В качестве сверхпроводника использовалась плавленно-текстурированная керамика $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ в виде диска с диаметром 14 mm и толщиной 2 mm соответственно.

Видно, что, несмотря на расхождение при малых левитационных зазорах, применение нашего подхода дает достаточно хорошее количественное совпадение расчетных и измеренных кривых, в том числе описывает гистерезисный характер силы магнитной левитации. Имеющееся несоответствие можно отнести к ряду как методологических,

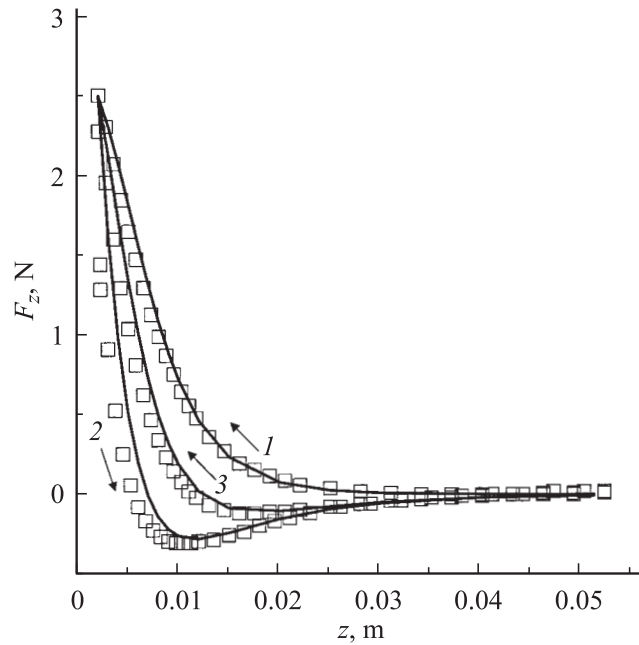


Рис. 1. Сравнение расчетной зависимости силы левитации от расстояния между сверхпроводником и магнитом с экспериментальной зависимостью в режиме охлаждения в нулевом магнитном поле. Линия — расчет, точки — эксперимент. Стрелками показаны направления движения магнита относительно сверхпроводника: 1 — данные, полученные при первом сближении магнита и сверхпроводника до минимального расстояния; 2 — последующее увеличение левитационного зазора; 3 — второе уменьшение левитационного зазора. При дальнейшем циклическом увеличении и уменьшении левитационного зазора значения силы левитации будут соответствовать кривым 2 и 3.

так и экспериментальных факторов: грубость модели Бина, возможная неоднородность и дефектность образца, погрешности экспериментальной установки.

Таким образом, нами предложен и реализован метод, позволяющий рассчитывать силу магнитной левитации, распределение токов и магнитных полей в левитационной цилиндрически симметричной

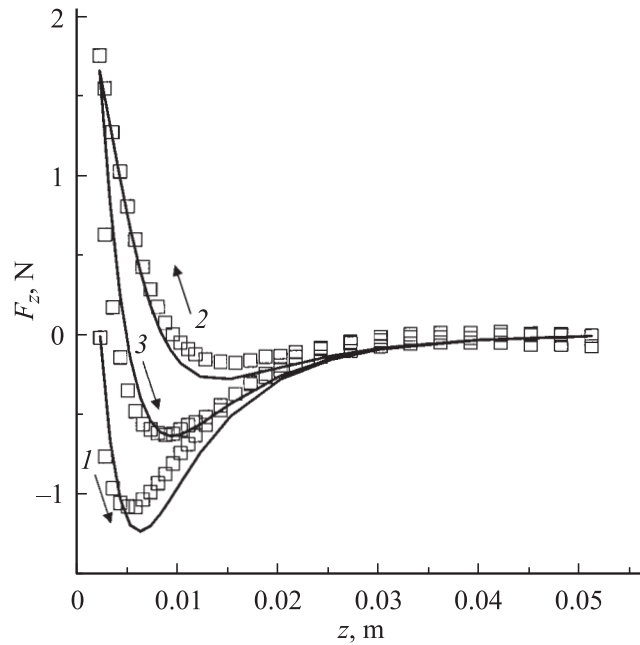


Рис. 2. Сравнение расчета с экспериментом в режиме охлаждения в магнитном поле. Линия — расчет, точки — эксперимент. Стрелками показаны направления движения магнита относительно сверхпроводника: 1 — данные, полученные при первом увеличении левитационного зазора; 2 — последующее уменьшение левитационного зазора; 3 — второе увеличение левитационного зазора. При дальнейшем циклическом уменьшении и увеличении левитационного зазора значения силы левитации будут соответствовать кривым 2 и 3.

системе магнит–сверхпроводник. Описанный метод дает не только качественное, но и количественное совпадение с экспериментальными данными, что указывает на возможность применения данного метода для расчета магнитных систем, использующих объемные высокотемпературные сверхпроводники: магнитных подшипников, магнитных подвесов, транспортных систем.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ, грант № А04–2.9–150.

Список литературы

- [1] *Hull J.R.* // *Supercond. Sci. Technol.* 2000. V. 13. P. R1–R15.
- [2] *Koshizuka N., Ishikawa F., Nasu H.* et al. // *Physica C.* 2002. V. 378–381. P. 11–17.
- [3] *Nagaya S., Komura K., Kashima N.* et al. // *Physica C.* 2003. V. 392–396. P. 719–722.
- [4] *Fujimoto H.* // *Supercond. Sci. Technol.* 2000. V. 13. P. 827–829.
- [5] *Chun Y.-D., Kim, Y.-H., Lee J.* et al. // *IEEE Trans. Appl. Supercond.* 2001. V. 11. N 1. P. 2000–2003.
- [6] *Qin M.J., Li G., Liu H.K.* et al. // *Phys. Rev. B.* 2002. V. 66. P. 024516–11.
- [7] *Kordyuk A.A., Nemoshkalenko V.V., Voznichenko R.V.* et al. // *Appl. Phys. Lett.* 1999. V. 75. N 11. P. 1595–1597.
- [8] *Bean C.P.* // *Phys. Rev. Lett.* 1962. V. 8. P. 250–251; *Bean C.P.* // *Rev. Mod. Phys.* 1964. V. 36. N 1. P. 31–36.
- [9] *Ермолаев Ю.С., Руднев И.А.* // *ПТЭ.* 2004. № 1. С. 164–165.