

01;03

Моделирование неустойчивости границы диэлектрической жидкости со свободным поверхностным зарядом

© К.Е. Бобров, Н.М. Зубарев, В.Г. Суворов

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург

E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 12 апреля 2005 г.

Представлены результаты численного моделирования развития неустойчивости границы невязкой диэлектрической жидкости со свободным поверхностным зарядом во внешнем электрическом поле. Проведено сравнение поведения системы в двух предельных случаях — когда поверхностный заряд полностью экранирует электрическое поле над жидкостью и, наоборот, под ее поверхностью. Продемонстрировано, что сценарии развития неустойчивости существенно отличаются, несмотря на то что линеаризованные уравнения движения для этих случаев совпадают. Это указывает на определяющую роль нелинейности в развитии неустойчивости.

Известно, что поверхность диэлектрической жидкости со свободным поверхностным зарядом неустойчива, если управляющий параметр (сумма плотностей энергии электрического поля над и под поверхностью) превышает некоторое пороговое значение [1,2]. На линейной стадии развития неустойчивости происходит экспоненциальный рост амплитуды периодических возмущений поверхности. Условие применимости линеаризованных уравнений движения является малость амплитуды возмущений по сравнению с длиной волны. Понятно, что это условие будет нарушено за конечное время и эволюция системы будет определяться нелинейными процессами.

Целью настоящей работы является исследование численными методами динамики развития неустойчивости на ее нелинейных стадиях, когда амплитуда возмущения изначально плоской поверхности сравнима с характерной длиной волны (длина волны при этом может более чем на порядок превышать радиус кривизны поверхности).

Положим, что в невозмущенном состоянии граница жидкости представляет собой плоскую горизонтальную поверхность $z = 0$, а вектор напряженности поля направлен по нормали к поверхности — вдоль оси z нашей системы координат. Ограничиваясь рассмотрением осесимметричного случая, введем задающую отклонение границы от плоской функцию $\eta(r, t)$. Тогда форма возмущенной поверхности жидкости задается уравнением $z = \eta(r, t)$. Расстояние между верхним электродом и поверхностью жидкости (h) положим для простоты равным глубине слоя жидкости, а также расстоянию от оси симметрии до боковой границы занимаемой жидкостью области.

Будем считать жидкость идеальной, а ее движение — потенциальным. Потенциал скорости для несжимаемой жидкости Φ удовлетворяет уравнению Лапласа, записываемому для осесимметричных возмущений поверхности как

$$\Phi_{rr} + r^{-1}\Phi_r + \Phi_{zz} = 0. \quad (1)$$

Его следует решать совместно с граничными условиями:

$$\Phi_t = \frac{\Phi_r^2 + \Phi_z^2}{2} = \frac{P_E}{\rho} + \frac{\alpha/\rho}{\sqrt{1 + \eta_r^2}} \left(\frac{\eta_{rr}}{1 + \eta_r^2} + \frac{\eta_r}{r} \right), \quad z = \eta(r, t),$$

$$\Phi_z|_{z=-h} = 0, \quad \Phi_r|_{r=0} = 0, \quad \Phi_r|_{r=h} = 0, \quad (2)$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность среды, а P_E — электростатическое давление. Временная эволюция свободной поверхности определяется кинематическим соотношением:

$$\eta_t = \Phi_z - \eta_r \Phi_r, \quad z = \eta(r, t). \quad (3)$$

Наконец, электростатическое давление на заряженной поверхности определяется выражением:

$$8\pi P_E = (\varphi_r^2 + \varphi_z^2)_{z=\eta+0} - \varepsilon(\varphi_r^2 + \varphi_z^2)_{z=\eta-0}, \quad (4)$$

где φ — потенциал электрического поля, а ε — диэлектрическая проницаемость среды. Ниже мы будем рассматривать два предельных случая: первый — когда поверхность жидкости заряжена положительными ионами, полностью экранирующими поле в жидкости (случай „а“), и второй — когда поверхность заряжена электронами, полностью экранирующими поле над границей (случай „б“). Подобные ситуации

реализуются, например, для жидких гелия и водорода с сильнозаряженной поверхностью [3,4]; для этих жидкостей можно положить $\varepsilon \approx 1$ в выражении [4]. Следует отметить, что аналогичная случаю „a“ ситуация возникает для идеально проводящей жидкости — электрическое поле не проникает в жидкость из-за экранировки индуцированным поверхностным зарядом. Аналитически влияние нелинейностей на эволюцию поверхности жидкого проводника в электрическом поле исследовалось, например, в работах [5,6].

Потенциал электрического поля φ удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в осесимметричном случае записывается как

$$\varphi_{rr} + r^{-1}\varphi_r + \varphi_{zz} = 0. \quad (5)$$

Его необходимо дополнить условием эквипотенциальности границы жидкости и необходимыми условиями на электродах, боковых границах и оси симметрии:

$$\varphi|_{z=\eta} = U, \quad \varphi|_{z=+h} = 0 \quad (\text{случай „a“}),$$

$$\varphi|_{z=\eta} = 0, \quad \varphi|_{z=-h} = U \quad (\text{случай „b“}),$$

$$\varphi_r|_{r=0} = 0, \quad \varphi_r|_{r=h} = 0,$$

где U — разность потенциалов.

Соответствующее рассматриваемой задаче дисперсионное соотношение для плоских поверхностных волн будет выглядеть следующим образом (оно приведено в коротковолновом пределе, $kh \gg 1$):

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho} k^3 - \frac{U^2}{4\pi\rho h^2} k^2,$$

где ω — частота, а k — волновое число. Примечательно, что его вид не зависит от знака поверхностного заряда — случаи „a“ и „b“. Как следствие, развитие неустойчивости на ее линейных стадиях будет происходить по одинаковому сценарию, а все отличия могут быть связаны только с влиянием нелинейностей из динамического (2) и кинематического (3) граничных условий.

Для моделирования динамики заряженной поверхности удобно перейти к безразмерным обозначениям, приняв h за единицу длины и

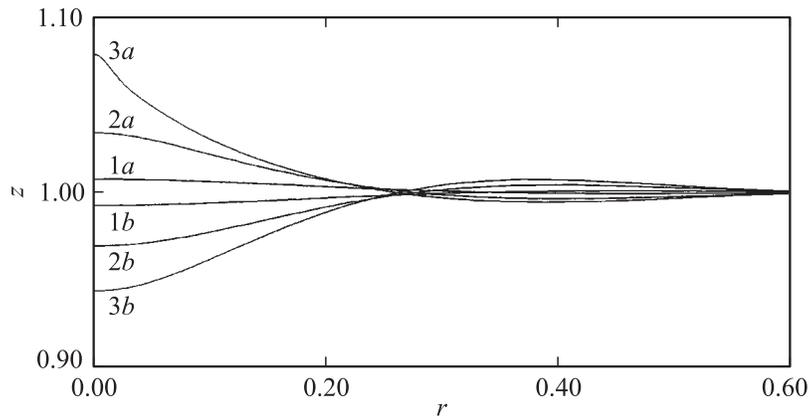


Рис. 1. Результаты численного моделирования развития неустойчивости поверхности диэлектрической жидкости во внешнем электрическом поле для случаев, когда свободный поверхностный заряд полностью экранирует поле в жидкости (случай „a“) либо над ней (случай „b“). Профили поверхности приведены в последовательные моменты времени $t = 0.08, 0.11, 0.11825$ (графики 1, 2 и соответственно 3).

$\sqrt{h^3\rho/\alpha}$ за единицу времени. Численное решение уравнений Лапласа (1) и (5) с соответствующими граничными условиями проводилось при помощи преобразования расчетной области к прямоугольной форме,

$$\{r, z\} \rightarrow \{r, (z \pm 1)/(\eta(r, t) \pm 1)\}.$$

При этом для разности потенциалов U полагалось $U^2 = 144\pi ah$, что соответствует закритическому для развития неустойчивости электрическому полю.

Результаты расчетов приведены на рис. 1. Видно, что в случае „a“ имеется тенденция к формированию конического острия (см. также [7], где аналогичные вычисления были проведены для вязкой проводящей жидкости). В соответствии с выдвинутой в работе [8] гипотезой за формирование особенностей — конусов с углом раствора 98.6° — могут быть ответственны автомодельные решения уравнений электрогидродинамики. В случае „b“, для которого начальное возмущение бралось с другим знаком, аналогичной тенденции не наблюдается —

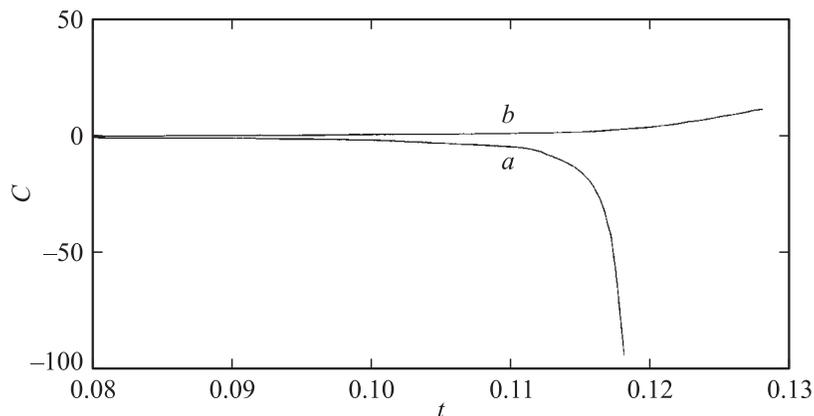


Рис. 2. Временная зависимость кривизны поверхности жидкости на оси симметрии (C) для случаев „ a “ и „ b “.

поверхность втягивается в глубь жидкости без образования острия (для линеаризованных уравнений эволюция поверхности, с точностью до замены $\eta \rightarrow -\eta$, проходила бы аналогично случаю „ a “). Асимметрия подчеркивается рис. 2, на котором приведена временная эволюция кривизны границы на оси симметрии. Если в случае „ a “ видна тенденция к обращению этой величины в бесконечность за конечное время, то для случая „ b “ ее рост на рассматриваемой стадии процесса происходит без появления особенностей.

Можно предположить, что для случая „ b “ характерно прорастание углубления в поверхности в направлении нижнего электрода. Возможность подобного сценария развития неустойчивости указывалась в работе [9], в которой были найдены частные точные решения рассматриваемых уравнений движения в пределе сильного внешнего поля — параболоидальные углубления в заряженной поверхности диэлектрической жидкости, втягивающиеся вглубь с постоянной скоростью.

Качественное различие поведения границы жидкости на развитых стадиях неустойчивости для случаев „ a “ и „ b “ доказывает определяющее влияние нелинейностей в электрогидродинамических процессах при закритических электрических полях.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований президиума РАН „Математические методы в нелинейной динамике“ при частичной поддержке Фондом некоммерческих программ „Династия“.

Список литературы

- [1] *Melcher J.R.* Field-coupled Surface Waves. The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1963.
- [2] *Горьков Л.П., Черникова Д.М.* // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 18. В. 2. С. 119–122.
- [3] *Володин В.П., Хайкин М.С., Эдельман В.С.* // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. В. 10. С. 707–711.
- [4] *Шикин В., Лейдерер П.* // ФНТ. 1997. Т. 23. В. 5/6. С. 624–628.
- [5] *Зубарева Н.М., Зубарев О.В.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. В. 7. С. 21–29.
- [6] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Климов А.В.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. В. 2. С. 19–27.
- [7] *Suvorov V.G., Zubarev N.M.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2004. V. 37. P. 289–297.
- [8] *Зубарев Н.М.* // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 73. В. 10. С. 613–617.
- [9] *Зубарев Н.М.* // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 8. С. 8–11.